# 2023년 윈터 후 실력 모의고사 해설지

1) [정답] ③

$4^{\frac{1}{2}}+3^0=2+1=3$

2) [정답] ⑤

$\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+2)=5$

3) [정답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하자.

$a_3=2+2d=14$에서 $d=6$

따라서 $a_6=2+5\times6=32$

4) [정답] ③

$g(x)=x^2f(x)$를 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)$

$=4\cdot1+4\cdot3=16$

5) [정답] ②

$a>0$이므로 $\tan\theta_1=\frac{b}{a}$, $\tan\theta_2=-\frac{2b^2}{a^2}$

$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{b}{a}+\left(-\frac{2b^2}{a^2}\right)=\frac{b(a-2b)}{a^2}=0$에서

$b>0$이므로 $a=2b$

따라서 $\sin\theta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{5b^2}}=\frac{\sqrt5}{5}$

6) [정답] ②

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}=3^{-3x^2}$이므로 $3^{-3x^2}>3^{20-19x}$

이때 (밑)$=3>1$이므로 $-3x^2>20-19x$

$3x^2-19x+20<0$ $(3x-4)(x-5)<0$

$\frac{4}{3}<x<5$

부등식을 만족시키는 정수 $x$는 2, 3, 4이므로

그 합은 $2+3+4=9$

7) [정답] ③

$a_1=1$이므로

$a_2=a_1-4=-3$

$a_3=a_2{}^2=9$

$a_4=a_3-4=5$

$a_5=a_4-4=1=a_1$

$a_6=a_5-4=-3=a_2$

$\vdots$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_{n+4}=a_n$을 만족시킨다.

$\sum\limits_{k=1}^{22}a_k=\sum\limits_{k=1}^{20}a_k+a_{21}+a_{22}$

$=5\sum\limits_{k=1}^{4}a_k+a_1+a_2$

$=5\times\{1+(-3)+9+5\}+1+(-3)=58$

8) [정답] ③

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ …… ㉠ 에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

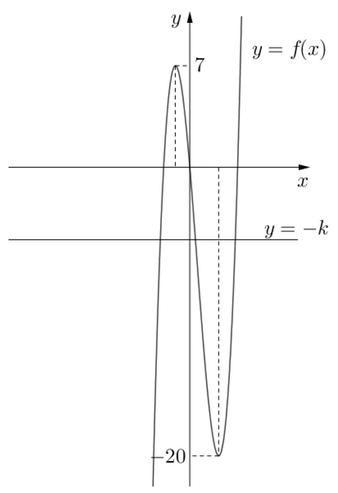
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 7 (극대) | ↘ | $-20$ (극소) | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고,

$x=2$에서 극솟값 $-20$을 갖는다.




방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$ 가

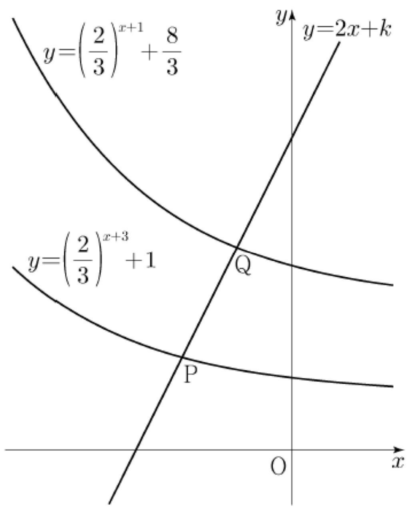
서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$이다.

따라서 정수 $k$의 값은 $-6$, $-5$, $-4$, $\cdots$, 19 이고,

그 개수는 26이다.

9) [정답] ④




두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $p,\ q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$ 로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2a-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로 $q-p=1$ 즉, $q=p+1$

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ ...... ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

10) [정답] ③

조건 (나)에서

$\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{4}\int_0^a f(t)dt$ ...... ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{2x}{4}\int_0^a f(t)dt$

이때 $\int_0^a f(x)dx=k$라 하면 $f(x)=\frac{1}{2}kx$이므로

$\int_0^1 \frac{1}{2}ktdt=\frac{1}{4}k=2$에서 $k=8$ $\therefore\ f(x)=4x$

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_0^a f(t)dt=\frac{a^2}{4}\int_0^a f(t)dt$이므로 $\frac{a^2}{4}=1$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$ $\therefore\ f(a)=f(2)=4\times2=8$

11) [정답] ②

선분 AB를 지름으로 하는 원을 $C$라 하면,

원 $C$가 원점 O를 지나므로 $\angle\mathrm{AOB}=90°$ 이다.

