[수학2] [03증가감소, 활용] 교사평경 최근 3개년

04 수2 05 함수의 증가와 감소

01 함수의 증가와 감소

03 증가와 감소3 (삼차함수와 조건해석, 실수 전체)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 19

1. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 13

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $a^2 \le 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

02 극대와 극소2 (삼차함수의 극대와 극소)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 10

3. 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1

④ 3 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 8

4. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+a$의 극솟값이 -6일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 17

5. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 5

6. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 17

7. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+10$이 $x=3$에서 극소일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

8. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 6

9. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

03 극대와 극소3 (사차함수의 극대와 극소)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 19

10. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^4+kx+10$이 $x=1$에서 극값을 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 19

11. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 6

12. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^2+b$가 $x=a$에서 극소이고, 극댓값 $a+8$을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

04 수2 05 함수의 증가와 감소

02 함수의 극대와 극소

07 극대와 극소7 (곱함수와 뺀함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 18

13. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

03 활용3 (구간정의함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 28

14. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

15. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

04 활용4 (절댓값함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 18

16. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

17. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=|x^2-4|(x^2+n)$$

이 $x=a$에서 극값을 갖는 a의 개수가 4이상일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

18. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않는 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

05 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

19. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 30

20. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

21. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$ (나) 집합 $\{x \mid x \ge 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 22

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert x(x-2)\rvert g(x)=x(x-2)(\lvert f(x)\rvert-a)$ 이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수

$$g(x)=|(x-a)f(x)|$$

가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 22

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

25. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)=(x+4)P(x)$, $g(x)=(x-4)Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(-4)\neq 0$, $f(4)\neq 0$, $g(-4)\neq 0$
(나) 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 모든 해를 크기순으로 나열한 -4, a_1, a_2, a_3, 4는 등차수열을 이룬다.
(다) $f'(a_i)=0$인 $i\in\{1, 2, 3\}$은 하나만 존재하고 모든 $i\in\{1, 2, 3\}$에 대하여 $g'(a_i)\neq 0$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x좌표의 합은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

26. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+2 & (x<1) \\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 22

27. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k, 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 $x=1$과 $x=-1$에서 극값을 갖는다.

$$\{x \mid f(x) \le 9x+9\} = (-\infty,\ a]$$

를 만족시키는 양수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 13

29. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x \ge -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

04 수2 05 함수의 증가와 감소

03 증가감소와 극대극소의 활용

07 활용7 (정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 30

30. 양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
(나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\frac{5}{3}$이다. (단, $a>\frac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x \le m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

31. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

02 최대와 최소2 (함수 구한 후 Mm)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 17

32. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은?

① -54 ② -51 ③ -48
④ -45 ⑤ -42

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

03 최대와 최소3 (Mm 조건 해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 12

33. 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

34. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1\le x\le 1) \\ x^2-4x+a & (1<x\le 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -5 ② $-\dfrac{9}{2}$ ③ -4
④ $-\dfrac{7}{2}$ ⑤ -3

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 10

35. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① 1 ② $\dfrac{9}{8}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{11}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

05 최대와 최소5 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

36. 점 A(1, 0)과 곡선 $y=2-x^2$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이를 k라 하자. k^2의 최솟값은?

① $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{11-6\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{5+3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{12-5\sqrt{3}}{4}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

37. 좌표평면에서 점 (18, -1)을 지나는 원 C가 곡선 $y=x^2-1$과 만나도록 하는 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\sqrt{17}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$
④ $2\sqrt{17}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{17}}{2}$

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

06 최대와 최소6 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 30

38. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 22

39. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

04 수2 05 함수의 증가와 감소

04 함수의 최대와 최소

07 최대와 최소7 (Mm로 정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 21

40. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x,$$

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx+\dfrac{4}{m^3} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 22

41. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

01 방정식과 미분1 (삼차방정식의 근의 판별)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 26

42. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 28

43. 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자.

$a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 6

44. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 20 ② 23 ③ 26
④ 29 ⑤ 32

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

02 방정식과 미분2 (삼차방정식의 실근의 범위)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 19

45. 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

46. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

03 방정식과 미분3 (사차방정식의 근의 판별)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 19

47. 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

04 방정식과 미분4 (다항함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 25

48. 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 8

49. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 27 ② 28 ③ 29

④ 30 ⑤ 31

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

05 방정식과 미분5 (변형함수, 방정식의 동치변형)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

50. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 14

51. 두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6,\quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되 도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

09 방정식과 미분9 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

52. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다. 방정식

$$|f(x)-f(-3)|=k$$

가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<m$이다. 실수 m의 최댓값은?

① 8 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 40

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 14

53. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)=0$
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
>
> (다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

04 수2 06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

10 방정식과 미분10 (정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 22

54. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq-3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 20

55. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 22

56. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

04 수2

06 방부등식과 직선운동

01 방정식과 미분

11 방정식과 미분11 (추론과 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 21

57. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

58. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

01 부등식과 미분1 (모든 실수)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 19

59. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4-4x^3+16x+a \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 19

60. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3-12x^2+k \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

02 부등식과 미분2 (제한범위)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 18

61. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-5x^2+3x+n\geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

03 부등식과 미분3 (부등식의 동치변형)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 9

62. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 06 방부등식과 직선운동

02 부등식과 미분

05 부등식과 미분5 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 28

63. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2,\ g(x) = 3x^2 + a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $f(x) \le 12x + k \le g(x)$
> 를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 18

64. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2 + 5$$

를 만족시킨다. 함수 $y = f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x = 1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

04 수2 06 방부등식과 직선운동

03 속도, 가속도와 미분

05 속도와 가속도의 해석4 (운동방향)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 11

65. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + kt^2 + kt \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 25

66. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = 2t^3 - kt^2 \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=k$에서의 점 P의 가속도를 구하시오.

[수학2] [03증가감소, 활용] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.28

1. [정답] 6
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] ①
5. [정답] 11

6. [정답] ③
7. [정답] 15
8. [정답] ②
9. [정답] ⑤
10. [정답] 7

11. [정답] 2
12. [정답] ⑤
13. [정답] 8
14. [정답] 6
15. [정답] ④

16. [정답] ①
17. [정답] ③
18. [정답] ③
19. [정답] ⑤
20. [정답] 39

21. [정답] 105
22. [정답] 108
23. [정답] ①
24. [정답] 108
25. [정답] ①

26. [정답] 7
27. [정답] 121
28. [정답] ④
29. [정답] ③
30. [정답] 35

31. [정답] 36
32. [정답] ③
33. [정답] ④
34. [정답] ③
35. [정답] ⑤

36. [정답] ③
37. [정답] ④
38. [정답] 38
39. [정답] 14
40. [정답] ⑤

41. [정답] 82
42. [정답] 12
43. [정답] 160
44. [정답] ③
45. [정답] ③

46. [정답] 7
47. [정답] 4
48. [정답] 15
49. [정답] ④
50. [정답] 21

51. [정답] ②
52. [정답] ④
53. [정답] ①
54. [정답] 64
55. [정답] 240

56. [정답] 58
57. [정답] ①
58. [정답] 61
59. [정답] 11
60. [정답] 32

61. [정답] 9
62. [정답] ⑤
63. [정답] 34
64. [정답] ②
65. [정답] ④

66. [정답] 30

[수학2] [03증가감소, 활용] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.28

1) [정답] 6

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\ge 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)$

$=4a^2-24a$

$=4a(a-6)\le 0$

그러므로

$0\le a\le 6$

따라서, a의 최댓값은 6이다.

2) [정답] ①

[해설]

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\ge 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b\le 0, a^2\le 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}$

$=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$

$=x^3+bx$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서 $3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\ge\frac{a^2}{3}\ge 0$이므로 $D'=-12b\le 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$ 이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b\le 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\ge 0$이므로 $b=0$이고

ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

3) [정답] ①

[해설]

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$에서

$f'(x)=-x^2+4x+m$

이때 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $x=3$에서 극대이므로

$f'(3)=0$이다.

$f'(3)=-9+12+m=0$

따라서 $m=-3$

4) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$f(-1)=-1+6-9+a=-6$

따라서 $a=-2$

5) [정답] 11

[해설]

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1,\ 1$

따라서 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $a=1$

또, $f(1)=1^3-3\times 1+12=10$이므로 $f(a)=f(1)=10$

$\therefore\ a+f(a)=1+10=11$

6) [정답] ③

[해설]

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$을 갖고, $x=1$에서

극솟값 $m=f(1)=2+3-12+1=-6$을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

7) [정답] 15

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2+ax+10$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로

$f'(3)=27-18+a=0,\ a=-9$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+10=15$

8) [정답] ②

[해설]

$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=6-18+a=0,\quad a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면

$f'(x)=6x^2-18x+12$

$=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 $\quad b=2$

$\therefore\ a+b=12+2=14$

9) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$이므로

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	k	↘	$k-4$	↗

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=k$를 가지므로 $k=9$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $f(2)=k-4=5$를 갖는다.

10) [정답] 7

[해설]

$f'(x)=4x^3+k,\ f'(1)=4+k=0,\ k=-4$

$\therefore f(1)=1+k+10=7$

11) [정답] 2

[해설]

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

12) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+ax^2+b$ 에서

$f'(x)=2x^3+2ax=2x(x^2+a)$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지기 위해서는 ㉠에서

$2x(x^2+a)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $a<0$

$x=a$에서 극소이므로

$f'(a)=2a(a^2+a)=2a^2(a+1)=0$

$a<0$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$f'(x)=2x(x^2-1)=2x(x+1)(x-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=b=7$

$\therefore a+b=6$

13) [정답] 8

[해설]

다항함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(3)=2,\ f'(3)=0$

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로

$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=8$

14) [정답] 6

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3+} g(x)=g(3)$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$$

$=-f'(3)$

$=a-9$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$=f'(3)$

$=-a+9$

따라서 $a=9,\ b=20$

$$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge 3)\end{cases}$$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\ge 3$에서

$g'(x)=-3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다

15) [정답] ④

[해설]

(가)에 의하여 $(a,\ f(a))$는 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 $y=f(x)$의 교점이다.

$x=0$에서 변곡점이므로 1 : 2비율관계에 의해 $a=2$가 성립한다.

계속 증가해야 하므로 $(-1,\ 0)$을 변곡점에 대해 대칭시키면 $(1,\ 0)$이므로 (나)를 만족한다.

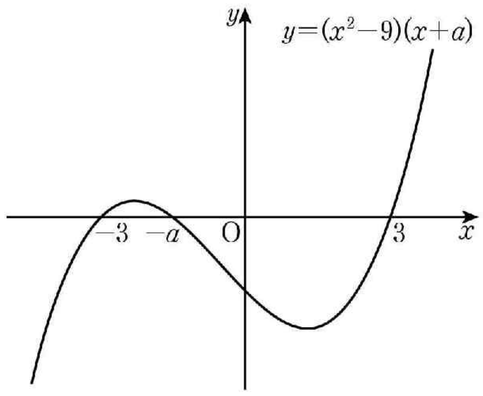
따라서 $(1,\ 0)$에서 $(2,\ 6)$으로 이동하므로 $m=1,\ n=6$이다.

