[수학2] [04부정적분, 정적분] 교사평경 최근 3개년

04 수2 07 부정적분

02 부정적분의 계산

03 부정적분의 계산3 (도함수로 표현된 함수의 부정적분)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 23

1. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x+5$이고 $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 23

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x^3+x,\ f(0)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 25

3. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=4x^3+4x+1$이다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 23

4. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = -x^3 + 3, \quad f(2) = 10$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 5

5. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 2x + 4$이고

$f(-1) + f(1) = 0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 2

6. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 17

7. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고

$f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 17

8. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 5

9. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이고 $f(0)=-2$, $f(1)=1$일 때, $f(2)$의 값은?
(단, a는 상수이다.)

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 17

10. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+6x-4$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 6

11. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-kx+1,\quad f(0)=f(2)=1$$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 17

12. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 17

13. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 17

14. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

15. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

04 수2 07 부정적분

02 부정적분의 계산

04 부정적분의 계산4 (구간정의함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 18

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

04 함수 구하기4 (미분과 적분)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 18

17. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

07 함수 구하기7 (도함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 22

18. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

19. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다.
(나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

04 수2 07 부정적분

03 부정적분의 활용

09 활용2 (함수의 상황)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

20. 0이 아닌 실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=3(x-k)(x-2k)$이다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1\text{또는 } x \ge 4) \\ \dfrac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1<x<4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha \le k < \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

02 정적분의 성질2 (정적분의 계산)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 22

21. $\int_0^3 x^2 dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 4

22. $\int_0^1 (3x^2+2)dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 2

23. $\int_{0}^{1}(2x+3)dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 2

24. $\int_{0}^{3}(x+1)^2dx$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 2

25. $\int_{0}^{2}(2x^3+3x^2)dx$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

04 정적분의 성질4 (적분구간이 같은 경우)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 24

26. $\int_{1}^{3}(4x^3-6x+4)dx+\int_{1}^{3}(6x-1)dx$의 값을 구하시오.

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

05 정적분의 성질5 (피적분함수가 같은 경우)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 5

27. $\int_{5}^{2}2tdt-\int_{5}^{0}2tdt$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

10 계산과 해석3 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 19

28. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
> (나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다.
> (다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x \ge 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가
모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서
선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치할 때, $\int_1^{11} f(x)dx$의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150
④ 155 ⑤ 160

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 9

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

①-4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

04 수2 08 정적분

01 정적분의 계산

13 계산과 해석6 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 20

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 15

31. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=\vert f'(x)\vert -f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

32. 실수 p에 대하여 곡선 $y=x^3-x^2$과 직선 $y=px-1$의 교점의 x좌표 중 가장 작은 값을 m이라 하자. $m<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-x^2-px+1)dx>0$$

이 되도록 하는 m의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 12

33. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{a}^{b}(x^3-3x+k)dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

34. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x\le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p\ge 2$일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)dx\ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

35. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

> (가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $n<\int_{0}^{n} g(x)dx<n+16$ 이다.

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

01 여러가지 함수의 정적분1 (우함수와 기함수의 계산)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 4

36. $\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)dx$ 의 값은?

① -16 ② -8 ③ 0
④ 8 ⑤ 16

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 2

37. $\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=4$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 17

38. $\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$의 값을 구하시오.

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

03 여러가지 함수의 정적분3 (우함수와 기함수의 활용)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 14

39. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$

(나) $f(0)=-1$

$\int_{-3}^{3}f(x)dx$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

06 여러가지 함수의 정적분6 (주기함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 28

40. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26}f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 11

41. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2}g(x)dx$의 값은?

(가) $g(x)=\begin{cases}-f(x+1)+1 & (-1<x<0)\\ f(x) & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{17}{6}$　③ $\frac{19}{6}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{23}{6}$

04 수2 08 정적분

02 여러가지 함수의 정적분

07 여러가지 함수의 정적분7 (함수 구하기)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 5

42. 사차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖고, $f(x)$가 x^3으로 나누어떨어질 때, $\int_0^2 f(x-1)dx$의 값은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$

④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

01 정적분 전체를 치환하는 유형

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 16

43. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)dt$

(나) $g(0)-\int_0^1 g(t)dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$

④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 17

44. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 16

45. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3-4x\int_0^1 |f(t)|dt$$

를 만족시킨다. $f(1)>0$일 때, $f(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수1 (적분함수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 7

46. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x} f(t)dt = x^3 + ax - 3$$

을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 16

47. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3xf(x) = 9\int_{1}^{x} f(t)dt + 2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 11

48. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

04 정적분으로 정의된 함수3 (정적분의 기본정리)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

49. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x \left(f(t)+t^2+2at-3\right)dt\right\}$$
$$=\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}\left(2f(t)-3t+7\right)\right\}dt$$

(나) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=6$

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

05 활용1 (극한)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

50. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

이다. $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{x-1}=2$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 13

51. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=3$$

을 만족시킬 때, $\int_{1}^{2}(4x+1)f(x)dx$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

06 활용2 (극대와 극소)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 20

52. 실수 a $(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$라 하자. 함수

$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$가 오직 하나의 극값을

갖도록 하는 a의 최댓값은?

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 20

53. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여

함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 20

54. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의

값을 구하시오.

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

07 활용3 (최대와 최소)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

55. 함수

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1\le x<0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

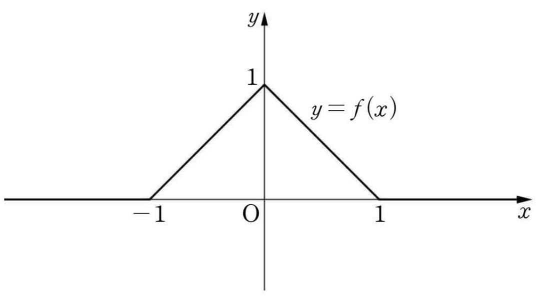
에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\{2x-f(t)\}dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{5}{12}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{12}$



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

56. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $\lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-n+1)(x-n)\rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{x}^{4} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

09 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 20

57. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)dx$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 20

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 22

59. 두 함수 $f(x)=-x^2+4x$, $g(x)=2x-a$에 대하여 함수 $h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$가 극솟값 3을 가질 때, $\int_0^4 h(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 30

60. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $\lvert g(x)-g(a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.
$f(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 22

61. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{\lvert f(t)\rvert-a\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 20

62. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

63. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 22

64. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 20

65. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{x} t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_{0}^{3}|f(x)|dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 15

66. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_{0}^{x} tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

10 활용6 (정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 30

67. 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{0}^{x}(t-1)f(t)dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t \to a+} h(t) - \lim_{t \to a-} h(t)\right| = 2$$

를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 30

68. $t \ge 6-3\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \ge 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다. (나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\int_2^4 \{6g(t)-3\}^2 dt$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

69. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

70. 실수 $t(0<t<3)$에 대하여 삼차함수

$$f(x)=2x^3-(t+3)x^2+2tx$$

가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 세 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(a,\ f(a))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $g(t)$라 하자.

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{g(t)} \int_0^a f(x)dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{13}{12}$ ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 14

71. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_{t}^{x} f(s)ds=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\lim_{t\to b} g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 08 정적분

03 정적분으로 정의된 함수

11 활용7 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 20

72. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.
ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt \geq 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 28

73. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 22

74. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_2^x (t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
(나) 곡선 $y=\lvert h(x)\rvert$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 15

75. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+5 & (x<c) \\ \left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 22

76. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.
>
> (나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

77. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}-\int_{0}^{x}f(t)dt & (x<0)\\ \int_{0}^{x}f(t)dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> <보 기>
>
> ㄱ. $f(0)=0$
>
> ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
>
> ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[수학2] [04부정적분, 정적분] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.28

1. [정답] **12**
2. [정답] 9
3. [정답] 27
4. [정답] 8
5. [정답] ③

6. [정답] ⑤
7. [정답] **8**
8. [정답] 4
9. [정답] ⑤
10. [정답] **17**

11. [정답] ①
12. [정답] 13
13. [정답] 16
14. [정답] 15
15. [정답] 15

16. [정답] 9
17. [정답] 9
18. [정답] 9
19. [정답] ②
20. [정답] ④

21. [정답] **9**
22. [정답] ③
23. [정답] ④
24. [정답] ④
25. [정답] ②

26. [정답] 86
27. [정답] ⑤
28. [정답] ②
29. [정답] ④
30. [정답] ③

31. [정답] ②
32. [정답] ②
33. [정답] ②
34. [정답] ⑤
35. [정답] 11

36. [정답] ①
37. [정답] ②
38. [정답] 24
39. [정답] ⑤
40. [정답] 12

41. [정답] ②
42. [정답] ①
43. [정답] ③
44. [정답] ①
45. [정답] ②

46. [정답] ⑤
47. [정답] ⑤
48. [정답] ④
49. [정답] ③
50. [정답] **21**

51. [정답] ⑤
52. [정답] ④
53. [정답] **8**
54. [정답] 13
55. [정답] ②

56. [정답] ②
57. [정답] ②
58. [정답] ②
59. [정답] 13
60. [정답] 432

61. [정답] 16
62. [정답] 110
63. [정답] ⑤
64. [정답] 30
65. [정답] 8

66. [정답] ①
67. [정답] **80**
68. [정답] 37
69. [정답] **56**
70. [정답] ⑤

71. [정답] ②

72. [정답] ⑤
73. [정답] 5
74. [정답] 251
75. [정답] ⑤

76. [정답] ④
77. [정답] ④

[수학2] [04부정적분, 정적분] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.28

1) [정답] 12

[해설]

주어진 식 $f'(x)=3x^2+4x+5$을 부정적분하면

$$f(x)=\int(3x^2+4x+5)dx=x^3+2x^2+5x+C$$

그런데, $f(0)=4$이므로 $C=4$

$$\therefore f(x)=x^3+2x^2+5x+4$$

$x=1$을 대입하면 $f(1)=12$

2) [정답] 9

[해설]

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(x^3+x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$이므로

$f(2)=4+2+3=9$

3) [정답] 27

[해설]

$f(x)=\int(4x^3+4x+1)dx$

$=x^4+2x^2+x+C$(단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$

$f(2)=16+8+2+1=27$

4) [정답] 8

[해설]

$f(x)=\int(-x^3+3)dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+3x+C$

(단, C는 적분상수이다.)