그러면 $0<b<1<a$이고,

두 점 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{3}{2}\log_2 a\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{3}{2}\log_2 b\right)$에 대하여

두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로

$\frac{\frac{3}{2}\log_2 a}{a}\times\frac{\frac{3}{2}\log_2 b}{b}=-1$

$\log_2 a\times\log_2 b=-\frac{4}{9}ab$ ...... ㉠

한편 조건 (나)에서 $\angle\mathrm{OBC}=90°$이므로 선분 OC는 원 $C$의 지름이다.

그러면 선분 AB의 중점과 선분 OC의 중점이 모두

원 $C$의 중심으로 $\frac{\frac{3}{2}\log_2 a+\frac{3}{2}\log_2 b}{2}=\frac{0+3}{2}$

$\frac{3}{2}\log_2 ab=3$, $\log_2 ab=2$, 즉 $ab=4$

㉠에서 $\log_2 a\times\log_2\frac{4}{a}=-\frac{16}{9}$

$\log_2 a\times(2-\log_2 a)=-\frac{16}{9}$

$(\log_2 a)^2-2\log_2 a-\frac{16}{9}=0$

$\left(\log_2 a+\frac{2}{3}\right)\left(\log_2 a-\frac{8}{3}\right)=0$

$\log_2 a=-\frac{2}{3}$ 또는 $\log_2 a=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a=2^{\frac{8}{3}}\ (\because\ a>1)$

12) [정답] ④

A = B이므로 $\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$을 만족한다.

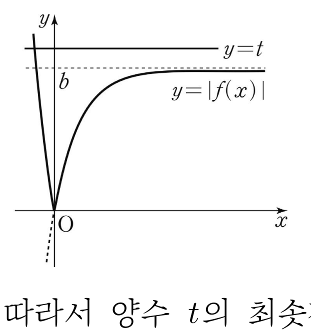
$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$
$$=4+\frac{16}{3}-2k$$
$$=\frac{28}{3}-2k$$

따라서 $\frac{28}{3}-2k=0$이므로 $k=\frac{14}{3}$이다.

13) [정답] ④

$f(x)=-2^{-2x+a}+b=-2^{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-2^{-2x}$, 곧 함수 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

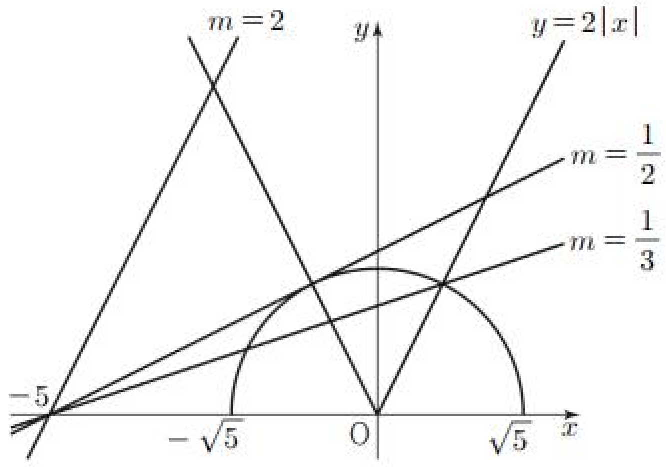
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하며
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=b$를 점근선으로 갖는다. 이때 $b \le 0$이면 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)<0$이고 따라서 모든 실수 $x$에 대하여 $|f(x)|=-f(x)$이므로 함수 $|f(x)|$는 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지 않는다.
따라서 $b>0$이다.
$b>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 $x$축과 한 점에서 만나며 함수 $|f(x)|$의 최솟값은 0이다.
조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=0$에서 최솟값을 가지므로 $0=|f(0)|=f(0)=-2^a+b$ …… ㉠
직선 $y=b$가 곡선 $y=f(x)$의 점근선이므로
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 직선 $y=b$를 점근선으로 갖는다.
이때 다음 그림과 같이 $t \ge b$ 또는 $t=0$이면 직선 $y=t$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 한 점에서 만나고, $0<t<b$이면 직선 $y=t$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.




