[수학2] [02미분계수-접방] 교사평경 최근 3개년

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

01 미분계수1 (평균변화율)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 7

1. 함수 $f(x)=x^3+x^2-2x$에서 x의 값이 0에서 k까지 변할 때의 평균변화율이 10일 때, 양수 k의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

02 미분계수2 (평균변화율과 미분계수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 26

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

04 미분계수4 (극한식의 해석, 무한소로 갈때)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 10

3. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-4}{2h} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(3)+f'(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

05 미분계수5 (극한식의 해석, 특정값으로 갈때)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 4

4. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 3$일 때,

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

06 미분계수6 (극한식의 해석, 식 변형)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 12

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5$
>
> (나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1)$일 때, ab의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

02 미분법 공식1 (공식과 미분계수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 6

6. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

① 35 ② 37 ③ 39
④ 41 ⑤ 43

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 23

7. 함수 $f(x)=x^4+3x^2+7x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 23

8. 함수 $f(x)=x^4+3x^2+9x-27$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 2

9. 함수 $f(x)=x^3+7x+1$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 2

10. 함수 $f(x)=x^3-2x-7$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 23

11. 곡선 $y=4x^3-5x+9$ 위의 점 $(1,\ 8)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 2

12. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 3

13. 함수 $f(x)=x^3+3x+1$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 2

14. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 16

15. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 3

16. 함수 $f(x)=x^2-ax$에 대하여 $f'(1)=0$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 16

17. 함수 $f(x)=2x^2+ax+3$에 대하여 $x=2$에서의 미분계수가 18일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 7

18. 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 18

19. 함수 $f(x)=x^3+ax$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a에 대하여 $3a^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 19

20. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 2

21. 함수 $f(x)=x^3+7x-4$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 2

22. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$에 대하여 $f'(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 3

23. 함수 $f(x)=x^3+2x+7$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 6

24. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다.
$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

03 미분법 공식2 (극한식의 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 4

25. 함수 $f(x)=x^3-2x^2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 9

26. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=9$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 4

27. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+ax+6$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}=1$$

일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 2

28. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 2

29. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

05 미분법 공식4 (곱의 미분법)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 22

30. 함수 $f(x)=(2x+3)(x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 4

31. 함수 $f(x)=(x^3-2x+3)(ax+3)$에 대하여 $f'(1)=15$일 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 16

32. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 16

33. 함수 $f(x)=(x+3)(x^3+x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 2

34. 함수 $f(x)=(x^3-2x^2+3)(ax+1)$에 대하여 $f'(0)=15$일 때, 상수 a의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

06 미분법 공식5 (곱의 미분법, 극한식의 해석)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 17

35. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x \to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 17

36. $f(1)=-2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$

(나) $g(0)=g'(0)$

$f'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 15

37. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a+2}{x-1}=4,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)+a-2}{x-1}=a$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 -1일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 19

38. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4}=2,\ \lim_{x \to 2} \frac{g(x)+1}{x-2}=8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

39. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(1)=2,\ g(1)=0,\ f'(1)=0,\ g'(1)=2$$

일 때, $\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{4} \left\{ xf\left(1+\frac{3^k}{x}\right)g\left(1+\frac{3^k}{x}\right) \right\}$의 값은?

① 400 ② 440 ③ 480
④ 520 ⑤ 560

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

07 미분법 공식6 (적절한 수치대입)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 5

40. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 17

41. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

42. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

01 활용1 (함수 구하기, 인수정리)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 11

43. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

02 활용2 (함수 구하기, 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 13

44. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 9
④ 16 ⑤ 25

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 28

45. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$

(나) 1이 아닌 상수 α에 대하여

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha$이다.