16) [정답] ①

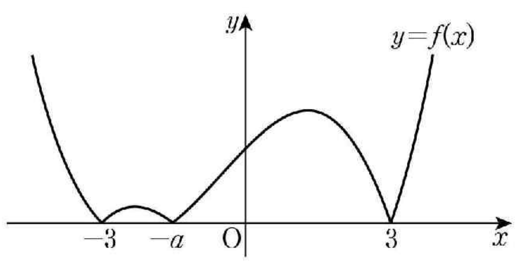
[해설]

(i) $0<a<3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3,0)$, $(-a,0)$, $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



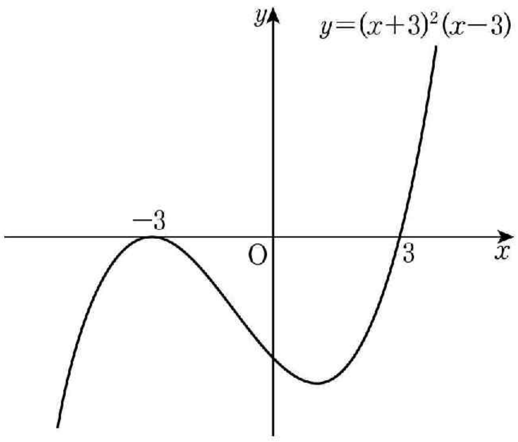
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



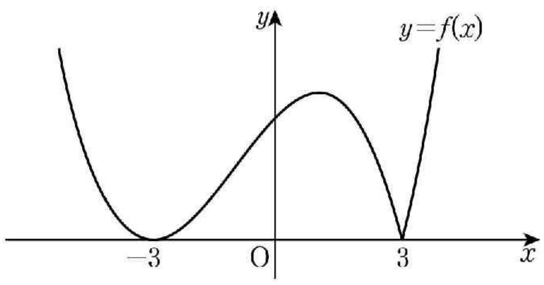
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3, 0)$에서 접하고 점 $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



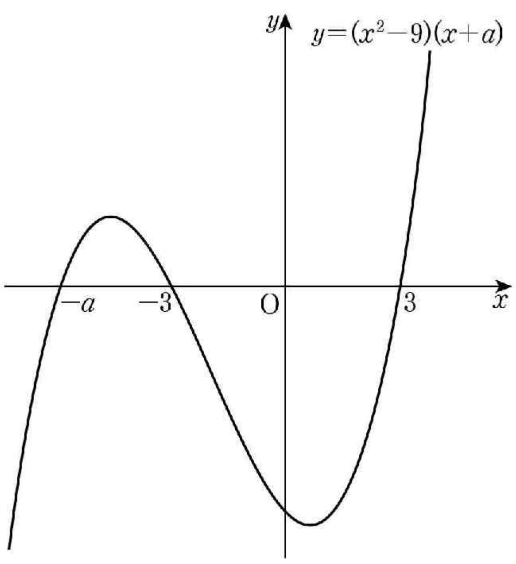
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$의 그래프 개형은 그림과 같다.



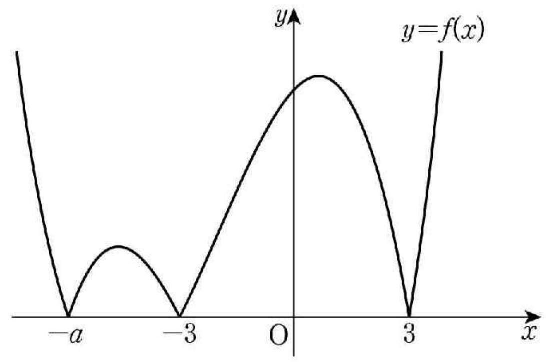
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a, 0)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이

함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=|-32|=32$

17) [정답] ③

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-4)(x^2+n) & (x<-2 \text{ 또는 } x>2)\\ -(x^2-4)(x^2+n) & (-2\le x\le 2)\end{cases}$$

에서 양변을 미분하면

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3+2(n-4)x & (x<-2 \text{ 또는 } x>2)\\ -4x^3-2(n-4)x & (-2<x<2)\end{cases}$$

즉, $f(x)=|x^2-4|(x^2+n)$에서 $x=-2$와 $x=2$에서 항상 극소이고 $f'(x)=2x\{2x^2+(n-4)x\}$에서 $x=0$에서 극값을 가지며 극값의 개수가 4이상이므로 $n<4$가 된다.

따라서 만족하는 자연수 n은 $n=1,\ 2,\ 3$

그런데, $f(x)=|x^2-4|(x^2+n)\ge 0$이므로 극값의 합이 최대가 되는 경우는 $n=3$일 때이다.

18) [정답] ③

[해설]

(가) 조건에 의해 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$g(x)=\dfrac{|x||f(x-p)+q|}{x}\ (x\neq 0)$이고 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}|f(x-p)+q|=|f(-p)+q|,$$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x-p)+q|=-|f(-p)+q|$$

에서 $f(-p)+q=0$

$\therefore\ f(-p)=-q$

또, $g(0)=0$이므로 $g(x)$는 원점을 지난다.

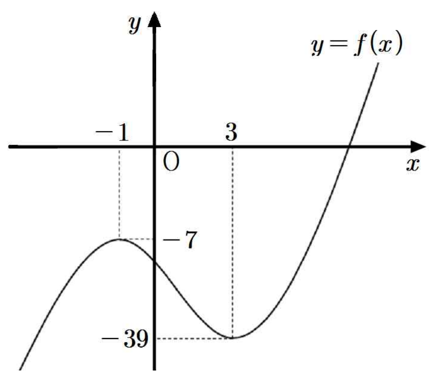
따라서 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x||f(x-p)+q|}{x} & (x\neq 0)\\ g(0) & (x=0)\end{cases}$

이 때 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-6x-9\\&=3(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

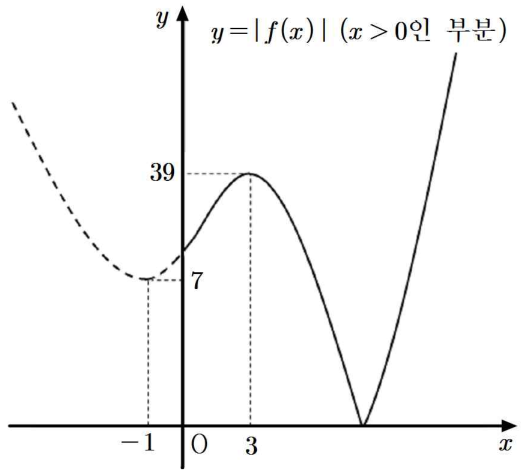
x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-7	↘	-39	↗

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

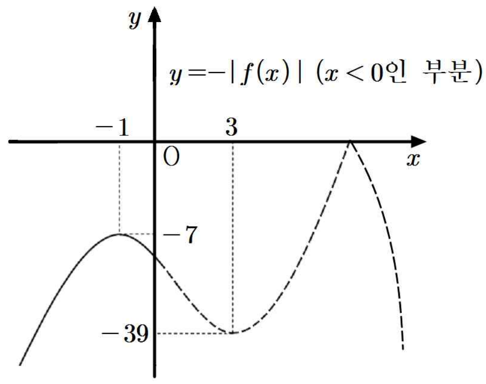


$h(x)=\dfrac{|x||f(x)|}{x}$ (단, $x\neq 0$)이라 하면

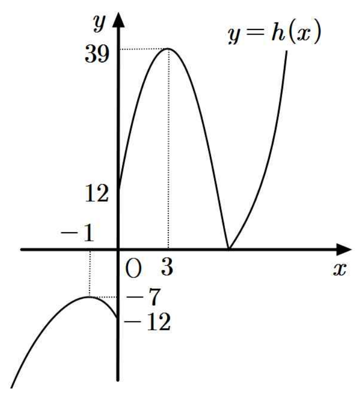
(ⅰ) $x>0$에서 $y=|f(x)|$



(ⅱ) $x<0$에서 $y=-|f(x)|$



따라서 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 미분불가능한 점이 2개다. 그런데, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=h(x)$의 그래프를 x축으로 p만큼 y축으로 q만큼 평행이동한 것이므로 $g(x)$의 그래프에서 미분불가능한 점이 1개가 되기 위해선 원래의 함수 $y=f(x)$의 평행이동한 함수 $y=f(x-p)+q$의 극점 중 한 개가 원점에 와야 한다.

즉, 극점이 원점으로 옮겨져야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 극점 $(-1,\ -7)$, $(3,\ -39)$에 대하여

(ⅰ) 극점 $(-1,\ -7)$이 원점이 되는 경우

$p=1,\ q=7$

(ⅱ) 극점 $(3,\ -39)$이 원점이 되는 경우

$p=-3,\ q=39$

그런데 $p,\ q$가 양수이어야 하므로 모순

(ⅰ), (ⅱ)에서 만족하는 $p,\ q$의 값은 $p=1,\ q=7$

$\therefore\ p+q=1+7=8$

19) [정답] ⑤

[해설]

(가), (나)에서 $f(x)=x^4+bx^2+7$

$f(1)=1+b+7=2,\ b=-6$

그러므로 $f(x)=x^4-6x^2+7$

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

극솟값은 $x^2=3$일 때, $9-18+7=-2$

20) [정답] 39

[해설]

$y=|f(x)-g(x)|$가 조건에서

$$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$$

$$\therefore f(0)=g(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$$f'(0)-g'(0)=g'(0)-f'(0)$$

즉, $f'(0)=g'(0)$이므로 $h'(0)=0$

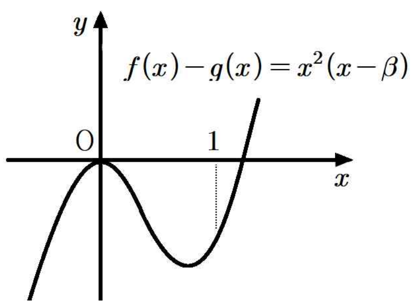
$\cdots\cdots$ ㉡

그런데, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이고 $x=0$에서 중근을 가져야 하므로

$$y=f(x)-g(x)=x^2(x-\beta)$$

로 놓을 수 있다.

또한 $x<1$인 모든 구간에서도 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능해야 하므로 아래 그림과 같이 $y=f(x)-g(x)\leq 0$이어야 한다.



즉, $h(x)=\begin{cases}-f(x)+g(x) & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이어야 한다.

즉, $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

또 미분가능하므로 $-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$$\therefore f(1)=0,\ f'(1)=0$$

따라서 $f(x)=(x-\alpha)(x-1)^2$ $\cdots\cdots$ ㉢

로 놓을 수 있다.