따라서 양수 $t$의 최솟값은 $b$이므로 조건 (나)에서 $b=4$
이를 ㉠에 대입하면 $a=2$
따라서 $a+b=2+4=6$

14) [정답] ①

직선 $y=m(x+5)$는 기울기가 $m(m>0)$이고
점 $(-5, 0)$을 지나는 직선이다.
함수 $y=2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=5(y \ge 0)$은 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 2)$에서 만난다.
직선 $y=m(x+5)$가 점 $(1, 2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{3}$
직선 $y=m(x+5)$가 점 $(-1, 2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{2}$
이때 두 점 $(0, 0)$, $(-1, 2)$를 지나는
직선의 기울기가 $-2$이므로
곡선 $x^2+y^2=5(y \ge 0)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.
그러므로 직선 $y=\frac{1}{2}(x+5)$는
곡선 $x^2+y^2=5(y \ge 0)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선이다.




(i) $0<m<\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=4$

(ii) $m=\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=3$

(iii) $\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$일 때, $f(m)=4$

(iv) $\frac{1}{2} \le m<2$일 때, $f(m)=2$

(v) $m \ge 2$일 때, $f(m)=1$

(i)~(v)에 의하여

$$f(m)=\begin{cases} 1 & (m \ge 2) \\ 2 & \left(\frac{1}{2} \le m<2\right) \\ 3 & \left(m=\frac{1}{3}\right) \\ 4 & \left(0<m<\frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0, \infty)$에서
함수 $f(m)$은 $m=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{2}$, $m=2$에서만
불연속이므로 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2=\frac{17}{6}$

15) [정답] 152

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d<0)$이라 하자.

( i ) $a_m = 2a_{m+2}$일 때

$a_{m+2} = a_m + 2d$이므로

$a_m = -4d$이고 $a_{m+1} = -3d$, $a_{m+2} = -2d$

$S_{m+1} = S_m + (-3d) > S_m$,

$S_{m+2} = S_{m+1} + (-2d) > S_{m+1}$이므로

$S_{m+2} > S_{m+1} > S_m$

그러므로 $S_{m+2} = 460$, $S_m = 450$

$S_{m+2} - S_m = a_{m+1} + a_{m+2}$에서

$460 - 450 = -3d + (-2d)$

$d = -2$

$a_m = 8 = a_1 + (m-1)\times(-2)$에서 $a_1 = 2m+6$

$$S_m = \frac{m(a_1+a_m)}{2} = \frac{m(2m+14)}{2} = 450$$

$m^2 + 7m - 450 = 0$, $(m+25)(m-18) = 0$

$m$은 자연수이므로 $m = 18$

그러므로 $a_1 = 2\times 18 + 6 = 42$

(ii) $a_m = -2a_{m+2}$일 때

$a_{m+2} = a_m + 2d$이므로

$a_m = -\frac{4}{3}d$이고 $a_{m+1} = -\frac{d}{3}$, $a_{m+2} = \frac{2}{3}d$

$S_{m+1} = S_m + \left(-\frac{d}{3}\right) > S_m$, $S_{m+2} = S_m + \frac{d}{3} < S_m$

이므로 $S_{m+1} > S_m > S_{m+2}$

그러므로 $S_{m+1} = 460$, $S_{m+2} = 450$

$S_{m+2} - S_{m+1} = a_{m+2}$에서 $450 - 460 = \frac{2}{3}d$

$d = -15$

$a_{m+1} = 5 = a_1 + m\times(-15)$에서 $a_1 = 15m + 5$

$$S_{m+1} = \frac{(m+1)(a_1+a_{m+1})}{2} = \frac{(m+1)(15m+10)}{2} = 460$$

$3m^2 + 5m - 182 = 0$, $(3m+26)(m-7) = 0$

$m$은 자연수이므로 $m = 7$

그러므로 $a_1 = 15\times 7 + 5 = 110$

( i ), (ii)에 의하여 모든 $a_1$의 값의 합은

$42 + 110 = 152$

16) [정답] 15

$f'(x)$를 부정적분하면

$f(x) = x^4 - x^2 + C$ (단, $C$ 는 적분상수)