$f(2)=-\frac{1}{4}\times2^4+3\times2+C=10$에서 $C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+8$이므로

$f(0)=8$

5) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=2x+4$에서

$f(x)=\int(2x+4)dx$

$=x^2+4x+C$(C는 적분상수)

$f(-1)+f(1)=0$에서

$(-3+C)+(5+C)=2C+2=0$

$C=-1$이므로 $f(x)=x^2+4x-1$

따라서 $f(2)=11$

6) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2-2x$을 x에 대하여 적분하면

$f(x)=x^3-x^2+C$

그런데, 조건에서 $f(1)=1$이므로

$f(1)=1-1+C=1,\ C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$이므로 $f(2)=8-4+1=5$

7) [정답] 8

[해설]

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(8x^3-12x^2+7)dx$

$=2x^4-4x^3+7x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^4-4x^3+7x+3$이므로

$f(1)=2-4+7+3=8$

8) [정답] 4

[해설]

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (3x^2+2x)dx$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

9) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=4x^3+ax$에서 $f(x)=x^4+\frac{a}{2}x^2+C$

$f(0)=-2$이므로 $f(0)=C=-2$ …… ㉠

$f(1)=1$에서 $f(1)=1+\frac{a}{2}+C=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $C=-2,\ a=4$

$f(2)=16+2\times2^2-2=22$

10) [정답] 17

[해설]

$f(x)=\int (3x^2+6x-4)dx$

$=x^3+3x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(1)=1+3-4+C=5,\ C=5$

$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$

따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

11) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^3-\frac{k}{2}x^2+x+1$

$f(2)=8-2k+2+1=1,\ \therefore k=5$

12) [정답] 13

[해설]

$f(x)=\int (6x^2-2x-1)dx$

$=2x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=2-1-1+C=3,\ C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

따라서 $f(2)=16-4-2+3=13$

13) [정답] 16

[해설]

$f'(x)=6x^2-4x+3$에서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$이다.

$f(1)=5$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$이다.

$f(2)=16$

14) [정답] 15

[해설]

$f(x)=\int (8x^3+6x^2)dx$

$=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

15) [정답] 15

[해설]

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (4x^3-2x)dx$

$=x^4-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=3$ 이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+3$ 이므로

$f(2)=16-4+3=15$

16) [정답] 9

[해설]

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

그런데 $F(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $C_1=C_2$

즉, $F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x\ge 0)\end{cases}$

그러므로 $F(2)-F(-3)=21$에서

$\left(\frac{4}{3}k+C_1\right)-(-9+C_1)=21$

따라서 $k=9$

[다른 풀이]

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(2)-F(-3)=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{2}=\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$$\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx$$
$$=\Big[-x^2\Big]_{-3}^{0}+k\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{2}$$
$$=9+\frac{4}{3}k=21$$

따라서 $k=9$

17) [정답] 9

[해설]

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$

$f(x)=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$(C는 적분상수)

$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$

따라서 $f(2)=6-12+15=9$

18) [정답] 9

[해설]

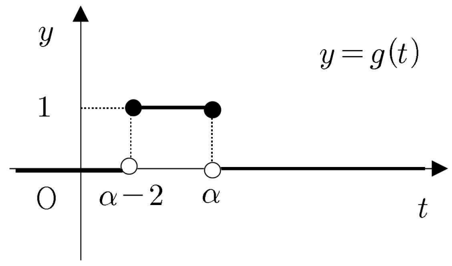
이차방정식 $f'(x)=0$이 근을 갖지 않는 경우에는

$g(t)=0$

이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 α를 갖는 경우에는 $y=g(x)$는 그림과 같다.



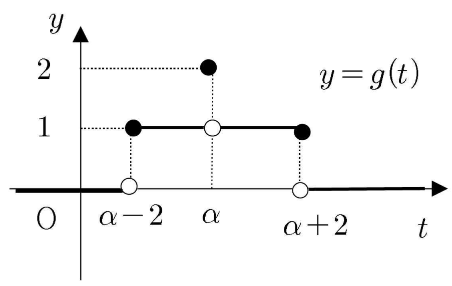
이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖는다.

(i) $\beta=\alpha+2$일 때,

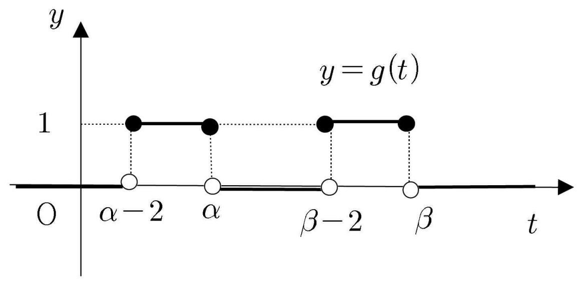
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

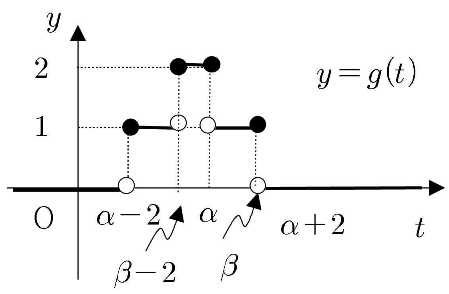


이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다. 이때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$

$9\alpha^2-27\alpha+18=0$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$

$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((i)-①) $\alpha=1$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=1$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((i)-②) $\alpha=2$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=2$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$

$8+C=2$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((i)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$

$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$

$$=9$$

19) [정답] ②

[해설]

조건 (나)에서 $f'(x)=ax(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면

조건 (가)에서 $f'(4)=-24$이므로

$f'(4)=12a=-24$에서 $a=-2$

따라서 $f'(x)=-2x(x-1)(x-3)=-2x^3+8x^2-6x$이므로

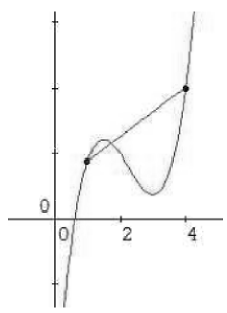
$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3-3x^2+2$ ($\because f(0)=2$)

$\therefore f(2)=\frac{10}{3}$

20) [정답] ④

[해설]

그래프가 그림과 같아야 한다.



$1\le k$, $f(1)<f(4)$

$f'(x)=3(x-k)(x-2k)$

$$f(x)=x^3-\frac{9}{2}kx^2+6k^2x+C$$

$$f(4)-f(1)=(64-72k+24k^2)-\left(1-\frac{9}{2}k+6k^2\right)$$

$$=18k^2-\frac{135}{2}k+63$$

$$=\frac{9}{2}(4k^2-15k+14)$$

$$=\frac{9}{2}(k-2)(4k-7)>0$$

$\therefore\ 1\le k<\frac{7}{4},\ \beta-\alpha=\frac{3}{4}$

21) [정답] 9

[해설]

$$\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$$

22) [정답] ③

[해설]

$$\int_0^1(3x^2+2)dx=\left[x^3+2x\right]_0^1$$

$=(1+2)-(0+0)=3$

23) [정답] ④

[해설]

$$\int_0^1(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=1+3=4$$

24) [정답] ④

[해설]

$$\int_0^3(x+1)^2dx=\int_0^3(x^2+2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^3$$

$$=21$$

25) [정답] ②

[해설]

$$\int_0^2(2x^3+3x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=16$$

26) [정답] 86

[해설]

$$\int_1^3(4x^3-6x+4)dx+\int_1^3(6x-1)dx$$

$$=\int_1^3(4x^3+3)dx=\left[x^4+3x\right]_1^3=86$$

27) [정답] ⑤

[해설]

$$\int_5^2 2tdt-\int_5^0 2tdt=\int_5^2 2tdt+\int_0^5 2tdt$$

$$=\int_0^5 2tdt+\int_5^2 2tdt=\int_0^2 2tdt$$

$$=\left[t^2\right]_0^2=4$$

28) [정답] ②

[해설]

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$이고

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$

및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$$

$$=b_n+b_{n+1}$$

$a_1=1,\ a_6=11$이므로

$$\int_1^{11}f(x)dx=\int_{a_1}^{a_6}f(x)dx$$

$$=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$

$$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$$

조건(다)에 의하여

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}a_{n+1},\ b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$$

$b_1=1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$

$b_3=b_2+a_3=a_1+a_2+a_3=9$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4=16$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$

$b_6=b_5+a_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$

따라서

$$\int_1^{11} f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$
$$= (1+4)+(4+9)+(9+16)+(16+25)+(25+36)$$
$$= 145$$

29) [정답] ④

[해설]

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(1)=f(2)=k$(k는 상수)

$f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

따라서 $f'(1)=-1$

30) [정답] ③

[해설]

$\{f(x)-g(x)\}^2$

$=\{f(x)+g(x)\}^2-4f(x)g(x)$

$$\begin{array}{c|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 13 & -12 & 4 \\ & & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 8 & -4 & 0 \\ & & 1 & -4 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & -4 & 4 & 0 & \\ & & 2 & -4 & & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & & \end{array}$$

$=(x^2+3x)^2-4(x^2+1)(3x-1)$

$=(x^4+6x^3+9x^2)$

$-(12x^3-4x^2+12x-4)$

$=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

$=(x-1)^2(x-2)^2$

조건 (가)에서 $f(x)-g(x)\geq 0$이므로

$f(x)-g(x)=|(x-1)(x-2)|$

$$=\begin{cases} x^2-3x+2 & (x<1\text{또는 } x>2) \\ -x^2+3x-2 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$$

조건 (나)에서 $f(x)+g(x)=x^2+3x$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}\right]$$

$$=\begin{cases} x^2+1 & (x<1\text{또는 } x>2) \\ 3x-1 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 (3x-1)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}+1\right)+\left\{(6-2)-\left(\frac{3}{2}-1\right)\right\}=\frac{29}{6}$$

31) [정답] ②

[해설]