$\alpha\times f(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 7

46. $f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

47. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

07 활용7 (조건항등식, 미정계수법)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 9

48. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)-3f(x)=2x^2-8x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

04 미분가능조건1 (구간정의함수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 10

49. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 12

50. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-ax+2b & (x<1) \\ -3x+b & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 8

51. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x<a) \\ 2x+b & (x\geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

06 미분가능조건3 (곱함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 7

52. 두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 14

53. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

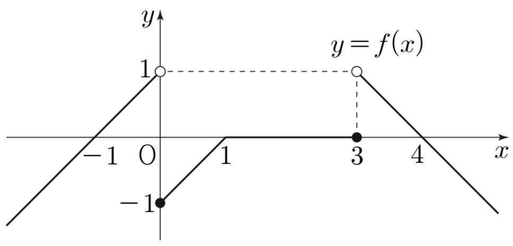
<보 기>

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



04 수2 03 미분계수와 도함수

05 기타

02 임시분류

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

54. 곡선 $y=x^3-x^2$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선의 기울기가 8이다. 점 $(0, 2)$를 중심으로 하는 원 S가 있다. 두 점 $\mathrm{B}(0, 4)$와 원 S 위의 점 X에 대하여 두 직선 OA와 BX가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$의 최댓값이 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$가 되도록 하는 원 S의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ ② $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{17\sqrt{5}}{20}$

④ $\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\dfrac{19\sqrt{5}}{20}$

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

01 접점1 (접선의 방정식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 24

55. 곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선이 점 $(0, a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 6

56. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=6$일 때, 양수 a의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 17

57. 함수 $f(x)=3x^3-x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 원점을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

02 접점2 (법선의 방정식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 9

58. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

05 기울기2 (접점의 좌표)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

59. 곡선 $y=-x^3+3x^2+4$에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

07 곡선 밖의 점1 (접선의 방정식)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

60. 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

08 곡선 밖의 점2 (접점의 좌표)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 9

61. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은?

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

01 활용1 (접선과 교점의 관계)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

62. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=x^3+kx^2+(2k-1)x+k+3$$

의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 곡선 $y=f(x)$위의 점 P에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 오직 한 점에서 만난다고 할 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 8

63. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

02 활용2 (접선에 대한 조건)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

64. 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선이 서로 수직이고

$$a^2+b^2 \le \frac{37}{16}$$

일 때, $a+b$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 하자. pq의 값은?

① $-\frac{33}{16}$ ② $-\frac{35}{16}$ ③ $-\frac{37}{16}$
④ $-\frac{39}{16}$ ⑤ $-\frac{41}{16}$

04 수2
04 접선의 방정식
02 접선의 방정식의 활용
04 활용4 (곡선과 원의 접선)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

65. 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선을 l이라 하자. 중심이 y축 위에 있는 원이 점 $(1,2)$에서 직선 l에 접할 때, 이 원의 넓이는?

① $\frac{5}{9}\pi$　② $\frac{8}{9}\pi$　③ π
④ $\frac{10}{9}\pi$　⑤ $\frac{13}{9}\pi$

04 수2
04 접선의 방정식
02 접선의 방정식의 활용
05 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 10

66. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은?

① -18　② -17　③ -16
④ -15　⑤ -14

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

06 활용6 (정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

67. 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2$의 그래프 위의 두 점 $(t,\ f(t))$와 $(t+1,\ f(t+1))$에서의 접선의 y절편을 각각 $g_1(t)$와 $g_2(t)$라 하자. 함수 $h(t)=|g_1(t)-g_2(t)|$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

04 수2 04 접선의 방정식

03 평균값의 정리

04 평균값의 정리3 (부등식의 해석)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 8

68. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은?

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[수학2] [02미분계수-접방] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.28

1. [정답] ①
2. [정답] 3
3. [정답] ①
4. [정답] ④
5. [정답] ③

6. [정답] ①
7. [정답] 17
8. [정답] 19
9. [정답] ④
10. [정답] ①

11. [정답] 7
12. [정답] ⑤
13. [정답] ③
14. [정답] ⑤
15. [정답] 2

16. [정답] ②
17. [정답] 10
18. [정답] ⑤
19. [정답] 13
20. [정답] 11

21. [정답] ⑤
22. [정답] ②
23. [정답] ①
24. [정답] ③
25. [정답] ③

26. [정답] ③
27. [정답] ⑤
28. [정답] ①
29. [정답] ②
30. [정답] 22

31. [정답] ②
32. [정답] 10
33. [정답] 18
34. [정답] ②
35. [정답] ①

36. [정답] ①
37. [정답] ③
38. [정답] 24
39. [정답] ③
40. [정답] ③

41. [정답] 10
42. [정답] ③
43. [정답] ②
44. [정답] ③
45. [정답] 18

46. [정답] ④
47. [정답] ②
48. [정답] ③
49. [정답] ④
50. [정답] ④

51. [정답] ②
52. [정답] ③
53. [정답] ④
54. [정답] ②
55. [정답] 10

56. [정답] ③
57. [정답] 6
58. [정답] ①
59. [정답] ①
60. [정답] ④

61. [정답] ②
62. [정답] ③
63. [정답] ①
64. [정답] ②
65. [정답] ④

66. [정답] ⑤
67. [정답] ①
68. [정답] ③

[수학2] [02미분계수-접방] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.28

1) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)=x^3+x^2-2x$에서 x의 값이 0에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{(k^3+k^2-2k)-0}{k-0}=k^2+k-2$