㉠에서 $g(0)=f(0)$이고, ㉢에서 $f(0)=-\alpha$이므로

$$g(0)=-\alpha$$

㉢을 미분하면 $f'(x)=(x-1)^2+2(x-\alpha)(x-1)$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $g'(0)=f'(0)$이고, ㉣에서 $f'(0)=1+2\alpha$이므로

$$g'(0)=1+2\alpha$$

따라서 $g(x)$는 $(0,\ -\alpha)$를 지나고 기울기가 $1+2\alpha$인 일차함수이므로 $g(x)=(1+2\alpha)x-\alpha$ $\cdots\cdots$ ㉤

조건에서 $h(2)=5$이고, ㉢에서 $f(2)=2-\alpha$, ㉤에서 $g(2)=3\alpha+2$이므로

$$f(2)+g(2)=(2-\alpha)+2+4\alpha-\alpha=5$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2,\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$$

$$\therefore h(4)=f(4)+g(4)$$
$$=\frac{7}{2}\times 3^2+\frac{15}{2}$$
$$=\frac{78}{2}=39$$

21) [정답] 105

[해설]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 개수를 $p(\neq 0)$라 하면

조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$(p,q는 상수)

로 놓을 수 있고,

조건 (나)에서 $q<1$이다. 이때

$f(a-x)=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$

$\qquad =-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

이므로

$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)$

$\qquad \times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|$

$\quad =p^2|(x-1)(x-3)(x-q)$

$\quad \times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|$

이고 $p<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$ 꼴이어야 한다.

따라서

$a-3=q, a-1=1,\ a-q=3$ 이어야 한다.

따라서 $a=2,\ q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$이다.

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=f(x)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}&=\frac{f(8)^2}{f(0)\times f(8)}\\&=\frac{f(8)}{f(0)}\\&=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}\\&=105\end{aligned}$$

22) [정답] 108

[해설]

조건 (가)에서 $x\neq 0, x\neq 2$일 때,

$g(x)=\dfrac{x(x-3)}{|x(x-2)|}(|f(x)|-a)$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0\ \text{또는}\ x>0)\\ a-|f(x)| & (0<x<2)\end{cases}$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0, x=2$에서 미분가능하므로 $x=0, x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$에서 $|f(0)|-a=a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0\text{또는}x>0)\\ a-|f(x)| & (0\le x\le 2)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}$ …… ㉠

(i) $f(0)=a$ 인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)>0$이다. 그러므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0), f'(0)=0$

(ii) $f(0)=-a$ 인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)<0$이다. 그러므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0), f'(0)=0$

(i), (ii)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$ 에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$ 이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$ 이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3, q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times 2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times 6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a, f(2)=a$인 경우 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

23) [정답] ①

[해설]

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32으므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\dfrac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$h\left(\dfrac{6+a}{3}\right)=\left(\dfrac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\dfrac{6+a}{3}-3\right)=-4\left(1-\dfrac{a}{3}\right)^3=-32$

$\left(1-\dfrac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\dfrac{a}{3}=2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

24) [정답] 108

[해설]

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

의 값이 항상 존재한다.

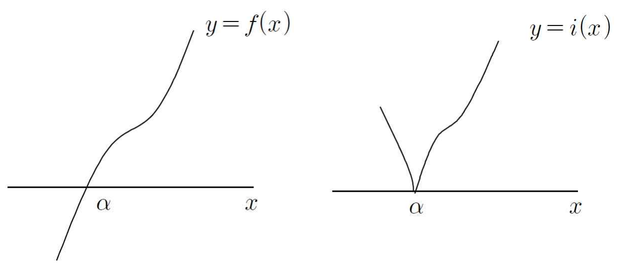
따라서

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq0$인 경우



$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

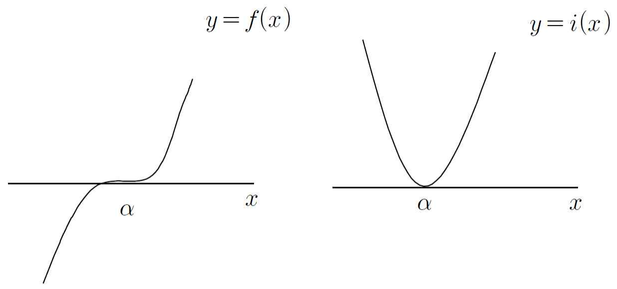
이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$이어야 하므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

그런데 $f'(\alpha)\neq0,\ f(\alpha-3)\neq0$이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$인 경우



$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$이어야 하고

$f'(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은

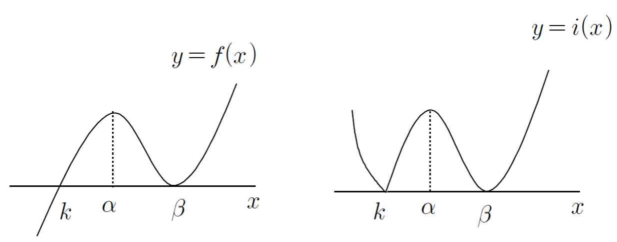
$x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$

으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq0,\ f(\beta)\neq0,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅳ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0,\ f(\alpha)\neq0,\ f(\beta)=0,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0(k<\alpha<\beta)$인 경우

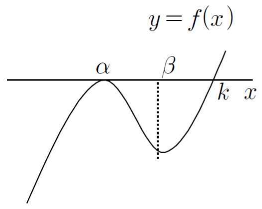


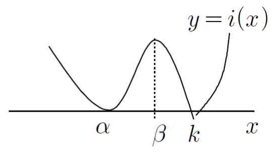
(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅴ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0,\ f(l)=0,\ f(m)=0,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0(k<\alpha<l<\beta<m)$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅵ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0,\ f(\alpha)=0,\ f(\beta)\neq0,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0(\alpha<\beta<k)$인 경우





$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k)\\ 0 & (x=k)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k+}g(x)=g(k)$이어야 하므로

$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f'(k)\neq0$이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha$ …… ㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4$ …… ㉡

또한, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$이고

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\beta=\frac{\alpha+2k}{3}$$

㉡에 대입하여 정리하면 $\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서 $f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times3=108$

25) [정답] ①

[해설]

(나)에서 -4, a_1, a_2, a_3, 4는 등차수열이므로 각각

-4, -2, 0, 2, 4이다.

$f'(-4)\neq0$, $f(4)\neq0$이고 (다)에서 $f'(a)=0$이므로

$f(x)=(x+4)(x-a)^2$ $(a=-2,\ 0,\ 2)$

의 꼴을 가진다.

따라서 $f(x)$, $g(x)$는 다음 3가지의 조합이 가능하다.

(ⅰ) $f(x)=(x+4)(x+2)^2$, $g(x)=x(x-4)(x-2)$

(ⅱ) $f(x)=(x+4)x^2$, $g(x)=(x-4)(x-2)(x+2)$

(ⅲ) $f(x)=(x+4)(x-2)^2$, $g(x)=x(x-4)(x+2)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 (ⅱ)의 경우이다.

즉, $(x+4)x^2=(x-4)(x-2)(x+2)$에서

$x^3+4x^2=x^3-4x^2-4x+16$

$8x^2+4x+6=0$

따라서 이차방정식 $8x^2+4x+6=0$의 근과 계수의 관계에서

두 근의 합은 $-\frac{1}{2}$

26) [정답] 7

[해설]

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

라 하면

$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+2 & (x<1)\\ x^2+ax+b & (x\geq1)\end{cases}$에서

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}(-x^2+2x+2)=3$

$1+a+b=3$, $b=2-a$

따라서 $f(x)=x^2+ax+(2-a)$

또한, 함수 $g(x)$가 실수 전체에서 증가해야 하므로

$g'(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x<1)\\ 2x+a & (x>1)\end{cases}$

에서 $x>1$에서 $2x+a\geq0$을 만족해야 한다.

따라서 $x=1$을 대입했을 때, $2+a\geq0$에서

$a\geq-2$ …… ㉠

$f(3)=9+3a+(2-a)=2a+11$이므로

㉠에서 $2a+11\geq-4+11=7$

$\therefore f(3)\geq7$

따라서 $f(3)$의 최솟값은 7이다.

[다른 풀이]

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

라 하면 $g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+2 & (x<1)\\ x^2+ax+b & (x\geq1)\end{cases}$

(ⅰ) $x=1$에서 연속

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$이어야 하므로

$3=1+a+b$, $b=2-a$

(ⅱ) 실수 전체의 집합에서 증가

함수 $f(x)$의 대칭축에서 $-\frac{a}{2}\leq1$, $a\geq-2$

(i), (ii)에서

$f(3)=9+3a+b=9+3a+(2-a)=2a+11 \geq 7$

따라서 $f(3)$의 최솟값은 7이다.

27) [정답] 121

[해설]

$f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$(a, b, c는 상수)라 하면

$f'(0)=c$, $g(x)=cx$

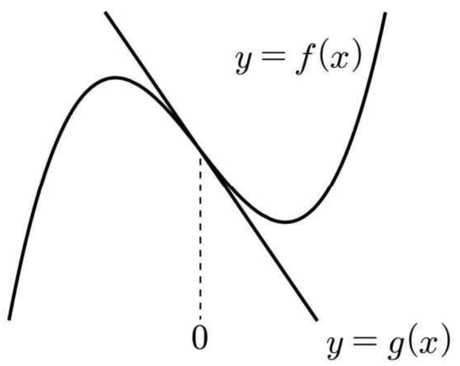
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의

접선의 기울기 c에 대하여

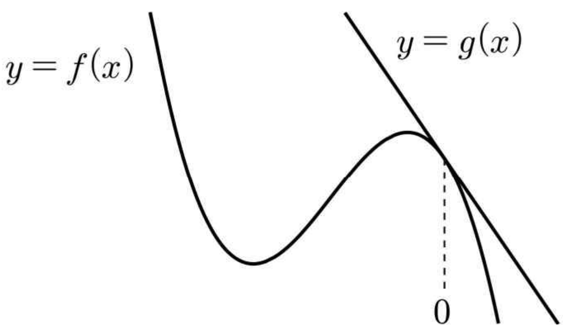
(i) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

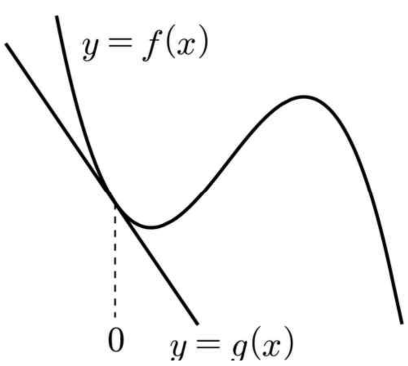
(iii) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



(iv) $c<0$, $a<0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여

$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ ……㉠

조건 (나)에 의하여

$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ ……㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