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$

$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

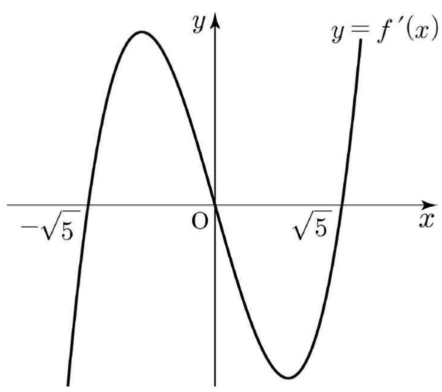
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$f(0)=9$, $C=9$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

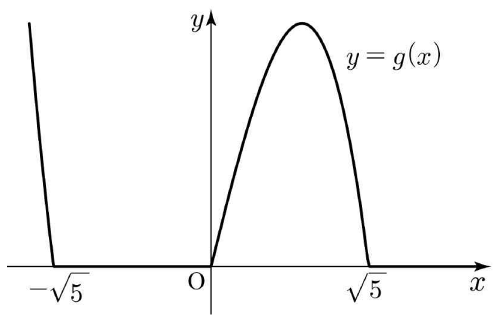
$\alpha=-\sqrt{5}$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로

함수 $g(x)=\begin{cases} 0 & (f'(x)\geq 0) \\ -2f'(x) & (f'(x)<0) \end{cases}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



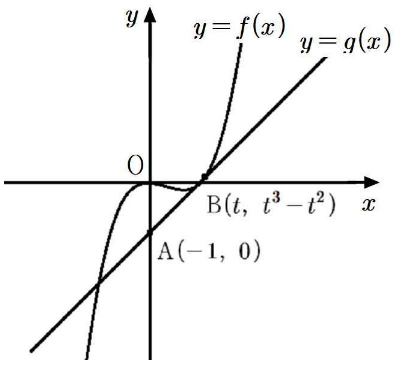
$$\int_0^{10} g(x)dx = -2\int_0^{\sqrt{5}} f'(x)dx$$
$$= -2\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{5}}$$
$$= -2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$$

$=-2\times(-16-9)$

$=50$

32) [정답] ②

[해설]



직선 AB의 기울기와 점 B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용하여 t를 구하면

$$\frac{t^3-t^2+1}{t}=f'(t)=3t^2-2t$$

$$2t^3-t^2-1=(t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1$$

즉, $p=1$이므로 $x^3-x^2=x-1$을 정리하면,

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-1$$

따라서 $m=-1$

33) [정답] ②

[해설]

$x\geq 0$일 때 $f(x)=x^3-3x+k\geq 0$

$f'(x)=3x^2-3$, $x=1$에서 극솟값(최솟값)이므로

$f(1)=-2+k\geq 0$, $\therefore k\geq 2$

따라서 구하는 k의 최솟값은 2이다.

34) [정답] ⑤

[해설]

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$이므로 $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=x^3-3x^2+C\ (C\text{ 는 적분상수})$$

따라서 $f(x)-f(0)=x^3-3x^2$이고

$$f(x+p)-f(p)$$

$$=(x+p)^3-3(x+p)^2+C-(p^3-3p^2+C)$$

$$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\leq 0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\leq 0)\\ x^3-3x & (x>0)\end{cases}\text{이므로}$$

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x<0)\\ 3x^2-3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to 0-}g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$

$$\lim_{x\to 0+}g'(x)=\lim_{x\to 0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}$$

$$=3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $3p^2-6p=0$이어야 한다..

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다.

(참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)$$

$$=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$

$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$

따라서 $p \geq 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

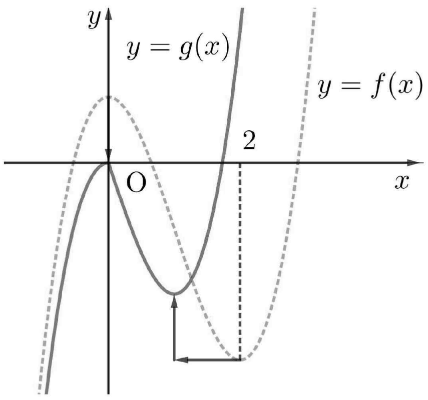
[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

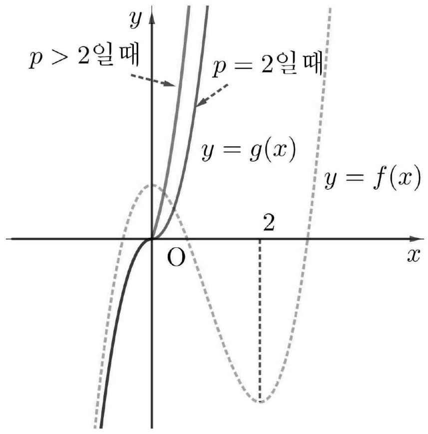
이때, 곡선 $=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
이때 $\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to 0+} g'(x)=0$이어야 한다.
그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다. 따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \geq 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$

$p>2$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)-f(p) \geq f(x+2)-f(2)$이므로

$\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$

따라서 $p \geq 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

35) [정답] 11

[해설]

조건 (가)에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점을 구하면

$f(x)=f(x)+|f(x)-1|$

$\therefore f(x)=1$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족하는 서로 다른 실근의 합이 3이다.

문제에서 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이므로 ㉠은 $x=1$을 중근으로 가지므로 다른 한 근은 2이다.

$\therefore f(x)=a(x-1)^2(x-2)+1$

조건 (나)에서

$0<\int_{0}^{n} g(x)dx-n<16$, 즉

$0<\int_{0}^{n}\{g(x)-1\}dx<16$ …… ㉠

을 만족해야 한다.

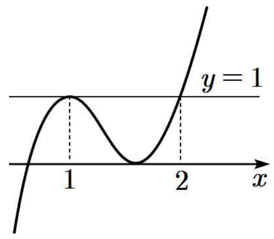
$g(x)=\begin{cases}2f(x)-1 & (f(x)\geq 1)\\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$에서

$g(x)-1=\begin{cases}2f(x)-2 & (f(x)\geq 1)\\ 0 & (f(x)<1)\end{cases}$

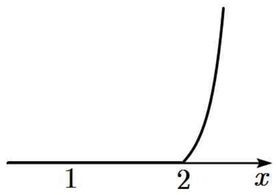
$=\begin{cases}2a(x-1)^2(x-2) & (f(x)\geq 1)\\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$

함수 $g(x)-1$의 그래프의 개형은 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 다음 두 가지가 가능하다.

(i) $a>0$일 때

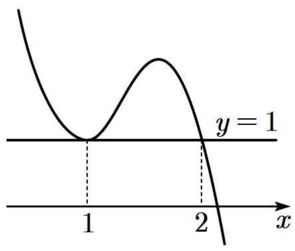


$y=f(x)$

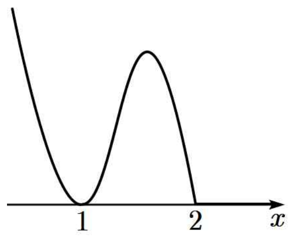


$y=g(x)-1$

(ii) $a<0$일 때



$y=f(x)$



$y=g(x)-1$

(i)의 경우는 $n=1$일 때, $\int_0^n \{g(x)-1\}\,dx=0$이므로 ㉠을 만족하지 않는다.

(ii)에서 ㉠을 만족하기 위해서는 $n=2$일 때만 만족하면 되므로

$$\int_0^2 \{g(x)-1\}\,dx=\int_0^2 2a(x-1)^2(x-2)\,dx$$
$$=2a\int_0^2 \{(x-1)^3-(x-1)^2\}\,dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2$$
$$=-\frac{4}{3}a$$

따라서 ㉠에서 $0<-\frac{4}{3}a<16$, $-12<a<0$이므로 정수 a는 11개이고, 함수 $f(x)$의 개수도 11개다.

36) [정답] ①

[해설]

$$\int_2^{-2}(x^3+3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_2^{-2}$$
$$=(4-8)-(4+8)$$
$$=-16$$

37) [정답] ②

[해설]

$$\int_{-1}^1 (x^3+a)dx=2\int_0^1 a\,dx=2a=4$$

$\therefore a=2$

38) [정답] 24

[해설]

$$\int_{-3}^2 (2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(2x^3+6|x|)dx+\int_{-2}^2 (2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 (2x^3+6|x|)dx$$
$$=2\int_0^2 6x\,dx=2\Big[3x^2\Big]_0^2=24$$

39) [정답] ⑤

[해설]

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수)라 하면

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$

이고 k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^3 x^k dx=0$이므로

$$\int_{-3}^3 f(-x)dx=\int_{-3}^3 f(x)dx$$

조건(가)에 의하여

$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로

$a=0$

조건 (나)에 의하여

$f(0)+f(0)=-2=b$

그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$

$$\int_{-3}^3 \{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-3}^3 f(x)dx+\int_{-3}^3 f(-x)dx$$
$$=2\int_{-3}^3 f(x)dx$$

따라서

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^3 \{f(x)+f(-x)\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^3 (3x^2-2)dx$$
$$=21$$

40) [정답] 12

[해설]

모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)+x^2-1\}^2 \geq 0$, $f(x) \geq 0$이므로

정적분 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가

되기 위해서는

(i) $-1 \leq x \leq 1$에서

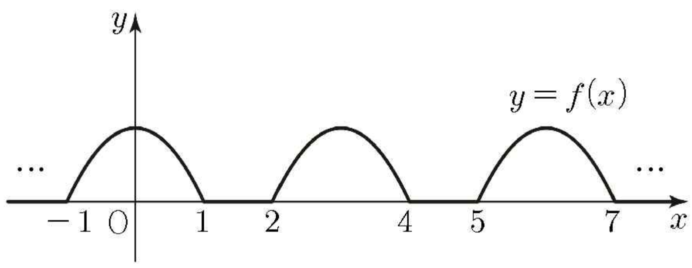
$x^2-1 \leq 0$이므로 $f(x)=-(x^2-1)=-x^2+1$

(ii) $1 < x \leq 2$에서

$x^2-1>0$이므로 $f(x)=0$

$f(x+3)=f(x)$이고, (i), (ii)에 의하여

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{5}f(x)dx=\int_{5}^{8}f(x)dx$$

$$=\cdots=\int_{23}^{26}f(x)dx$$

따라서 $\int_{-1}^{26}f(x)dx=9\int_{-1}^{2}f(x)dx$

$$=9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=12$$

41) [정답] ②

[해설]

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후,

x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼

평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$이므로

$$\int_{-3}^{2}g(x)dx=\int_{-3}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{2}g(x)dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{0}g(x)dx$$

$$=2\times1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

42) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 가지므로

$f(1)=2$, $f'(1)=0$

사차함수 $f(x)$가 x^3으로 나누어떨어지므로

$f(x)=x^3(ax+b)$로 놓을 수 있다.