$k^2+k-2=10$

$(k+4)(k-3)=0$에서 $k=-4$ 또는 $k=3$

따라서 양수 k의 값은 3

2) [정답] 3

[해설]

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$

$=a^2-3a+5$

또 $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로

$f'(2)=12-12+5=5$

따라서 $a^2-3a+5=5$에서

$a(a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

3) [정답] ①

[해설]

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$이고 $\lim_{h\to0}2h=0$이므로

$\lim_{h\to0}\{f(3+h)-4\}=0$, $f(3)=4$

$\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{f'(3)}{2}=1$

$f'(3)=2$

따라서 $f(3)+f'(3)=6$

4) [정답] ④

[해설]

미분계수의 정의에 의하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=3$

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)$

$=2f'(2)$

$=6$

5) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이다. 즉, $f(1)=g(1)\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=5$

즉, $f'(1)-g'(1)=5\cdots\cdots$ ㉡

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1}$
$=7$

즉, $f'(1)+g'(1)=7\cdots\cdots$ ㉢

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이다.

즉, $a=f(1)$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

㉠에서 $f(1)=g(1)$ 이므로 $f'(1)=b\times f(1)=ab$

㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$

따라서 $ab=6$

6) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^4+3x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3+3$

$x=2$를 대입하면 $f'(2)=32+3=35$

7) [정답] 17

[해설]

$f'(x)=4x^3+6x+7$이므로

$f'(1)=4+6+7=17$

8) [정답] 19

[해설]

$f'(x)=4x^3+6x+9$이므로 $f'(1)=19$

9) [정답] ④

[해설]

$f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(0)=7$

10) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2-2$

따라서

$f'(1)=3\times1^2-2=1$

11) [정답] 7

[해설]

$f(x)=4x^3-5x+9$라 하면

$f'(x)=12x^2-5,\ f'(1)=7$

12) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=2x^3+4x+5$에서 $f'(x)=6x^2+4$이므로

$f'(1)=6+4=10$

13) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=3x^2+3$에서 $f'(1)=3+3=6$

14) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

15) [정답] 2

[해설]

$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$

$f'(1)=2+a=4$에서 $a=2$

16) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=2x-a$이므로 $f'(1)=2-a=0$

따라서 $a=2$

17) [정답] 10

[해설]

$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=8+a=18$에서 $a=10$

18) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지

변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(64-12)-(1-3)}{3}=18$$

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(k,\ f(k))$에서의

접선의 기울기는 $f'(k)=3k^2-3$이므로

$3k^2-3=18,\ k^2=7$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{7}$

19) [정답] 13

[해설]

$f'(x)=3x^2+a$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같으므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(a)$$

$$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2}=3a^2+a$$

따라서 $3a^2=13$

20) [정답] 11

[해설]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{64-96+20}{4}=-3$$

또한, $f'(x)=3x^2-12x+5$이므로

$$3a^2-12a+5=-3,\ 3a^2-12a+8=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$

21) [정답] ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2+7$에서 $f'(1)=10$

22) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=3x^2+4x+3$이므로

$f'(-1)=3-4+3=2$

23) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=5$

24) [정답] ③

[해설]

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.