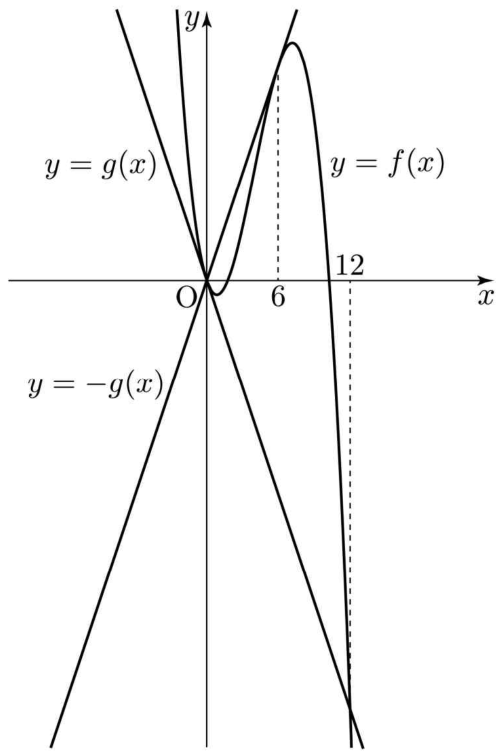
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$

$6-k=0$, $k=6$

$g(x)=18ax$

$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$

$=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha \leq x<\beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \leq x<\alpha\text{또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha<3<\beta$이므로

$h(3)=a\times 3\times(3-6)^2=27a=-\dfrac{9}{2}$

$a=-\dfrac{1}{6}$, $c=-3$

$$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha \leq x<\beta) \\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \leq x<\alpha\text{또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$이므로

$\alpha<6<\beta<11$

$h(6)=0$, $h(11)=\dfrac{1}{6}\times 11^2\times(-1)=-\dfrac{121}{6}$

따라서

$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\}=121$

28) [정답] ④

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=f'(1)=0$이므로 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 -1, 1이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$-\frac{2a}{3}=0,\ \frac{b}{3}=-1$

즉 $a=0,\ b=-3$이므로 $f(x)=x^3-3x+c$

$f(x)\le 9x+9$에서

$x^3-12x\le 9-c$

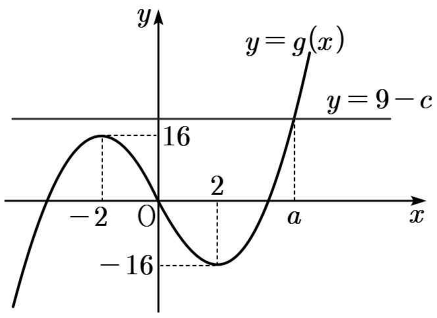
$g(x)=x^3-12x$라 하면 $g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $g(-2)=16$, $x=2$에서 극솟값 $g(2)=-16$을 가지므로 그래프는 다음과 같다.



$f(x)\le 9x+9$를 만족하는 x의 범위가 $x\le a$이므로 위의 그림에서 $9-c\ge 16$을 만족해야 하고 $g(x)=16$에서

$x^3-12x=16,\ (x+2)^2(x-4)=0$

이므로 $a\ge 4$이다.

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다.

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $x=1$과 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$

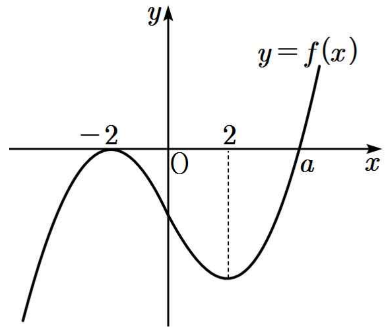
$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3)dx$

$=x^3-3x+C$

$\{x\,|\,f(x)\le 9x+9\}=(-\infty,\ a]$를 만족하므로

$x^3-3x+C\le 9x+9$

즉, $x^3-12x+C-9\le 0$을 만족하는 범위는 $x\le a$ $(a>0)$이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



극대가 되는 $x=-2$에서 (극댓값)≤ 0을 만족해야 하므로

$-8+24+C-9\le 0,\ C\le -7$ …… ㉠

그런데 $x=a$가 $y=f(x)$의 근이므로

$a^3-12a+C-9=0$

$C=-a^3+12a+9$

㉠에 대입하면 $-a^3+12a+9\le -7$

따라서 $a^3-12a-16\ge 0$

인수정리를 이용하면 $(a-4)(a+2)^2\ge 0$이므로

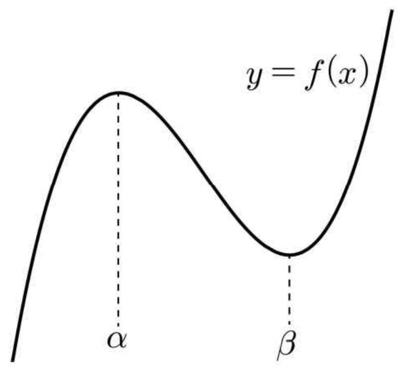
$a-4\ge 0$

따라서 양수 a의 최솟값은 4이다.

29) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(i) $\alpha<\beta\le -2$인 경우

$x\ge -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

$f(-2)<g(-2)<g(2)$

$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(ii) $\alpha<-2<\beta$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\alpha)$에서 존재하므로 모순

(iii) $\alpha=-2$인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

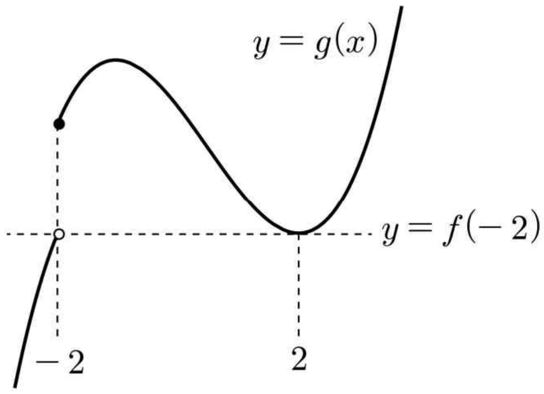
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+\frac{1}{2}$

$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(iv) $-2<\alpha<\beta$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$이므로

$f(2)+8=f(-2)f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}(a,\ b$는 상수)라

하자. $8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

$b=-6,\ f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0,\ a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

30) [정답] 35

[해설]

조건 (가)에서

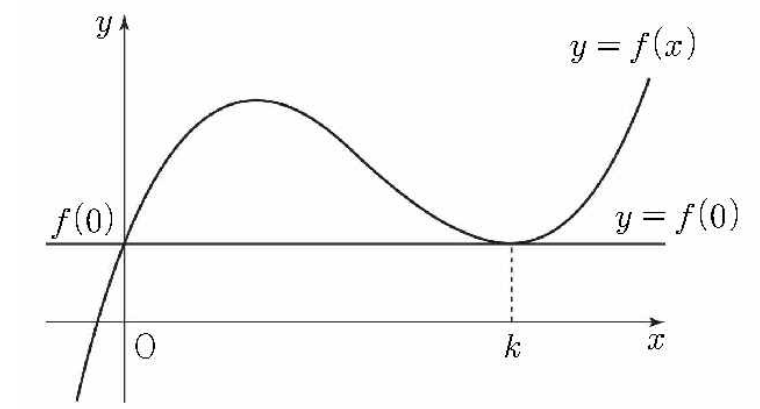
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$$g(k)=\frac{f(k)-f(0)}{k}=0$$

$f(k)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의

그래프는 점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)$

$=(3x-k)(x-k)\cdots\cdots$ ㉠

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$$

조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$

$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$2a(a-k)=0$

$a>0$이므로 $a=k$

㉠에서 $f'(k)=0$이므로

$g(a)=0\ \cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $f'\left(\frac{5}{3}\right)=g(a)$이고

㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\frac{5}{3}\right)=0$

㉠에서 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로

$\frac{k}{3}=\frac{5}{3}$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

따라서 $k=5$

$f'(x)=(3x-5)(x-5)$

$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서

$3x^2-20x-m^2+10m=0$

이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-20)^2-4\times3\times\left(-m^2+10m\right)$

$=12(m-5)^2+100>0$

이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은 m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

서로 다른 두 실근을 $c_1,\ c_2(c_1<c_2)$라 하자.

$n\left(A_m\right)=2$이려면

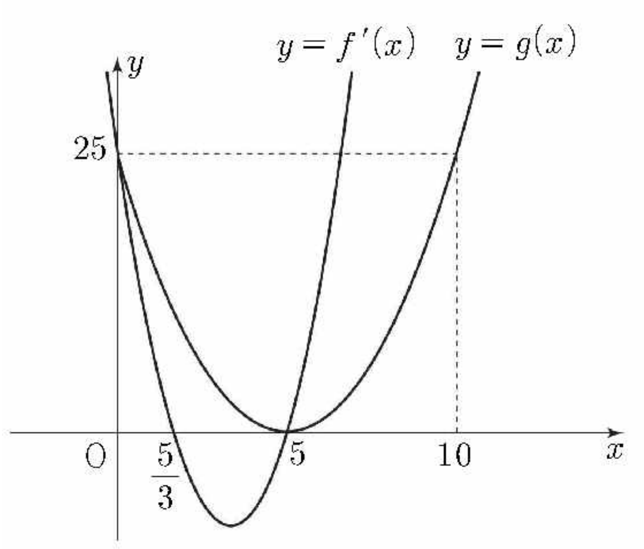
$0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$c_1c_2=\frac{-m^2+10m}{3}>0$$