미분하면 $f'(x)=4ax^3+3bx^2$이다.

$f(1)=2$에서 $a+b=2$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서 $4a+3b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-6$, $b=8$

$\therefore f(x)=x^3(-6x+8)=-6x^4+8x^3$

$\int_{0}^{2}f(x-1)dx$에서 함수 $f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼

평행이동하면

$$\int_{0}^{2}f(x-1)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{0}^{2}f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-6x^4+8x^3)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-6x^4)dx$$

$$=\left[-\frac{12}{5}x^5\right]_0^1$$

$$=-\frac{12}{5}$$

43) [정답] ③

[해설]

$\int_{0}^{1}g(t)dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(나)에서 $C-\int_{0}^{1}(t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)dt = a$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + Ct\right]_0^1 = -1$

즉, $C = -\frac{1}{3}$이므로 $g(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{3}$

따라서 $g(1) = 1 - 2 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

44) [정답] ①

[해설]

$\int_0^1 f(t)dt = k$(k는 상수)로 놓으면

$f(x) = 4x^3 + kx$

이때

$k = \int_0^1 (4t^3 + kt)dt$

$= \left[t^4 + \frac{k}{2}t^2\right]_0^1$

$= 1 + \frac{k}{2}$

이므로 $k = 2$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$이므로

$f(1) = 4 + 2 = 6$

45) [정답] ②

[해설]

$a = \int_0^1 |f(t)|dt$라 하면 $a > 0$이고

$f(x) = x^3 - 4ax$

$f(1) = 1 - 4a > 0$에서 $a < \frac{1}{4}$

따라서 $0 < a < \frac{1}{4}$이다.

$f(x) = x(x^2 - 4a) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \pm 2\sqrt{a}$

$0 < x < 2\sqrt{a}$일 때 $f(x) < 0$이고 $x \geq 2\sqrt{a}$일 때

$f(x) \geq 0$이다.

$0 < a < \frac{1}{4}$에서 $2\sqrt{a} < 1$이므로

$a = \int_0^{2\sqrt{a}} \{-f(t)\}dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$

$= \int_0^{2\sqrt{a}} (-t^3 + 4at)dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 (t^3 - 4at)dt$

$= \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$

$= 8a^2 - 2a + \frac{1}{4}$

$8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 0$에서

$32a^2 - 12a + 1 = 0$, $(4a-1)(8a-1) = 0$

$0 < a < \frac{1}{4}$이므로 $a = \frac{1}{8}$이고

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$

이때, $f(2) = 2^3 - \frac{1}{2} \times 2 = 7$

46) [정답] ⑤

[해설]

$x = 1$을 대입하면 $0 = 1 + a - 3$, $a = 2$

미분하면 $f(x) = 3x^2 + a = 3x^2 + 2$

$\therefore$ $f(a) = f(2) = 12 + 2 = 14$

47) [정답] ⑤

[해설]

$3xf(x) = 9\int_1^x f(t)dt + 2x$의 양변에 $x = 1$을 대입하면

$3f(1) = 0 + 2$, $f(1) = \frac{2}{3}$

$3xf(x) = 9\int_1^x f(t)dt + 2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3\{f(x) + xf'(x)\} = 9f(x) + 2$

$x = 1$을 대입하면

$3\{f(1) + f'(1)\} = 9f(1) + 2$

$3f'(1) = 6f(1) + 2 = 6 \times \frac{2}{3} + 2 = 6$

따라서 $f'(1) = 2$

48) [정답] ④

[해설]

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x = 1$을 대입하면

$f(1) = 2 + a + 3a + 0 = 4a + 2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$0 = 3a + \int_1^0 f(t)dt = 3a - \int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=3a \cdots\cdots$ ㉢

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$4a+2=3a$

따라서 $a=-2$이고 $f(1)=-6$이다.

$xf(x)=2x^3-2x^2-6+\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-4x$

$f'(x)=6x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x-4)dx$

$=3x^2-4x+C$(단, C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서 $C=-5$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-5$이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

49) [정답] ③

[해설]

조건 (가)로부터

$f(x)+x^2+2ax-3$

$=2f(x)-3x-\{2f(1)-3\}$

$=2f(x)-3x-2f(1)+3$

$\therefore f(x)=x^2+(2a+3)x+2f(1)-6$

위 식에서 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+2a+3+2f(1)-6$

$\therefore f(1)=-2a-2$

$\therefore f(x)=x^2+(2a+3)x-4a-2$

조건 (나)로부터

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-\frac{f(3-h)-f(3)}{h}\right]$

$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right]$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

$2f'(3)=6$이므로 $f'(3)=3$

$\therefore f'(x)=2x+2a+3$

즉, $f'(3)=2a+9=3$이므로 $a=-3$

50) [정답] 21

[해설]

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=2$ 에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$ 이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2$

$g(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$에서 $x=-1$을 대입하면 $g(-1)=0$

양변을 미분하면 $g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^x f(t)dt=f(x)$

그런데, $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고

$g(1)=0,\ g(-1)=0,\ g'(1)=2$이므로

$g(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x+1)(x-\alpha)$

$=\frac{1}{3}\{(x^2-1)(x-\alpha)\}$

양변을 미분하면

$g'(x)=\frac{1}{3}\{2x(x-\alpha)+(x^2-1)\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로

$g'(1)=\frac{1}{3}\{2\times 1\times(1-\alpha)+(1-1)\}$

$=\frac{1}{3}\{2-2\alpha\}=2$

즉, $2\alpha=-4$이므로 $\alpha=-2$

㉠에 대입하면

$g'(x)=\frac{1}{3}\{2x(x+2)+(x^2-1)\}$

$=x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore f(4)=4^2-\frac{4}{3}\times 4-\frac{1}{3}=21$

51) [정답] ⑤

[해설]

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$라 하자.

함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x(x-t)f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)}{x-2}=3$에서

$G(2)=0,\ G'(2)=3$

$G(x)=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$에서

$G'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$G'(2)=\int_1^2 f(t)dt=3$

$G(2)=2\int_1^2 f(t)dt-\int_1^2 tf(t)dt=0$에서

$\int_1^2 tf(t)dt=2\int_1^2 f(t)dt=6$

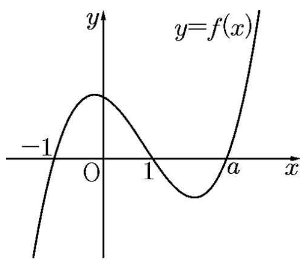
따라서

$$\int_1^2(4x+1)f(x)dx=4\int_1^2 xf(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=4\times6+3=27$$

52) [정답] ④

[해설]

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$의 양변을 미분하면

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt-x^2f(x)+x^2f(x)$$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

(ⅰ) $0<x<1$일 때,

$2x>0$, $\int_0^x f(t)dt>0$이므로 $g'(x)>0$

(ⅱ) $-1<x<0$일 때,

$2x<0$, $\int_0^x f(t)dt<0$이므로 $g'(x)>0$

따라서 $x=0$에서 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(ⅲ) $x<-1$인 경우

$\int_0^x f(t)dt$의 값이 $x<-1$인 어떤 점에서 $g'(x)$가 $-$에서 $+$으로 바뀌는 극솟값을 갖게 된다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(x)$가 극값을 1개 가지므로 $x>1$인 경우에 극값을 갖지 않아야 한다.

즉 $x>1$에서 항상 $\int_0^x f(t)dt\ge0$이 성립해야 하므로 최대가 되는 a의 값은 $\int_0^1 f(x)dx=-\int_1^a f(x)dx$일 때이다.

즉, $\int_0^a f(x)dx=0$이 성립할 때 a가 최대가 된다.

$$\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{2}a^2+a^2$

$=a^2(a^2-6)=0$

$\therefore a=0,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6}$

그런데 $a>1$이므로 $a=\sqrt{6}$

53) [정답] 8

[해설]

$$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$$
$$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

양변을 미분하면

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+f(x)\times\{f(x)\}^4-\{f(x)\}^5$$
$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$
$$=(3x^2-24x+45)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$
$$=3(x-3)(x-5)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$

$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $\int_a^x\{f(t)\}^4dt=0$

그런데 조건에서 극값이 오직 하나이므로 $g'(x)=0$의 근은 오직 하나이어야 한다.

즉, $\int_a^x\{f(t)\}^4dt=0$이 $x=3$ 또는 $x=5$를 반드시 근으로 가져야 한다. 즉, $\int_a^3\{f(t)\}^4dt=0$ 또는 $\int_a^5\{f(t)\}^4dt=0$가 성립해야 한다.

따라서 $a=3$ 또는 $a=5$

즉, 만족하는 모든 a값의 합은 8이다.