한편 $f'(x)=4x-3$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$$

$$=2f'(a)$$

$$=2f'(2)=10$$

25) [정답] ③

[해설]

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2\right\}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=2f'(2)$$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(2)=3\times 2^2-4\times 2=4$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\times 4=8$

26) [정답] ③

[해설]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

한편, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$에서 $f'(2)=9$

$f(x)=x^3-2x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x+a$

그러므로 $f'(2)=3\times 2^2-4\times 2+a=a+4$

따라서 $a+4=9$에서 $a=5$

27) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{f(h)}$$

$$=f'(2)\times\frac{1}{f(0)}=1$$

$f'(2)=f(0)=6$이므로 $f'(x)=3x^2-8x+a$에서

$f'(2)=-4+a=6$

$\therefore a=10$

28) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)=2x^2+5$에서 $f'(x)=4x$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4\cdot 2=8$

29) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$

이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=3\times 2^2=12$

30) [정답] 22

[해설]

$f'(x)=(2x+3)'\times(x^2+5)+(2x+3)\times(x^2+5)'$

$=2(x^2+5)+(2x+3)\times 2x$

$=6x^2+6x+10$

$f'(1)=6+6+10=22$

31) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=(3x^2-2)(ax+3)+(x^3-2x+3)a$

$f'(1)=15=(a+3)+2a$

$\therefore\ a=4$

32) [정답] 10

[해설]

곱의 미분법에 의해 함수 $f(x)g(x)$의 도함수는

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$f'(x)=4x+5,\ g'(x)=3x^2$이므로

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\times 2+3\times 0=10$

33) [정답] 18

[해설]

$f(x)=(x+3)(x^3+x)$의 양변을 미분하면

$f'(x)=1\cdot(x^3+x)+(x+3)(3x^2+1)$

따라서 $f'(1)=2+4\cdot 4=18$

34) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=(3x^2-4x)(ax+1)+a(x^3-2x^2+3)$에서

$f'(0)=3a=15$

$\therefore a=5$

35) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+g(0)=0\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$

$=f'(0)+g'(0)=3$ ……㉡

또 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$이므로 ㉠에서 $g(0)=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$

$=\frac{f'(0)}{g(0)}=\frac{f'(0)}{3}=2$

에서 $f'(0)=6$

㉡에서 $g'(0)=-3$

따라서

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=6\times 3+(-3)\times(-3)=27$

36) [정답] ①

[해설]

(가)에서 $\lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠

$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=a$ …… ㉡

(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1$, $b=1$

㉡에서 $g'(1)=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$

따라서 $f'(1)=5$

37) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a+2}{x-1}=4$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-a+2\}=0$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=a-2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+a-2}{x-1}=a$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)+a-2\}=0$

함수 $g(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=-a+2$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+a-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=a$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=4\times(-a+2)+(a-2)\times a$

$=a^2-6a+8=-1$

$a^2-6a+9=0$에서 $(a-3)^2=0$

따라서 $a=3$

38) [정답] **24**

[해설]

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)=2$$

따라서 $f'(2)=8$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$에서 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

39) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4}\left\{xf\left(1+\frac{3^k}{x}\right)g\left(1+\frac{3^k}{x}\right)\right\}$에서 $\frac{1}{x}=h$, $p(x)=f(x)g(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4}\left\{xf\left(1+\frac{3^k}{x}\right)g\left(1+\frac{3^k}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{4}\frac{p(1+3^kh)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{4}\frac{p(1+3^kh)-p(1)}{3^kh}\cdot3^k$ $(\because p(1)=f(1)g(1)=0)$

$=\sum_{k=1}^{4}p'(1)\cdot3^k$

$=\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}\sum_{k=1}^{4}3^k$

$=4\sum_{k=1}^{4}3^k$

$=4\times\frac{3(3^4-1)}{3-1}$

$=480$

40) [정답] ③

[해설]

$g(x)=(x^2+3)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

따라서 $g'(1)=2f(1)+4f'(1)=2\times2+4\times1=8$

41) [정답] 10

[해설]
$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$이므로
$g'(1)=f(1)+2f'(1)=10$

42) [정답] ③

[해설]
$g(x)=x^2f(x)$를 x에 대하여 미분하면
$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$
이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로
$$g'(2)=4f(2)+4f'(2)$$
$$=4\times1+4\times3$$
$$=16$$

43) [정답] ②

[해설]
세 실근을 a, ar, ar^2이라 하면
$f(x)=(x-a)(x-ar)(x-ar^2)+9$
$=x^3-a(1+r+r^2)x^2+a^2r(1+r+r^2)x-(ar)^3+9$
$f'(x)=3x^2-2a(1+r+r^2)x+a^2r(1+r+r^2)$
$f(0)=-(ar)^3+9=1$
$f'(2)=12-4a(1+r+r^2)+a^2r(1+r+r^2)$
$=-2$
$ar=2$, $a(1+r+r^2)=7$
$\therefore f(3)=27-63+42+1=7$