$0<m<10$

두 함수 $y=f'(x),\ y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



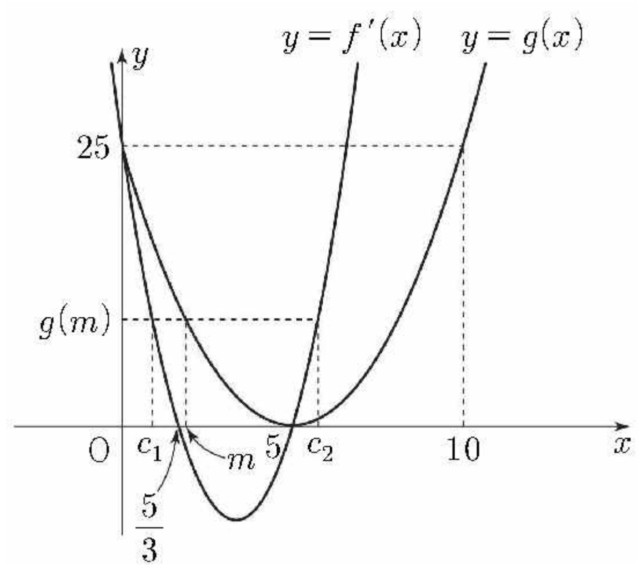
$g(m)=(m-5)^2 \geq 0$이므로

$f'(x)=g(m)$에서

$f'(x)=(3x-5)(x-5) \geq 0$

$x \leq \frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 5$

(i) $0 < m < 5$인 경우



$0 < c_1 < m < 5 < c_2$이므로

$A_m = \{c_1\}$

$n(A_m) \neq 2$

(ii) $m=5$인 경우

$g(5)=0$이므로

$f'(x)=g(5)=0$

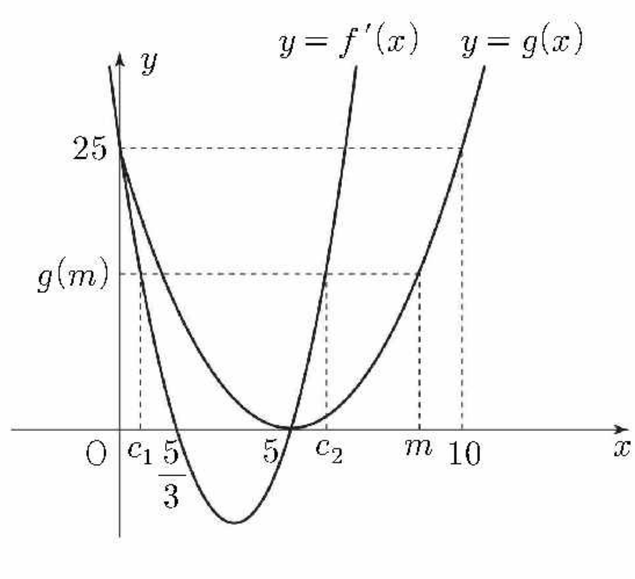
$(3x-5)(x-5)=0$

$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=5$

$A_5=\left\{\frac{5}{3},\ 5\right\}$

$n(A_5)=2$

(iii) $5 < m < 10$인 경우



$0 < c_1 < c_2 < m$이므로

$A_m=\{c_1,\ c_2\}$

$n(A_m)=2$

(i), (ii), (iii)에 의해 $n(A_m)=2$를 만족시키는

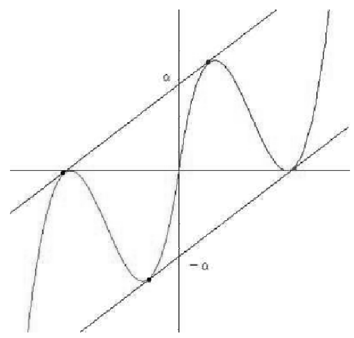
자연수 m은 5, 6, 7, 8, 9

따라서 $5+6+7+8+9=35$

31) [정답] 36

[해설]

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$x>0$일 때,

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인 점을 $x=b,\ c(b<c)$라 하면

$b+c=\frac{4a}{3},\ bc=\frac{a^2-4}{3}$

$\frac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$

이것을 풀면

$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc=\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}$

$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c)=\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a$

$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$

즉, $\left(\frac{28}{27}a^3+\frac{16}{3}a\right)-2a\left(\frac{10}{9}a^2+\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{3}a^3=\frac{16}{3}a$

$\therefore\ f'(0)=a^2=36$

32) [정답] ③

[해설]
$f(x)=x(x-a)(x-6)$이라 하자.
$f(0)=0$이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고
원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$이다.
원점이 아닌 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(t)=f'(t)(x-t)$이고 이 직선이 원점을 지나므로
$0-f(t)=f'(t)(0-t)$
$tf'(t)-f(t)=0$ ……㉠
$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$에서
$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$
이므로 ㉠에서
$t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=0$
$2t^3-(a+6)t^2=0,\ t^2\{2t-(a+6)\}=0$
$t\neq 0$이므로 $t=\dfrac{a+6}{2}$이다.
$f'(0)=6a,\ f'\left(\dfrac{a+6}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}(a^2-12a+36)$
이므로 $0<a<6$인 실수 a에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면
$g(a)=-\dfrac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$
$g'(a)=-\dfrac{3}{2}(3a^2-24a+36)=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$
$0<a<6$이므로 $g'(a)=0$에서 $a=2$
$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	-48	$\nearrow$	

함수 $g(a)$는 $a=2$일 때 극소이면서 최소가 된다. 따라서 $0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $g(2)=-48$이다.

33) [정답] ④

[해설]
$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서
$f'(x)=3x^2-12x+9$
$\quad=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	$\nearrow$	$a+4$	$\searrow$	a

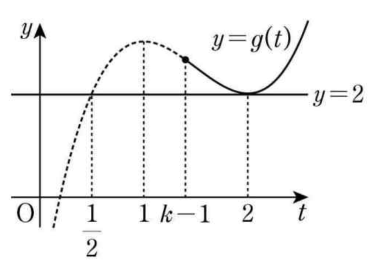
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

34) [정답] ③

[해설]
$y=x^3-6x^2+5$의 양변을 미분하면
$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$
즉, $y'=0$에서 $x=0,\ x=4$이므로
$x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소를 갖는다.
주어진 범위가 $-1\leq x\leq 1$이므로 $x=0$일 때, 최댓값 5,
$x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.
즉, $y=x^2-4x+a(1<x\leq 3)$은 $x=2$에서 대칭이고 최솟값을 갖는다.
즉, 최댓값이 5이므로 최솟값은 -5이어야 한다.
따라서 $a-4=-5$
$\therefore\ \lim_{x\to 1+}f(x)=a-3=-4$

35) [정답] ⑤

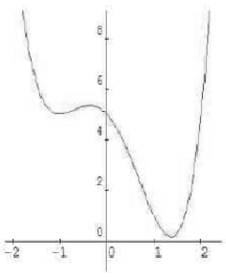
[해설]
$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$
이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k-1$이다.
함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\geq k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1, \infty)$에서 정의된 함수이다.
한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서
$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.
$g(t)=2$에서
$2t^3-9t^2+12t-2=2,\ (2t-1)(t-2)^2=0$
즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같다.



따라서 $\dfrac{1}{2}\leq k-1\leq 2$, 즉 $\dfrac{3}{2}\leq k\leq 3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

36) [정답] ③

[해설]



$f(x)=\overline{\mathrm{AP}}=(x-1)^2+(2-x^2)^2=x^4-3x^2-2x+5$

$f'(x)=4x^3-6x-2=2(x+1)(2x^2-2x-1)$

각각 극솟값, 극댓값, 극솟값을 갖는다

그림의 $f(x)$의 그래프에서 구하는 최솟값은

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$일 때이므로

$x-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $2-x^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

$(x-1)^2+(2-x^2)^2$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\dfrac{11-6\sqrt{3}}{4}$

37) [정답] ④

[해설]

원과 곡선이 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,\ x^2-1)$라 하고, 점 $(18,\ -1)$과 점 P 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(x-18)^2+x^4}$

$f(x)=x^4+(x-18)^2$라 하면

$f'(x)=4x^3+2(x-18)$

$\quad=2(2x^3+x-18)$

$\quad=2(x-2)(2x^2+4x+9)$

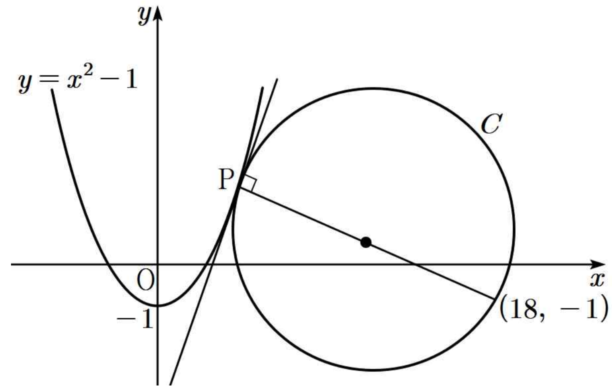
$f'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최솟값 $f(2)=272$를 갖는다.

원의 반지름이 최소일 때는 d가 지름일 때이므로 반지름의 최솟값은 $\dfrac{d}{2}=\dfrac{\sqrt{272}}{2}=2\sqrt{17}$이다.

[다른 풀이]

좌표평면에서 점 $(18,\ -1)$을 지나는 원 C가 곡선 $y=x^2-1$과 만나도록 하는 원 C의 반지름의 길이의 최소가 되는 경우는 아래 그림과 같다.



즉, 만나는 접점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$라 하면 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $y'=2t$이다.

직선 AP의 기울기와 접선의 기울기가 수직이므로

$\dfrac{t^2}{t-18}\times 2t=-1$, $2t^3+t-18=0$

$(t-2)(2t^2+4t+9)=0$

$\therefore t=2$

따라서 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$이므로 최소가 되는 원 C의 지름은

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(18-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{17}$

따라서 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{17}$

38) [정답] 38

[해설]

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다.

그러므로

$f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

$f(x)=ax(x+2)+k$

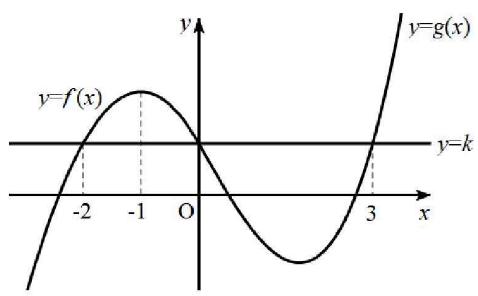
$\quad=ax^2+2ax+k\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x)=px(x-3)(x-q)+k$

$\quad=p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $q=-3$이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와

$x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고

$f'(x)=2ax+2a,\quad g'(x)=p(3x^2-9)$이므로

$2a=-9p$ ……㉠

또, 구간 $[-2, 3]$에서 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$,

최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$$\begin{aligned} f(-1)-g(\sqrt{3}) &= (-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k) \\ &= -a+6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9+12\sqrt{3}}{2}p \\ &= 3+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

그러므로

$p=\dfrac{2}{3}$이고

$a=-\dfrac{9}{2}p=-3$

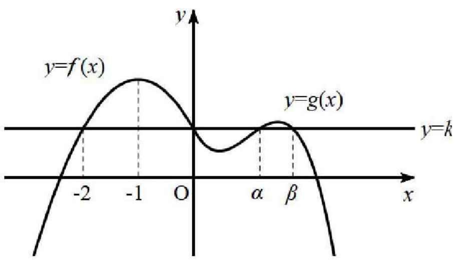
따라서

$f'(x)=-6x-6,\ g'(x)=2x^2-6$

이므로

$$\begin{aligned} h'(-3)+h'(4) &= f'(-3)+g'(4) \\ &= 12+26=38 \end{aligned}$$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta=3)$

로 놓으면

$$\begin{aligned} g(x) &= p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k \\ &= p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k \end{aligned}$$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

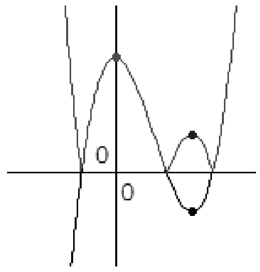
그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

39) [정답] 14

[해설]

(가)를 만족하려면 그림과 같이



$f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$

$f(0)=q>0,\ f(2p)=-4p^3+q<0$

즉 $q<4p^3$

(나)를 만족하려면 각 구간에서 최댓값은 $f(0)=q$일 때이다.

한편 $f(-1)=-1-3p+q,\quad f(1)=1-3p+q$

$f(2)=8-12p+q,\quad f(-2)=-8-12p+q$

$-q\le f(-1)\le q,\ -q\le f(1)\le q$

$-q\le f(-2)\le q,\ -2\le f(2)\le q$

인데, $f(-2)\ge -q$이면 충분하다.