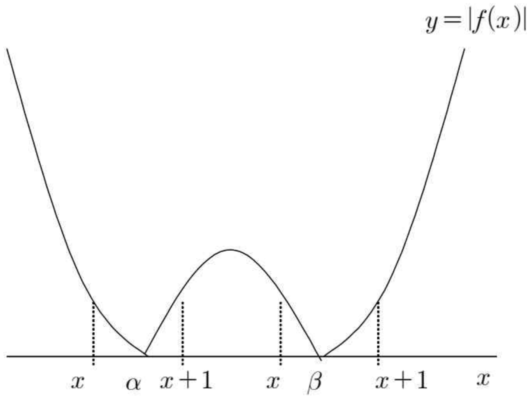
54) [정답] 13

[해설]
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_{x}^{x+1}f(t)dt$

이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.
따라서 조건을 만족시키지 못한다.
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고
$x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_{x}^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$=-6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_{x}^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}f(t)dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt+\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(4)=2(4-\alpha)(4-\beta)+2(5-\alpha)(5-\beta)$

$=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha\beta=\frac{13}{2}$이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

55) [정답] ②

[해설]

$g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\{2x-f(t)\}dt$

$=2x\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{-1}^{x}\{f(t)\}^2dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}f(t)dt+2xf(x)-\{f(x)\}^2$

(i) $x<-1$일 때,

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}0dt+2x\cdot 0-\{0\}^2=0$

(ii) $-1\leq x<0$일 때,

$g'(x)=2\int_{-1}^{x}(1+t)dt+2x(1+x)-(1+x)^2$

$=\left[(1+t)^2\right]_{-1}^{x}+x^2-1$

$=(1+x)^2+x^2-1$

$=2x^2+2x$

$=2x(x+1)$

(iii) $0\leq x<1$일 때,

$g'(x)=2\left\{\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt\right\}$
$+2x(1-x)-(1-x)^2$

$=1-\left[(1-t)^2\right]_{0}^{x}-3x^2+4x-1$

$=-(1-x)^2+1-3x^2+4x$

$=-4x^2+6x$

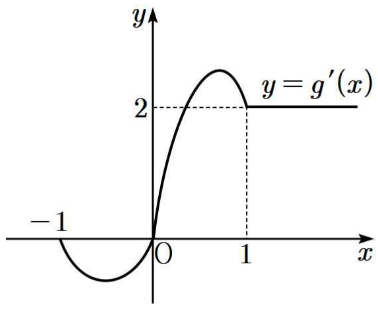
$=-2x(2x+3)$

(iv) $x\geq 1$일 때,

$$g'(x)=2\left\{\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x}0dt\right\}+2x\cdot 0-(0)^2$$

$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2$$

따라서 $y=g'(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 $x=0$일 때, 극소이면서 최소가 되므로 최솟값은 $g(0)$이다.

$$\therefore g(0)=2\cdot 0\cdot\int_{-1}^{0}(1+t)dt-\int_{-1}^{0}(1+t)^2dt$$

$$=0-\left[\frac{1}{3}(1+t)^3\right]_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

56) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1\le x\le n$일 때,

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는

$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$

열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

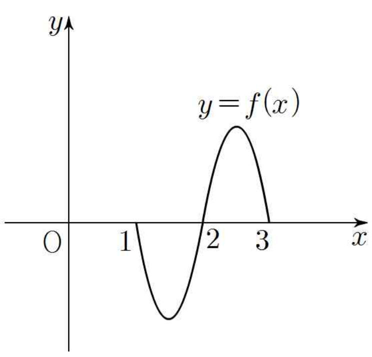
$g(2)=0,\ g'(2)=0$

$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{4}f(t)dt$에서

$g'(x)=2f(x)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $x=2$에서 극솟값을 가져야 한다.

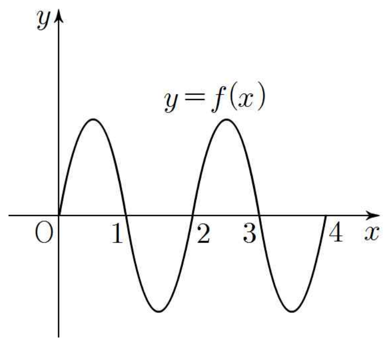
따라서 $1\le x<3$에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=\int_{0}^{2}f(t)dt-\int_{2}^{4}f(t)dt=0$에서

$$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{2}^{4}f(t)dt$$

따라서 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{4}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\{-6x(x-1)\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(6x^2-6x)dx$$

$$=\left[2x^3-3x^2\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

57) [정답] ②

[해설]

$$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다.

즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$

사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값을 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다.

즉, $a=0$

$$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$$

따라서 $\int_0^1 g'(x)dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

58) [정답] ②

[해설]

$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt+f(0)=0+f(0)$

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2은 $f(x)$의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$(단, k는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$

$=x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

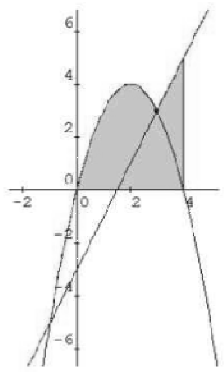
$=x^3+(a+3)x^2+2ax$

조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f(2)=8-12=-4$

59) [정답] 13

[해설]



$f(x)=f(x)(f(x)>=g(x))$

$g(x)(f(x)<g(x))$

3이 극솟값이면 그림과 같이 직선 $g(x)=2x-a$는 점 $(3, 3)$을 지난다

따라서 $a=-3$

$$\int_0^4 h(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x)dx+\int_3^4(2x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$$

$$=13$$

60) [정답] 432

[해설]

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x)=\int_t^x f(s)ds$는 최고차항의 계수가 1인

사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$는 미분가능하다.

$g(x)\ge g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)g(x)<g(a)$일 때,

$|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$은 $g(x)-g(a)\neq 0$인

모든 x에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$를 만족시키는 x의 값을 k라 하면,

$g(k)=g(a)$이므로

$$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

(i) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 같을 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르다고

$f(k)=0$일 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고,

$f(k)\neq 0$일 때,

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이므로 $g(x)-g(a)=0,\ g'(x)=f(x)\neq 0$

인 x가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

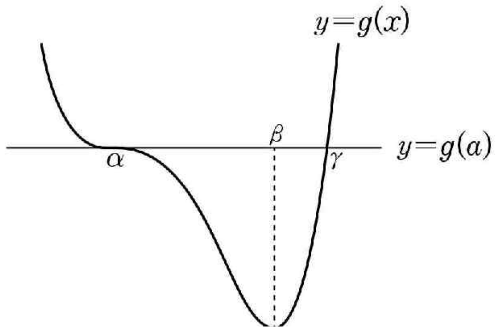
그러므로 사차함수 $y=g(x)$는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(a)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$인 방정식 $g(x)-g(a)=0$의 근을 α,

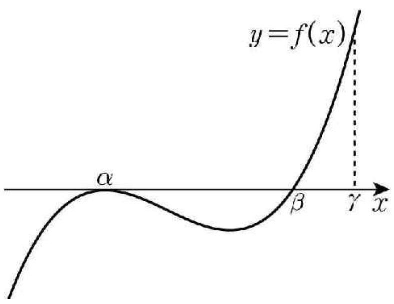
함수 $g(x)$가 극솟값을 가질 때의 x의 값을 β라

하면 α, β의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$이므로 $\alpha=a$이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$이다.

$$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds\text{에서}$$

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$이다.

$$a=2\text{이면 } h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0\neq 27$$

이므로 $a\neq 2$

$\beta=2$이면

$$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0\text{이고,}$$

$$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27\text{이므로}$$

$$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27\text{이다.}$$

$$\int_2^3 f(s)ds$$

$$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$

$$=\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$$

$$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$$

$$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$$

$$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27\text{ 이므로}$$

$3a^2-16a-19=0$

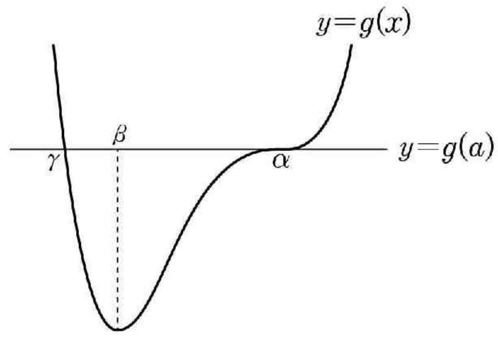
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\dfrac{19}{3}$

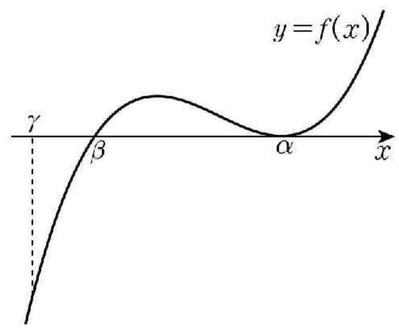
$a<2$이므로 $a=-1$이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$라 하면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$이므로 $\alpha=a$이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$이다.

$\alpha<\beta$인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$$a\neq 3\text{이면 } h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq 0\text{이므로 } a=3$$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq 27$이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수$f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$이다.

$f(5)=4\times 36\times 3=432$

61) [정답] 16

[해설]

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$에서 $x=-2$, $x=2$가 방정식 $g'(x)=0$의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$와 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$이므로 $g'(x)$, x^2-4, $|f(x)|-a$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert f(x)\rvert-a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)|-a$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$

두 실수 m, n에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$이라 하면 $m\neq 0$이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$가 성립한다.

(ⅰ) $2m+n=-2m+n$인 경우

$m=0$이 되어 모순이다.

(ⅱ) $2m+n=-(-2m+n)$인 경우

$n=0$이고 $|m|=\frac{a}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|f(x)|=|mx|=\frac{a}{2}|x|$

$g(2)=\int_0^2(t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$

$=\int_0^2(t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $|t|=t$이므로

$g(2)=\frac{a}{2}\int_0^2(t^2-4)(t-2)dt$

$=\frac{a}{2}\int_0^2(t^3-2t^2-4t+8)dt$

$=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2$

$=\frac{a}{2}\times\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)=\frac{10}{3}a$

조건 (나)에서 $g(2)=5$이므로 $\frac{10}{3}a=5$, $a=\frac{3}{2}$

$g(0)=\int_0^0(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt=0$이고

닫힌구간 $[-4, 0]$에서 $|t|=-t$이므로

$g(-4)=\int_0^{-4}(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\frac{3}{4}\int_0^{-4}(t^2-4)(-t-2)dt$

$=\frac{3}{4}\int_0^{-4}(-t^3-2t^2+4t+8)dt$

$=-16$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

62) [정답] 110

[해설]

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로 $0\leq x\leq 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\leq x\leq 2$일 때 $f(x)=x^2-x+1$이다.

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$

63) [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

라 하자.