$f(0) = 3$이므로 $C = 3$

따라서, $f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$

17) [정답] 3

$$\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2} = \log_2 120 - \log_2 15 = \log_2 \frac{120}{15} = \log_2 8$$
$$= \log_2 2^3 = 3$$

18) [정답] 6

$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a) \geq 0$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x) \geq 0$

이때, 이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4} \leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = a^2 - 3(-a^2 + 8a) = 4a^2 - 24a = 4a(a-6) \leq 0$

그러므로 $0 \leq a \leq 6$

따라서 $a$의 최댓값은 6이다.

19) [정답] 22

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k + 5) = 3\sum_{k=1}^{5}a_k + 25 = 55$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5}a_k + \sum_{k=1}^{5}b_k = 10 + \sum_{k=1}^{5}b_k = 32$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}b_k = 22$$

20) [정답] 110

$f(x+1) - xf(x) = ax + b$에 $x = 0$을 대입하면 $f(1) = b$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) = x$이므로 $b = 1$

또, $f(x+1) = xf(x) + ax + 1$이므로

$0 \leq x \leq 1$에서

$f(x+1) = xf(x) + ax + 1 = x^2 + ax + 1$

$x + 1 = t$로 치환하면

$f(t) = (t-1)^2 + a(t-1) + 1 = t^2 + (a-2)t + 2 - a \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t) = 2t + (a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) = x$이고,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로

$f'(1) = 1$이므로 $a = 1$

따라서 ㉠에서 $1 \le x \le 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$이다.

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x^2-x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$

21) [정답] 678

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2$$

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서 $\sum_{k=1}^{10}a_n=-14$

를 만족하기 위해서는

$a_1=-2,\ a_2=-4$

$$\sum_{k=3}^{9}|a_k|=\sum_{k=3}^{9}2^k=\frac{2^3(2^7-1)}{2-1}=2^{10}-8,$$

$a_{10}=-1024$ 이어야 한다.

따라서

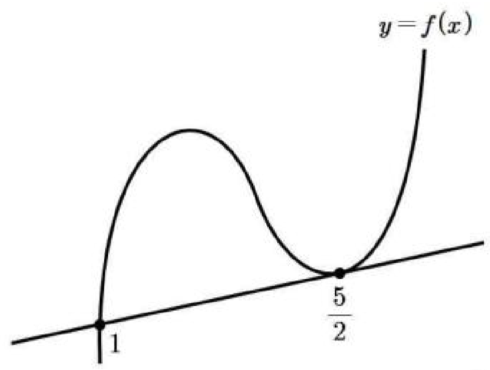
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=(-2)+2^3+2^5+2^7+2^9=678$

22) [정답] 13

주어진 (가) 조건을 정리하면 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$이다.

즉, $(1, f(1))$과 $(x, f(x))$의 기울기(평균변화율)가 $x$좌표가 $g(x)$인 점에서의 접선의 기울기(순간변화율)와 같다.

이 때, $g(x)$의 최솟값이 $\frac{5}{2}$이므로 아래 그림과 같이 $x=1$에서 오른쪽 반대편(변곡점 너머)으로 그린 접선의 접점이 $x=\frac{5}{2}$라 할 수 있다.




이제 (다) 조건과 삼차 함수의 비율 관계 또는 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 구하자. 근과 계수의 관계를 활용해보면, $f(x)$와 접선의 세 근의 합이 $1+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=6$이고 $f(0)=-3$이므로,

변곡점은 $x=2$, $f(x)=x^3-6x^2+ax-3$ 이다.

마지막으로 $f(x)$가 다항함수이고, $g(x)$도 연속함수이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=f'(g(1))$이다.

$g(1)\ne1$이기에 $g(1)=3$이고($x=2$에 대칭), 따라서 $f(3)=6$이다.

위 식에 대입하면 $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

$\therefore\ f(4)=13$