$-8-12p+q\ge -q$, 즉 $4+6p\le q$

두 조건으로부터 $4+6p\le q<4p^3$을 만족하는

25 이하의 자연수는

$p=2$일 때 $16\le q\le 25$ -- 10개

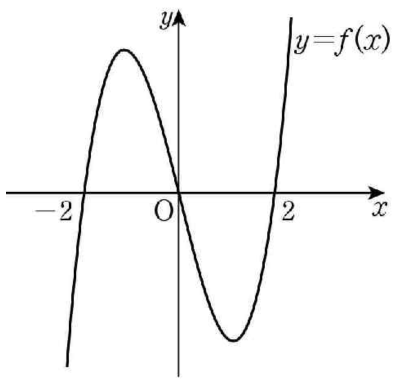
$p=3$일 때 $22\le q\le 25$ -- 4개

$\therefore$ 14 개

40) [정답] ⑤

[해설]

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



ㄱ. $m=-1$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{15}{4},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$이므로 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-5$

ㄴ. $m=-1$일 때, $g(x)=\begin{cases} 47x-4 & (x<0) \\ -2x-4 & (x\ge 0) \end{cases}$

(i) $x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_1(x_1<0)$이라 하면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_1$에서만 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$일 때, $g(0)-4<0=f(0)$이므로 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x>0$일 때,

$f(x)-g(x)=2x^3-6x+4$

$=(x-1)^2(x+2)\geq 0$

즉, $f(x)\geq g(x)$

$x>0$에서 $h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.

따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 양수 m에 대하여

$x=0$일 때, $g(0)=\dfrac{4}{m^3}>0=f(0)$이므로

$x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$x>0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_2(x_2>0)$이라 하면 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_2$에서만 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 한다.

$x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$에서

$2t^3-8t=-\dfrac{47}{m}t+\dfrac{4}{m^3}$ ……㉠

$6t^2-8=-\dfrac{47}{m}$ ……㉡

$t\times$(㉡ − ㉠) 에서

$4t^3=-\dfrac{4}{m^3}$

$t=-\dfrac{1}{m}$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{6}{m^2}-8=-\dfrac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$

$(8m+1)(m-6)=0$

m은 양수이므로 $m=6$

$m=6$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=-\dfrac{1}{6}$인 점에서 접한다.

(i) $m=6$일 때, 함수 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(ii) $0<m<6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 y절편도 커지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

그러므로 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다. 따라서 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(iii) $m>6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 y절편도 작아지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 x좌표를 각각 x_3, x_4라고 하면 함수 $h(x)$는 $x=x_3$, $x=x_4$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

41) [정답] 82

[해설]

사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$는

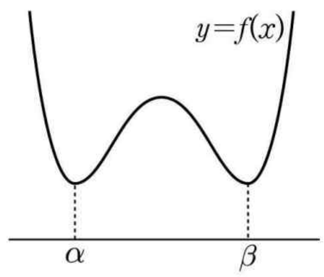
$$g(t)=\begin{cases} f(t)-f(\alpha)(t<\alpha) \\ f(\alpha)-f(t)(t\geq\alpha) \end{cases}$$

구간 $(-\infty, \alpha)$에서 함수 $f(t)$가 감소하므로 함수 $g(t)$도 감소하고, 구간 $[\alpha, \infty)$에서 함수 $f(t)$가 증가하므로 함수 $g(t)$는 감소한다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta(\alpha<\beta)$에서 극솟값을 가지고, $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$라 하자.

(i) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우

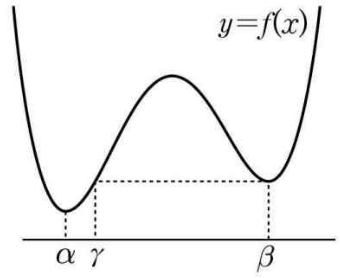


함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ 0 & (\alpha\leq t\leq\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ii) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우

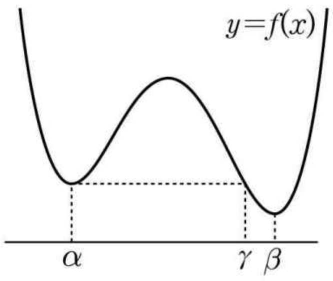


$\alpha < x < \beta$일 때, $f(x)=f(\beta)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ a-f(t) & (\alpha \le t < \gamma) \\ a-b & (\gamma \le t \le \beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

$a-b<0$이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(iii) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우



$\alpha < x < \beta$일 때, $f(x)=f(\alpha)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-b & (t<\alpha) \\ a-b & (\alpha \le t \le \gamma) \\ f(t)-b & (\gamma < t < \beta) \\ b-f(t) & (t \ge \beta) \end{cases}$$

$a-b>0$이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서

$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$

이다. 또 $g(4)=0$이므로 $\beta=4$이고 $f'(4)=0$이다.

$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하자.

$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$이므로

$f'(4)=0$에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$

$10-2p=0$, $p=5$

그러므로

$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$

$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)$

$=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$

$g(-1)=f(-1)-f(4)$

$=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$

따라서 $k+g(-1)=82$

42) [정답] 12

[해설]

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$에서

$x^3-x^2-8x=-k$

$f(x)=x^3-x^2-8x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-8$

$=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

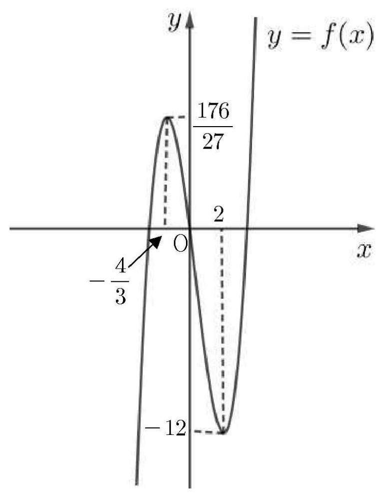
$x=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{176}{27}$, $f(2)=-12$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=-k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가

서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=\dfrac{176}{27}$ 또는 $-k=-12$

즉, $k=-\dfrac{176}{27}$ 또는 $k=12$ 이다.

이때 k는 양수이므로

$k=12$

43) [정답] 160

[해설]

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1$,

$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는

$$f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$$

$a^2>0$이므로 $(3a-1)(a-3)>0$

그런데 a는 자연수이므로 $a>3$

그러므로 $a_1=4,\ a_2=5,\ \cdots,\ a_n=n+3$

$a=a_n$일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$이고

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

44) [정답] ③

[해설]

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$,

즉 $2x^3-3x^2-12x=-k$ ⋯⋯ ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

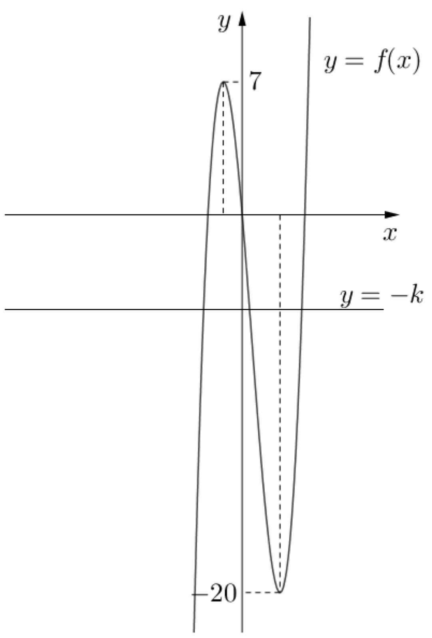
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

45) [정답] ③

[해설]

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면 $f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=-16+24+a=a+8$

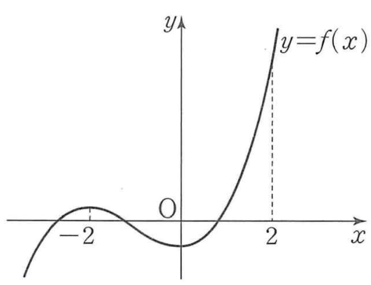
$f(0)=a$

$f(2)=16+24+a=a+40$

이므로 $f(-2)<f(2)$

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, $f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.



$f(-2)\ge 0$에서 $a+8\ge 0,\ a\ge -8$ ⋯⋯ ㉠

$f(0)<0$에서 $a<0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $0-(-8)=8$

46) [정답] 7

[해설]

방정식 $2x^3-6x^2+k=0$에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

$$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$$

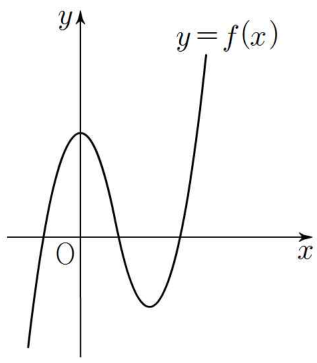
이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 그림과 같이 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.



따라서 $k>0$이고 $k-8<0$이므로

$$0<k<8$$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개다.

[다른 풀이]

방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2이므로 $k=-2x^3+6x^2$에서 함수 $y=-2x^3+6x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수인 두 점에서 만나야 한다.

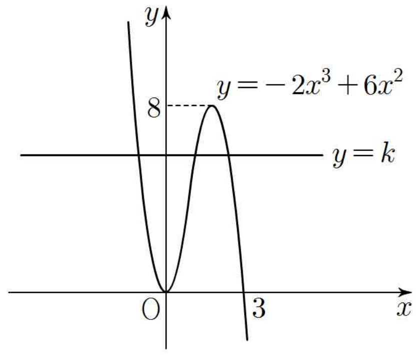
$f(x)=-2x^3+6x^2$이라 하면

$$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수인 두 점에서 만나려면

$$0<k<8$$

따라서 정수 k의 개수는 7이다.

47) [정답] 4

[해설]

$3x^4-4x^3-12x^2+k=0$에서 $3x^4-4x^3-12x^2=-k$

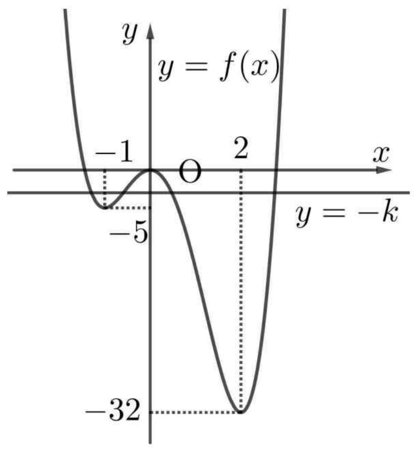
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$를 그리면 다음과 같다.



이 때 $3x^4-4x^3-12x^2=-k$이 서로 다른 4개의 실근을 가져야 하므로

$-5<-k<0$, $0<k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

48) [정답] 15

[해설]

곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2개가 되는 경우는 $y=k$가 극점을 지나는 경우이다.

즉, k는 극댓값 또는 극솟값이어야 한다.