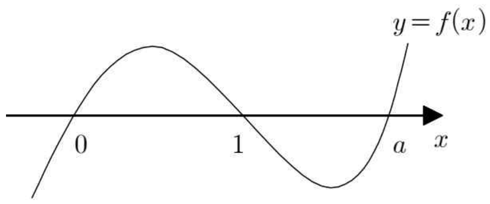
ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=0$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 |f(x)|dx$

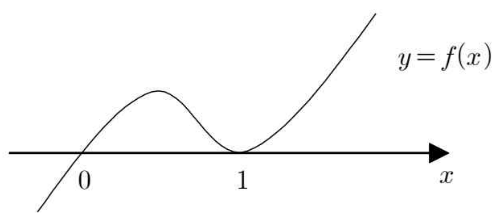
따라서 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \ge 0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a>1$일 때



(ii) $a=1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$\int_{-1}^0 f(x)dx<0$

이므로

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx<0$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $0 \le x \le 1$일 때, $f(x) \le 0$이므로

$$\begin{aligned} g(-1)&=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx \\ &=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx \\ &=\int_{-1}^1 f(x)dx \\ &=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-a)dx \\ &=\int_{-1}^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx \\ &=2\int_0^1 \{-(a+1)x^2\}dx \\ &=2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &=-\frac{2(a+1)}{3}>0 \end{aligned}$$

즉, $a<-1$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1)=-\frac{2(a+1)}{3}>1$에서 $a<-\frac{5}{2}$

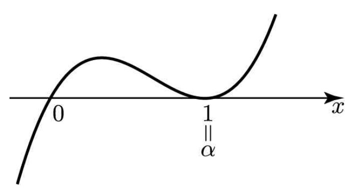
$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$이므로

$$\begin{aligned} g(0)&=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx \\ &=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx \\ &=2\int_0^1 f(x)dx \\ &=2\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx \\ &=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1 \\ &=2\left(\frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}\right) \\ &=\frac{1}{3}a-\frac{1}{6}<-1 \end{aligned}$$

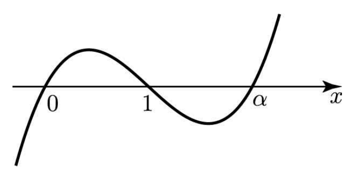
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=0$이므로 $f(x) \ge 0$이고 만족하는 경우는 [그림1]과 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

따라서 $1 \le \alpha$이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx<0$이고,

$\int_0^1 f(x)dx > 0$이다.

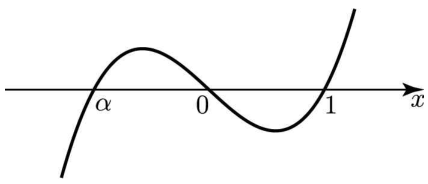
$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<0$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx>0$이면

$\int_{-1}^0 f(x)dx>0$이어야 하므로 만족하는 경우는 [그림3]과 같다.



[그림3]

$\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx$이므로 $\alpha < -1$이다.

따라서 $f(k)=0$인 $k=\alpha<-1$을 만족한다. (참)

ㄷ. $g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx>1$이므로

$f(x)=x(x-1)(x-k)=x^3-(k+1)x^2+kx$라 두면

$\int_{-1}^0 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_{-1}^0$

$=-\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}-\frac{k}{2}$

$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1\{-f(x)\}dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{k+1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\frac{1}{4}+\frac{k+1}{3}-\frac{k}{2}$

이므로

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=-\frac{2k+2}{3}>1$

즉, $2k+2<-3$이므로 $2k<-5$, $k<-\frac{5}{2}$

$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$

$=2\int_0^1 f(x)dx$

$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}+\frac{k}{2}\right)=-\frac{1}{6}+\frac{k}{3}$

$<-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-1$

이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

64) [정답] 30

[해설]

$g(x)=\int_0^x\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을

x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

0 또는 1 또는 2이다.

(ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\ge 0$

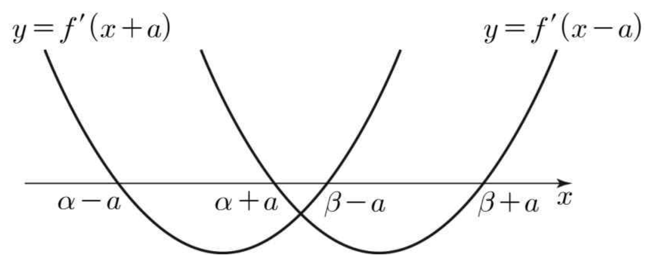
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

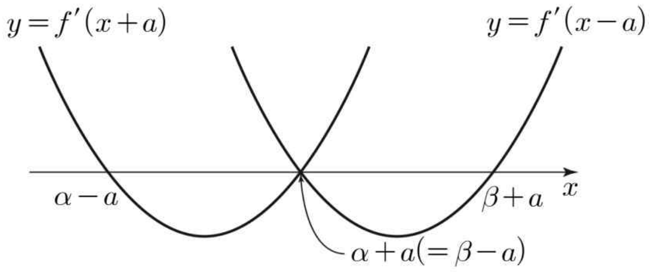
함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서

극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

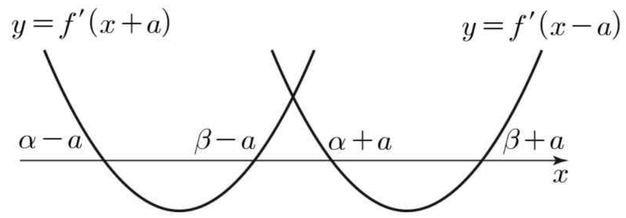
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$ 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\int(3x^2-21x+30)dx$

$=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$($C$는 적분상수)

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{21}{2}+30-\dfrac{1}{2}\right)=30$

65) [정답] 8

[해설]

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x)=ax^2(x-3)$(a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x)=ax(x-3)^2$(a는 상수)라 하면

$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

$g'(x)=f(x)$

$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$\int_0^3|f(x)|dx$

$=3\int_0^3|(x-1)(x-3)|dx$

$=3\int_0^1(x-1)(x-3)dx-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx$

$=3\left[\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$

$=3\left(\dfrac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\dfrac{1}{3}+2-3\right)=8$

66) [정답] ①

[해설]

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0,\quad p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

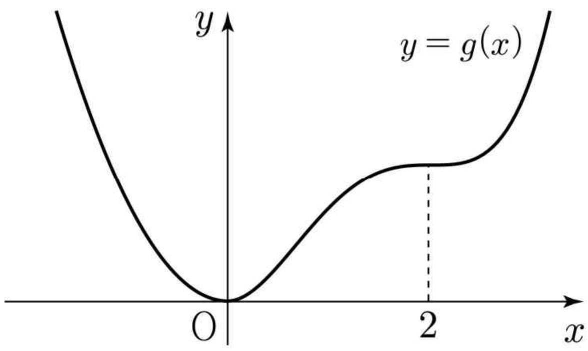
그러므로

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ \displaystyle\int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge 0)\end{cases} \quad g'(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우 방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.
함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0 x>2$일 때,

$h(x)=g(x)-g(2)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\displaystyle\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\dfrac{4}{3}$, $\gamma=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$$2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

67) [정답] 80

[해설]

$g(x)=\displaystyle\int_0^x(t-1)f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

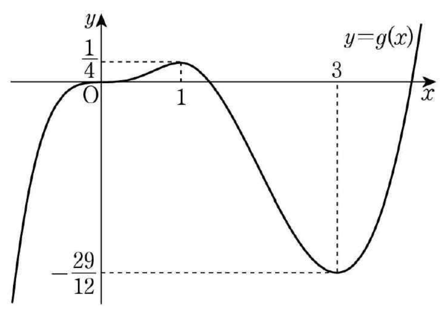
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$에서

$$C_2=-\frac{29}{12}$$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\dfrac{29}{12}\text{ 또는 }t>\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12}\text{ 또는 }t=\dfrac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\frac{1}{4}$과 $-\frac{29}{12}$뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고]

$g(x)=\int_0^x(t-1)f(t)dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,

$$g(x)=\int_0^x(t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ii) $x\ge1$일 때,

$$g(x)=\int_0^1(t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$$
$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$$

68) [정답] 37

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$,

$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$이므로 함수 $f(x)$는

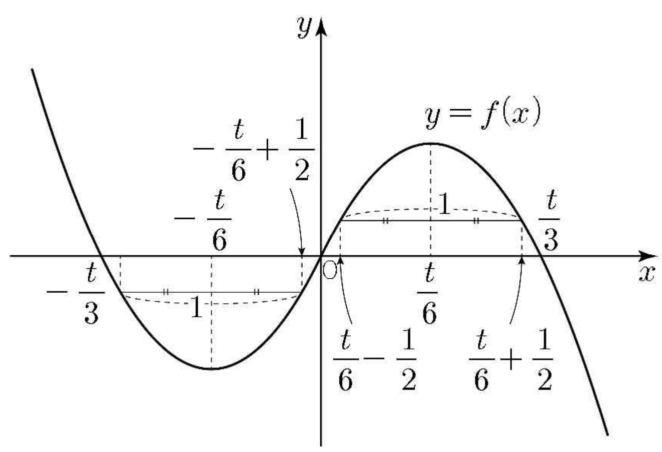
$x=-\frac{t}{6}$에서 극소, $x=\frac{t}{6}$에서 극대이다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\frac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{t}{3}$

$f_1(x)=3x^2+tx$, $f_2(x)=-3x^2+tx$라 하자.

(i) $\frac{t}{3}\ge1$인 경우 (즉, $t\ge3$)



조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1,k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$ …… ㉠

조건(나)에서 닫힌구간 $[k,k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로

조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

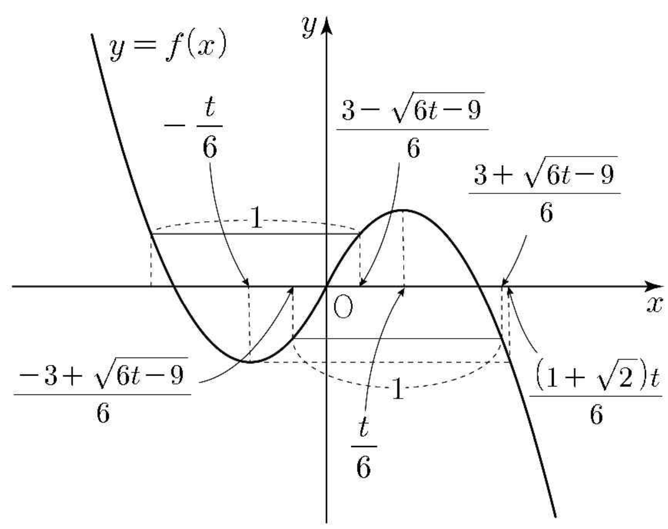
$k+1\le-\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

즉, $k\le-\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\frac{t}{6}-\frac{1}{2}$…… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\ge3$에서 조건(가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}=\frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right)=3\times\left(-\frac{t}{6}\right)^2+t\left(-\frac{t}{6}\right)=-\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은

x에 대한 방정식 $-3x^2+tx=-\dfrac{t^2}{12}$의

양의 실근인 $x=\dfrac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\geq 6-3\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\dfrac{t}{6}\right)$

$=\dfrac{(2+\sqrt{2})t}{6}\geq\dfrac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$

조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는

k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\leq t<3$에서

방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식

$3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$의 실근인

$k=\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\dfrac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이므로

조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\leq k\leq\dfrac{t}{6}$ …… ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이므로

조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\leq-\dfrac{t}{6}$ 또는 $k+1\geq\dfrac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k\leq-\dfrac{t}{6}-1$ 또는 $k\geq\dfrac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣ 에 의하여

$6-3\sqrt{2}\leq t<3$에서 조건(가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\leq k\leq\dfrac{t}{6}$이므로

$g(t)=\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\leq t<3)\\[2ex] \dfrac{t-3}{6} & (t\geq 3)\end{cases}$$

따라서

$3\displaystyle\int_2^4\{6g(t)-3\}^2dt$

$=3\displaystyle\int_2^3\left(6\times\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right)^2dt$

$+3\displaystyle\int_3^4\left\{6\times\left(\dfrac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2dt$

$=3\displaystyle\int_2^3(6t-9)dt+3\int_3^4(t-6)^2dt$

$=18+19$

$=37$

69) [정답] **56**

[해설]

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 함수

$g(x)=\displaystyle\int_0^x(x-2)f(s)ds$는 삼차함수이다.

$g(x)=(x-2)\displaystyle\int_0^x f(s)ds=0$에서 $g(2)=g(0)=0$이므로

$g(x)=0$의 세 근을 $x=0,\ 2,\ \alpha$라 하자.

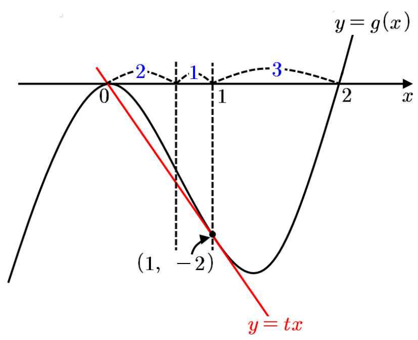
이때 $y=tx$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이므로 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속이기 위해서는 $y=g(x)$는 x축에 접해야 한다.

따라서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=2$이다.

(i) $g(x)=mx^2(x-2)$일 때

m이 양수일 때와 음수일 때를 나누어 $y=g(x)$와 $y=tx$를 그려보면 다음과 같다.

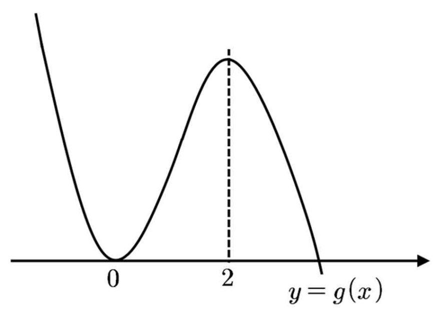
$m>0$일 때



이때의 t의 값은 -2가 되어야 하고 $y=g(x)$와 $y=tx$의 교점은 $(1,\ -2)$이다.

$\therefore g(x)=2x^2(x-2),\ g(4)=64$

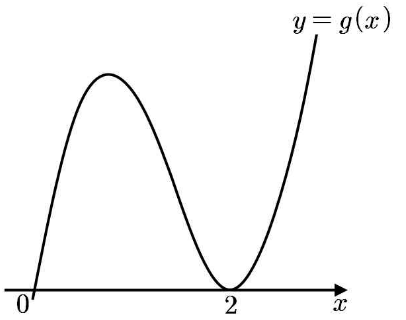
$m<0$일 때



$g(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

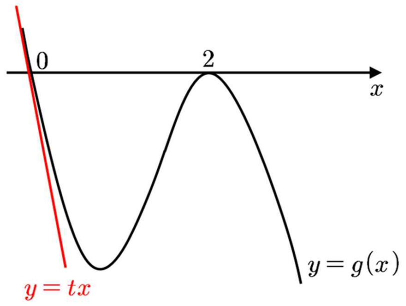
(ii) $y=mx(x-2)^2$일 때

$m>0$일 때



$g(x)$가 $x=2$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

$m<0$일 때



마찬가지로 이때의 t의 값은 -2이므로

$g'(x)=m(x-2)^2+2mx(x-2)$

$g'(0)=4m=-2,\ m=-\dfrac{1}{2}$이므로

$g(4)=-8$

(i), (ii)에 의하여 $g(4)$의 값의 합은 $64-8=56$

70) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=6x^2-2(t+3)x+2t$이므로

$f'(a)=6a^2-2(t+3)a+2t=0$

$(6a-2t)(a-1)=0$에서 $a=\dfrac{t}{3},\ a=1$

$$g(t)=\frac{a}{2}f(a)$$
$$=a^4-\frac{3}{2}(a+1)a^3+3a^3$$
$$=-\frac{1}{2}a^4+\frac{3}{2}a^3$$

그런데, $t=3a$이므로 $t\to0$일 때 $a\to0$이므로

$$\int_0^a f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}(t+3)x^3+tx^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^4-(a+1)a^3+3a^3$$
$$=-\frac{1}{2}a^4+2a^3$$

$$\therefore \lim_{t\to0}\frac{1}{g(t)}\int_0^a f(x)dx=\lim_{a\to0}\frac{-a^4+4a^3}{-a^4+3a^3}=\frac{4}{3}$$

71) [정답] ②

[해설]

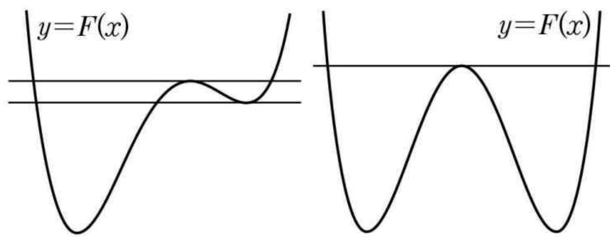
함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 방정식은

$\displaystyle\int_t^x f(s)ds=F(x)-F(t)=0$이므로 $F(x)=F(t)$이다.

따라서 $g(t)$는 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

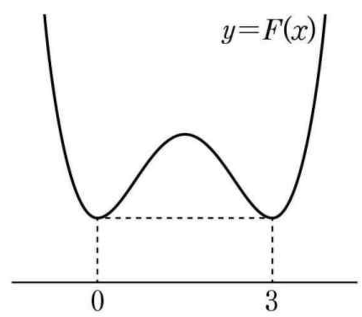
ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$이다.
함수 $F(x)$는 $x<1$에서 감소, $x>1$에서 증가하므로 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.
따라서 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(1)$은 오직 한 점에서 만나므로 $g(1)=1$이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(a)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a가 존재한다.



따라서 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\displaystyle\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$인 실수 b가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$의 개형은 다음과 같고, $F(0)=F(3)$이다.



$f(0)=F'(0)=0$이고 $f(3)=F'(3)=0$이므로

$F(x)-F(0)=\dfrac{x^2(x-3)^2}{4}=\dfrac{x^4-6x^3+9x^2}{4}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x$

이므로 $f(4)=64-72+18=10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

72) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$

$x<0$에서 $f'(x)>0$, $g'(x)>0$

$0<x<4$에서 $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)

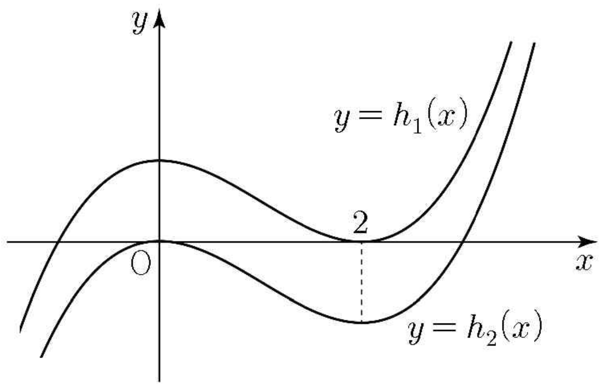
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C_1$, $g(x)=-x^2+C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로

$h_1(0)\times h_1(2)=0$

$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로

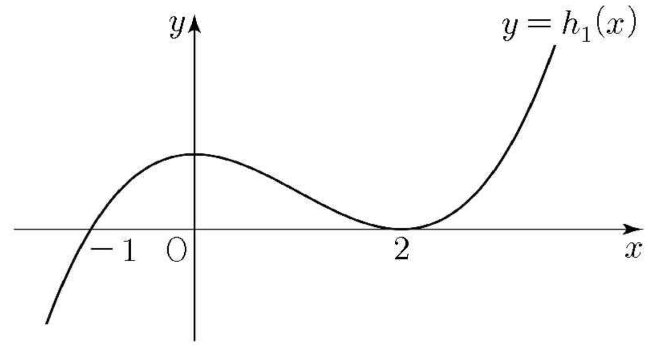
$h_2(0)\times h_2(2)=0$

$\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}h_2(t)dt<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$h_1(2)=-\frac{4}{3}+C_1-C_2=0$, $C_1-C_2=\frac{4}{3}$

$h_1(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)dt>0$

$x\ge-1$일 때, $h_1(x)\ge 0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)dt\ge 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)dx$

$=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

73) [정답] 5

[해설]

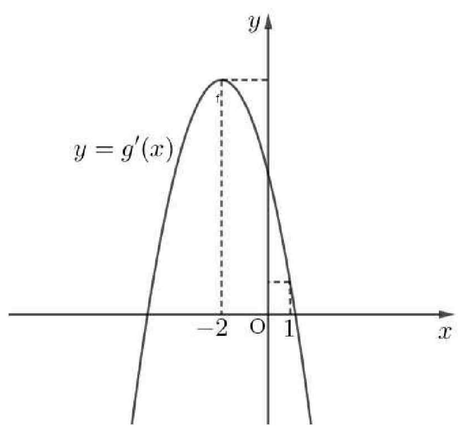
$f(x)=-x^2-4x+a$

$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)$

$=-x^2-4x+a$

$=-(x+2)^2+a+4$



함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5\ge 0$

즉, $a\ge 5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

74) [정답] 251

[해설]

$f(x)=3x+a$이므로

$$g(x)=\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$$
$$=\int_2^x (3t^2+4at+a^2)dt$$
$$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_2^x$$
$$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$위의 어떤 점에서의 접선이 x축이므로 $h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

(i) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로
다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나
다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를
인수로 가진다.