$y=4x^3-12x+7$에서 $y'=12x^2-12$

$$12x^2-12=0,\ 12(x+1)(x-1)=0$$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$

따라서 곡선 $y=4x^3-12x+7$에서 $x=1$일 때, 극솟값 $y=4-12+7=-1$을 갖고, $x=-1$일 때, 극댓값 $y=-4+12+7=15$을 갖는다.

그런데 조건에서 $k>0$이므로 $k=15$

49) [정답] ④

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2-9x$ 라 하면

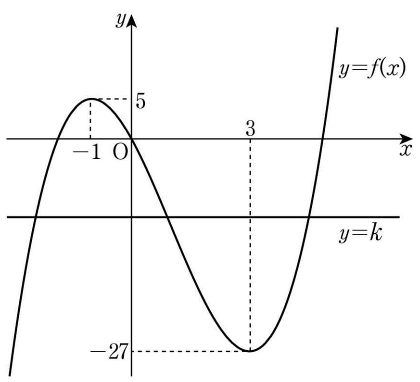
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=k$는 x축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$

그러므로 정수 k의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$

따라서 $M-m=4-(-26)=30$

50) [정답] **21**

[해설]

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\ge -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x,\ \frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를 $h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$라 하면

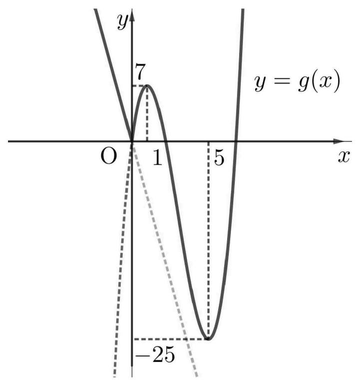
$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\ge 0)\end{cases}$이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$이므로 $h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $h(1)=1-9+15=7$을 갖고, $x=5$에서 극솟값 $h(5)=125-225+75=-25$를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$$1+2+3+\cdots+6=\frac{6}{2}(1+6)=21$$

51) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면

$h_1{}'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

$h_1(0)=4>0$이므로 방정식 $h_1(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0,\ x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$에 직선 $y=kx$가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$이라 하면 $h_2{}'(x)=3x^2-4x$에서 접

선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$

$(a-2)(a^2+a+2)=0,\ a=2$

따라서 구하는 k의 값은 $h_2{}'(2)=4$뿐이다. (참)

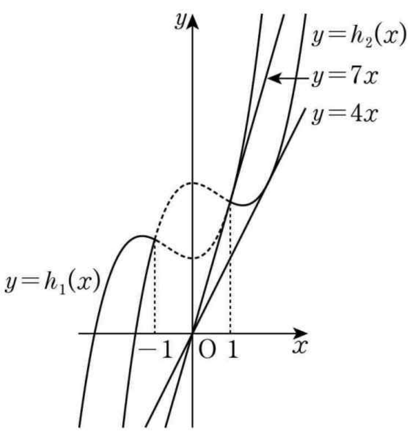
ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$에서 $2x^2-2\geq 0$이므로 x의 값의 범위는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이고, 주어진 방정식은

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$, 즉

$x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$, $h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$일 때 직선 $y=kx$와 곡선 $y=h_2(x)$가 접하므로 $k\leq 4$일 때 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$일 때, $x\leq -1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$이고 접점의 좌표는 $(1, 7)$이므로

$k>4$일 때, $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

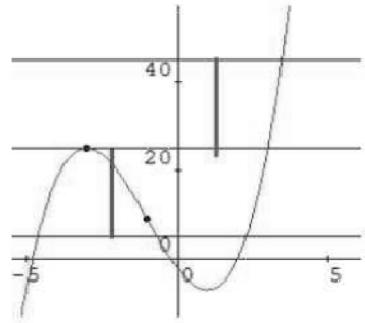
즉, $k>4$일 때, $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

52) [정답] ④

[해설]



주어진 조건을 만족하는 때는

$x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가질 때이고 구하는 m의 최댓값은 극댓값과 극솟값의 차이다

따라서

$f'(x)=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$

$f(x)=x^3+3x^2-9x+C$

$\therefore\ m=f(-3)-f(1)=32$

53) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

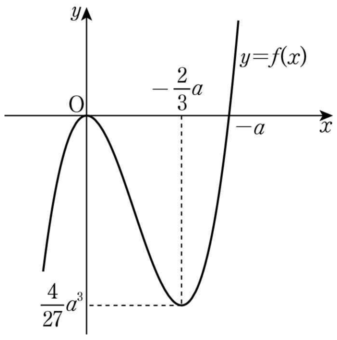
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{4}{27}a^3$	↗

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$이고 $a^3=-27$에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

54) [정답] 64

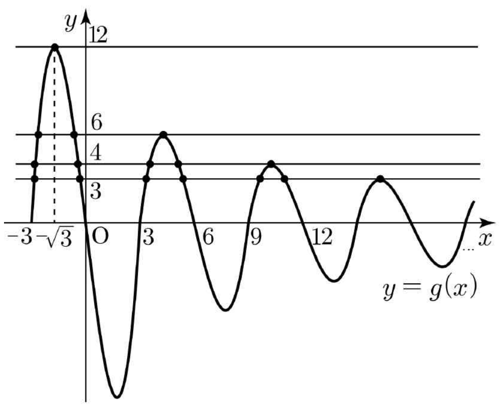
[해설]

$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에서

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	-12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여 $6k-3\le x<6k+3$일 때

함수 $g(x)=\frac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때, 함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로 $k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은 각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7\le n\le 11$일 때, $a_n=2\times1=2$이므로

$a_{12}=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$

55) [정답] 240

[해설]

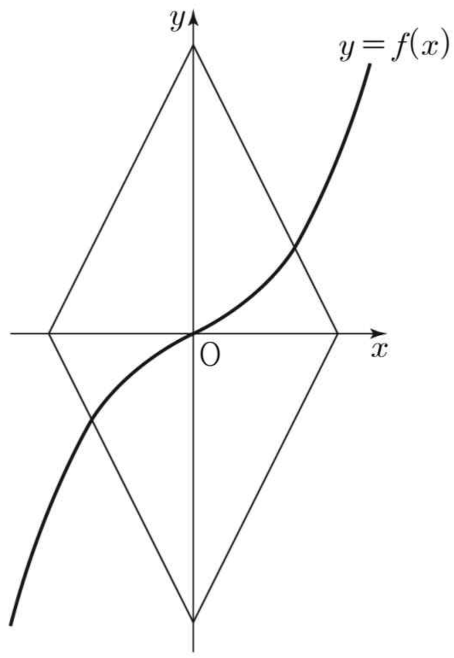
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(i) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ii) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우

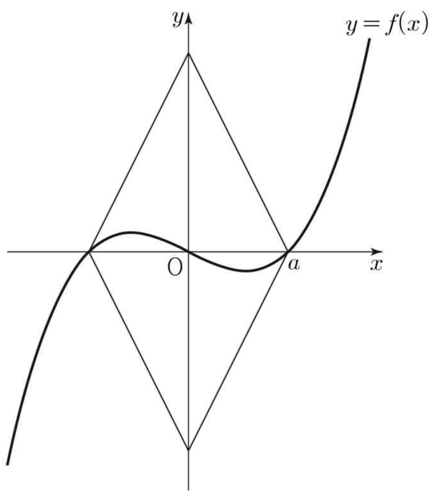
$f(x)=x(x-a)(x+a)(a>0)$이라 하자.

두 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 지나는 직선의 기울기는 t의 값에 관계없이 2이므로 $f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

(a) $f'(a)\le 2$일 때

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

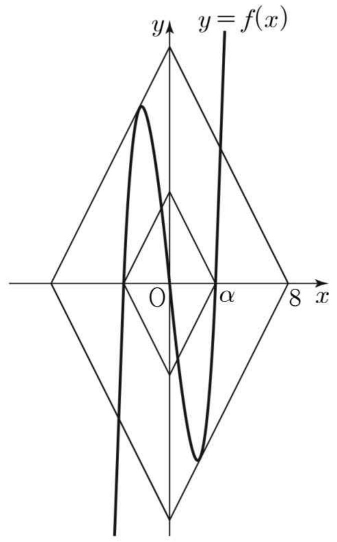


(b) $f'(a)>2$일 때

곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각 β, $-\beta(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로 $a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로

두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은

곡선 $y=f(x)$에 접한다.

직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는

점의 x좌표를 $p(0<p<\alpha)$라 하면

$p^3-\alpha^2p=2p-16\cdots\cdots$㉠

$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$

에서 $\alpha^2=3p^2-2\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$

에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$

따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times4)=240$

56) [정답] 58

[해설]

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq t)\\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$에서

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$$

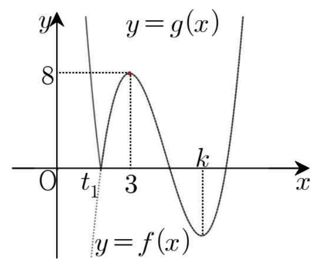
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

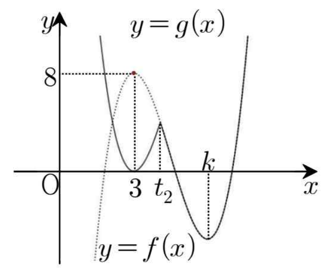
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

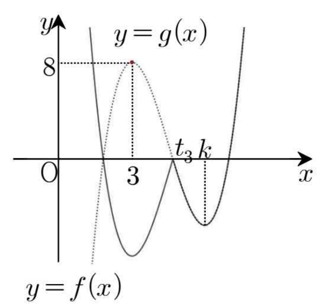
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

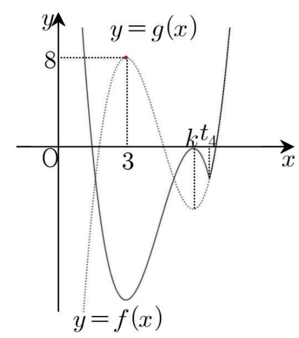
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

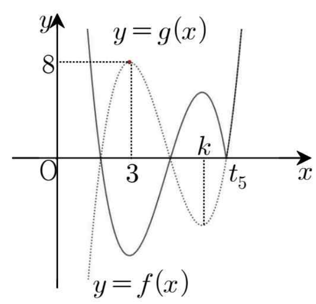
우선 $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.





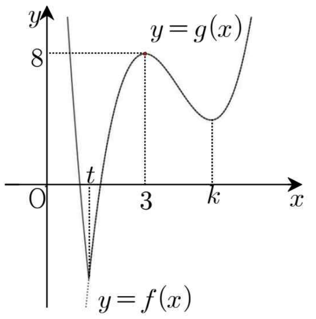




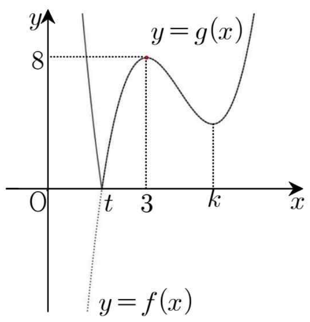


따라서 함수 $h(t)$는 $t=t_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.