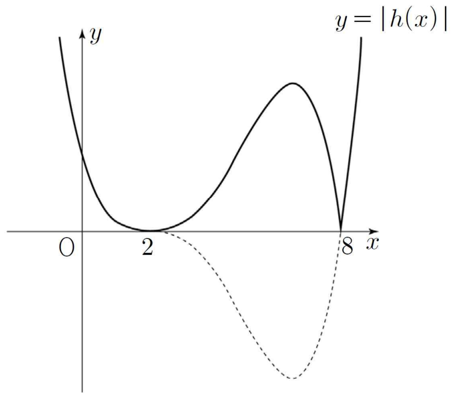
(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

$a=-6$이므로

$$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$$
$$=3(x-2)^3(x-8)$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=729$이다.

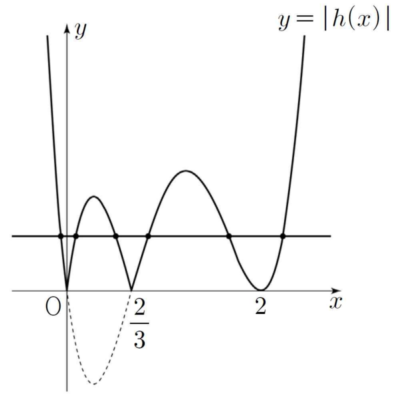
(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이
$x-2$를 인수로 갖는 경우

$4+4(a+1)+(a+2)^2$
$=a^2+8a+12$
$=(a+2)(a+6)=0$
에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$
$a=-6$이면 (a)와 같다.
$a=-2$이면

$$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$$
$$=x(3x-2)(x-2)^2$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ii) $k=-\frac{a}{3}(a\neq-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\frac{a}{3}$를

인수로 가진다.

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

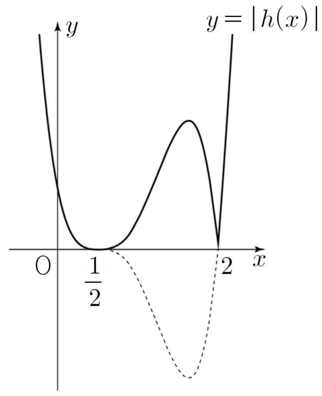
$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$$
$$=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\dfrac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우

$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$

$a+1=-k,\ (a+2)^2=k^2$

$(a+1)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\dfrac{3}{2}$

$a=-\dfrac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\dfrac{243}{8}$이므로

$p=8,\ q=243$에서 $p+q=251$

75) [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=4x^3+ax^2+bx\,(a, b$는 상수)라 하면

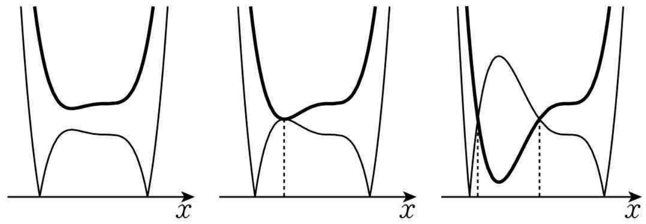
$f'(x)=12x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=4x^3+ax^2$에서 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5 & (x<c) \\ \left|x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right| & (x\geq c)\end{cases}$$

곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}$은 곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5$를 y축의 방향으로 $-\dfrac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a의 값에 따른 곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5$와 곡선 $y=\left|x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right|$의 개형 중 c의 개수가 $0, 1, 2$인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가1] [c의 개수가2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5(\to㉠)$의 극솟값과 같은 함수 $y=-\left(x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right)(\to㉡)$의 극댓값이 서로 같아야 한다.

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\dfrac{a}{4}$에서 극값을 갖고

$c=-\dfrac{a}{4}$이다.

$$\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3-\frac{13}{3}\right\}$$

이를 정리하여 풀면 $\begin{cases}a=4\\c=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=-4\\c=1\end{cases}$

그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\dfrac{4}{3}-\dfrac{13}{3}\right|=2$,

$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\dfrac{4}{3}-\dfrac{13}{3}\right|=\dfrac{14}{3}$

따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\dfrac{14}{3}$

76) [정답] ④

[해설]

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\displaystyle\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\displaystyle\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$

$$=\lim_{x\to 2a+}x^2|x-b|$$

$=4a^2|2a-b|$

$\lim_{x\to 2a-}\dfrac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to 2a-}\dfrac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$

$=\lim_{x\to 2a-}(-x^2|x-b|)$

$=-4a^2|2a-b|$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

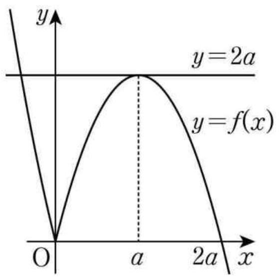
$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$

방정식 $g(f(x))=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$f(a)=-4a(a-2a)$

$=4a^2=2a$

$a=\dfrac{1}{2}$

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)dx+\int_{0}^{1}(-4x^2+4x)dx$

$=\left[\dfrac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\dfrac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}$

$=4$

77) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$

$x>0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)$

$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

$g(x)=x^2(x-a)$(단, a는 상수)

로 놓으면

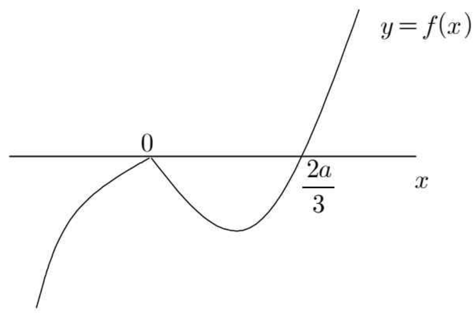
$g'(x)=2x(x-a)+x^2$

$=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$

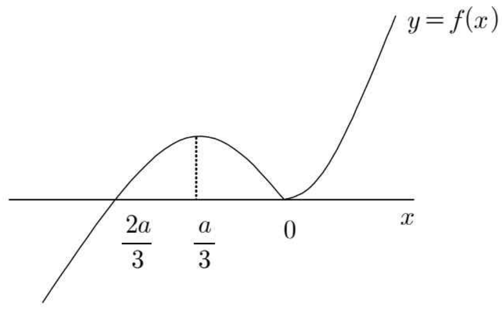
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a<0$일 때

$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$

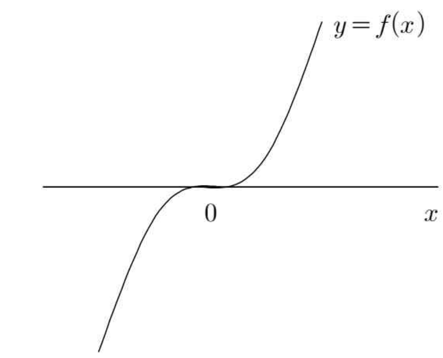
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\dfrac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$일 때

$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서

$0<a<\frac{1}{2}$

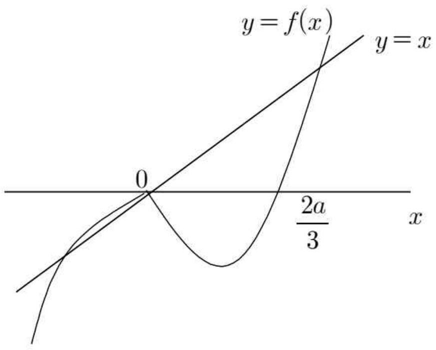
또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$

이므로

$\lim_{x\to 0-} f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)의 경우

$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서

$-\frac{1}{2}<a<0$

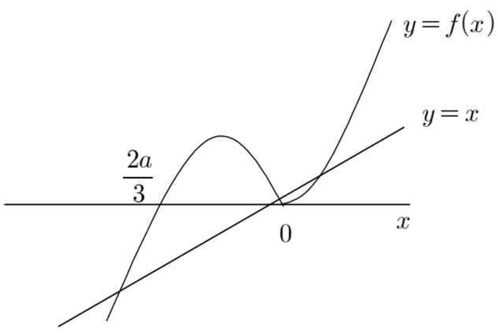
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$

이므로

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=-2a$

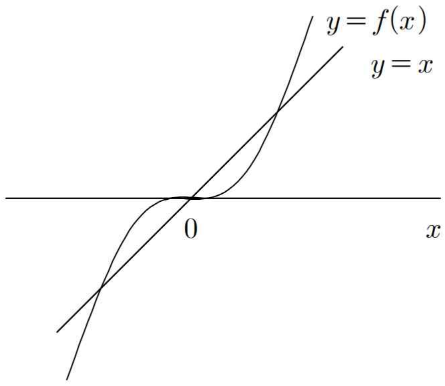
이때 $0<-2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)의 경우

$f(1)=3$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른풀이]

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$0<a<\frac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\frac{2a-1}{3}$

② $x\geq 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근

$\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.