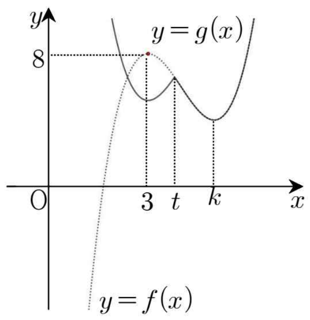
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



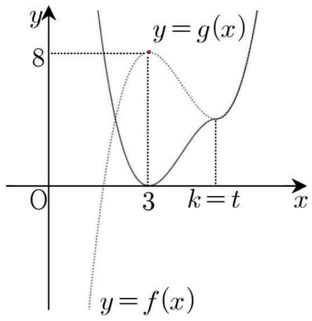
[교점 2개]



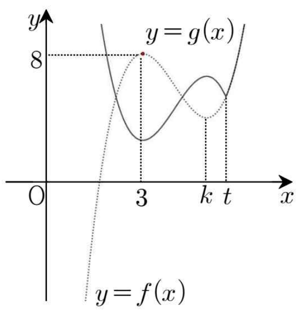
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$

즉 $-8+2f(k)=0$에서 $\quad f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서

극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$f'(x)=3(x-3)(x-k)$

$\quad\quad =3x^2-3(3+k)x+9k$

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\dfrac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$

$C=\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\dfrac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k=4,$

$-\dfrac{k^3}{2}+\dfrac{9}{2}k^2-\dfrac{27}{2}k+\dfrac{35}{2}=0,$

$k^3-9k^2+27k-35=0,$

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

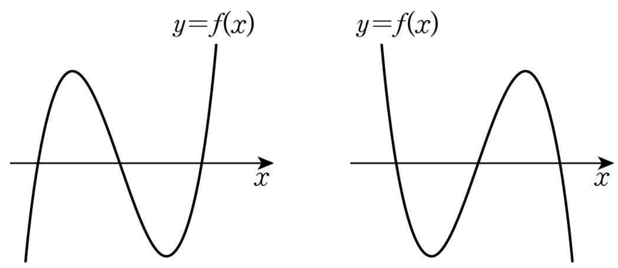
$f(8)=512-768+360-46=58$

57) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $\quad\quad$ $a<0$일 때



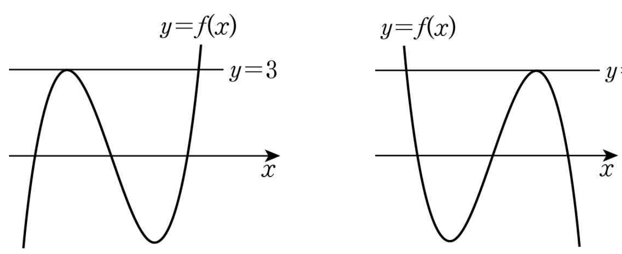
함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.

그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$

한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $\quad\quad$ $a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3

조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면

$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$

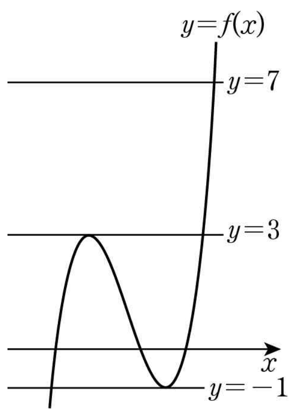
$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$

조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

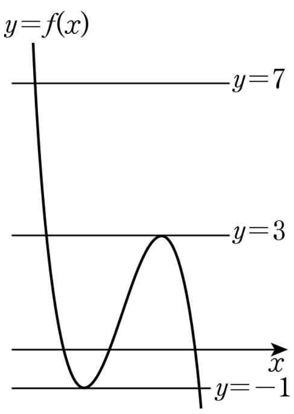
그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때



$a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1

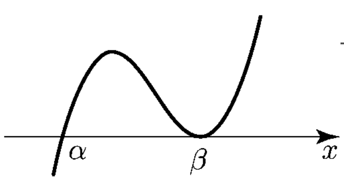
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로

그 합은 $3+(-1)=2$

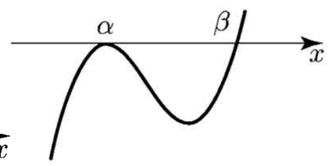
58) [정답] 61

[해설]

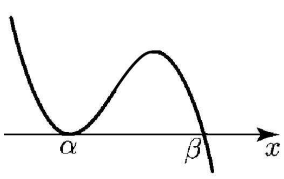
(가)조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 4가지 경우가 있다.



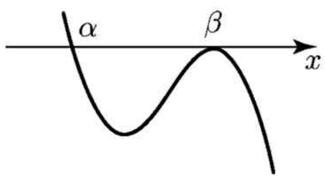
[그림1]



[그림2]



[그림3]



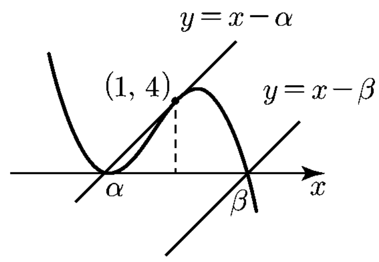
[그림4]

그런데, (나)조건 $f(x-f(x))=0$에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

즉, $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$이므로 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$를 그렸을 때 교점이 3개인 경우는 [그림3], [그림4]이다.

그런데, $f(1)=4$, $f'(1)=1$를 만족해야 하므로 [그림4]는 모순이다.



[그림3]

즉 [그림3]에서 (1, 4)에서 접하므로

$f(x)-(x-\alpha)=a(x-1)^2(x-\alpha)$라 놓을 수 있다.

그리고 $f(1)=4$이므로 $1-\alpha=4$, $\alpha=-3$

따라서 $f(x)-(x+3)=a(x-1)^2(x+3)$

또, $\alpha=-3$에서 $f(x)$가 접하므로 $f(x)$는 $(x+3)^2$의 인수를 가져야 한다.

㉠을 정리하면 $f(x)=(x+3)\{a(x-1)^2+1\}$

그런데, $a(x-1)^2+1$이 $x+3$의 인수를 가져야 하므로

$$a(-3-1)^2+1=0$$

$$\therefore 16a+1=0,\ a=-\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\right\} \\ &=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1)+1\right\} \\ &=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1-16)\right\} \\ &=(x+3)^2\left\{-\frac{1}{16}(x-5)\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore f(0)=9\times\frac{5}{16}=\frac{45}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=45$이므로 $p+q=16+45=61$

59) [정답] 11

[해설]

$f(x)=x^4-4x^3+16x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-11$	↗	$a+16$	↗

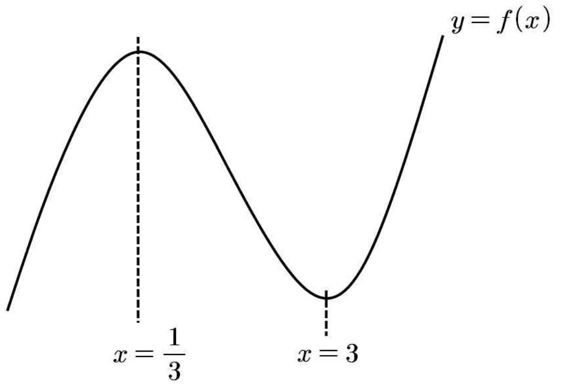
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-11$을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x^3+16x+a \geq 0$이 항상 성립하기 위해서는
$a-11 \geq 0$, $a \geq 11$
따라서 a의 최솟값은 11

60) [정답] 32

[해설]
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$
$=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소, $x=0$에서 극대이다.
이때 $f(-1)=-5+k$, $f(2)=-32+k$이므로
$f(-1)>f(2)$
모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면
$f(2)=-32+k \geq 0$ 즉, $k \geq 32$이어야 한다.
따라서 실수 k의 최솟값은 32이다.

61) [정답] 9

[해설]
$f(x)=x^3-5x^2+3x+n$이라 하자.
$f'(x)=3x^2-10x+3=0$에서 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$, $f'(3)=0$
즉, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 $f(0)=n$, $f(3)=n-9$이므로 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 최솟값은 $n-9$
따라서 $n-9 \geq 0$이므로 자연수 n의 최솟값은 9

62) [정답] ⑤

[해설]
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$
이때 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x) \geq 0$이 성립하려면 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.
$h'(x)=3x^2-2x-1$
$=(3x+1)(x-1)$
이므로 $h'(x)=0$ 에서

$$x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

$x \geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a \geq 0$이어야 한다.
따라서 $a \leq 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

63) [정답] 34

[해설]
모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k \leq g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.
(i) $f(x) \leq 12x+k$
모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다
$h(x)=f(x)-12x$라고 하면
$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,
$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$
$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	20	↘

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20
그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k \geq 20$
(ii) $g(x) \geq 12x+k$
모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다
부등식 $3x^2-12x+a-k \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k) \leq 0$, $k \leq a-12$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x+k$를

만족시키는 k의 값의 범위는 $k \leq a-12$

(i), (ii)에 의해 $20 \leq k \leq a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22 \leq a-12 < 23$

따라서 $34 \leq a < 35$이므로 자연수 a의 값은 34

64) [정답] ②

[해설]

주어진 조건에 의하여

$f(x)=a(x-1)^2+b$(b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2a(x-1)$이므로

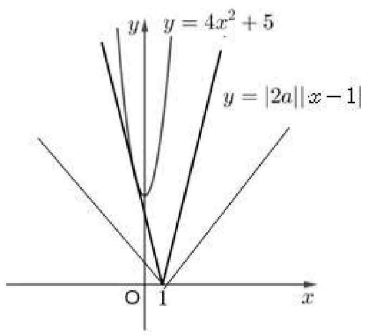
$|f'(x)| \leq 4x^2+5$에서

$|2a(x-1)| \leq 4x^2+5$ ……㉠

즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선

$y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|$, $y=4x^2+5$

가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을

$(k, 4k^2+5)(k<0)$이라 하면

$y'=8x$에서 $y-(4k^2+5)=8k(x-k)$이 접선이

점 $(1, 0)$을 지나므로

$4k^2-8k-5=0$

$(2k-5)(2k+1)=0$

$k=-\dfrac{1}{2}$

즉, 접선의 기울기는

$8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$ 이므로

$-|2a|=-4$, $|a|=2$

$a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

65) [정답] ④

[해설]

시각 t에서의 속도를 v라 하면 $x=t^3+kt^2+kt$에서

$$v=3t^2+2kt+k$$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서 $v=0$

그러므로 $3+2k+k=0$에서 $k=-1$

시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$$a=6t+2k=6t-2$$

따라서 $t=2$에서 점 P의 가속도는 $6\times2-2=10$

66) [정답] 30

[해설]

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의

속도 v는 $v=6t^2-2kt$

가속도 a는 $a=12t-2k$

$t=1$일 때, $v=6-2k=0$이므로 $k=3$

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는

$12\times3-2\times3=30$