44) [정답] ③

[해설]
이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고
함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하므로
$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)
$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로
$f'(x)=2(x-a)$
$g(x)=(x-3)f'(x)=2(x-a)(x-3)$
$=2x^2-2(a+3)x+6a$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로
x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$
따라서 $f(x)=(x+3)^2$에서 $f(0)=3^2=9$

45) [정답] 18

[해설]
조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$이고
$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=0$ …… ㉠
조건 (나)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha\,(\alpha\neq1)$이고
$\lim_{x\to2}(x-2)f'(x)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의해
$f(x)=k(x-1)(x-2)(x+a)$ (k, a는 상수, $k\neq0$)
$f'(x)=k\{(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)\}$
$a\neq-2$라 하면
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)}$$
$$=\frac{2+a}{2+a}$$
$$=1\neq\alpha$$
그러므로 $a=-2$이며 $f(x)=k(x-1)(x-2)^2$
$$\alpha=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2+2k(x-1)(x-2)\}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)}{(x-2)+2(x-1)}$$
$$=\frac{1}{0+2\times1}=\frac{1}{2}$$
조건 (가)에서
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$이므로 $k=3$
따라서 $\alpha\times f(4)=\frac{1}{2}\times(3\times3\times2^2)=18$

46) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로
$\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$
$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로 $f(3)=g(3)$이고
$f(3)=2$이므로 $g(3)=2$
$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$$
$$=f'(3)-g'(3)=1$$
$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2,\ g'(3)=6+a=0$에서

$a=-6,\ b=11$

따라서 $g(1)=1-6+11=6$

47) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$,

$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1-}\{2f(1)-f(x)\}=f(1)$,

$g(1)=2f(1)-f(1)=f(1)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$에서 극한값이

존재하고 (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

$\lim_{h\to 0+}\{g(-1+h)+g(-1-h)-6\}=0$에서 $g(-1)=3$

$\therefore f(-1)=3$

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\frac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}\right\}$

$=g'(-1)-g'(-1)$

$=0$

$\therefore a=0$

또한, $g(1)=1$에서 $f(1)=1$

$f(x)=x^2+px+q$라 하면

$f(-1)=3$에서 $1-p+q=3,\ p-q=-2$ …… ㉠

$f(1)=1$에서 $1+p+q=1,\ p+q=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $p=-1,\ q=1$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$g(a)=g(0)=f(0)=1$ (참)

ㄷ. $b\neq 1$이면 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=0$이므로 $b=1$이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}=4$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

$\lim_{h\to 0+}\{g(1+h)+g(1-h)-6\}=0$에서

$g(1)=3\qquad \therefore f(1)=3$

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{2f(1)-f(1+h)+f(1-h)-6}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1-h)-f(1+h)}{h}$

$=-2f'(1)$

따라서 $-2f'(1)=4$에서 $f'(1)=-2$

$f(x)=x^2+rx+s$라 하면 $f'(x)=2x+r$

$f(1)=3$에서 $1+r+s=3,\ r+s=2$ …… ㉢

$f'(1)=-2$에서 $2+r=-2,\ r=-4$

$r=-4$를 ㉢에 대입하면 $s=6$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로

$g(4)=2f(1)-f(4)=6-6=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

48) [정답] ③

[해설]

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하자.

(i) $n\le 1$일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $n=2$일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.

(iii) $n\ge 3$일 때, 주어진 등식의 좌변의 n차항의 계수가 $n-3$이고 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$xf'(x)-3f(x)=x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx)$

$=-ax^2-2bx$

주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$-a=2,\ -2b=-8$에서

$a=-2,\ b=4$이고 $f(x)=x^3-2x^2+4x$

따라서 $f(1)=1-2+4=3$

49) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능 하다.

$f(1)=b+4$이므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{bx+4-b-4}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{b(x-1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1+} b = b \cdots\cdots$ ㉠

이고

$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{x^3+ax+b-b-4}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{x^3+ax-4}{x-1} \cdots\cdots$ ㉡

이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값이 존재해야 하므로

㉠, ㉡에서

$\lim_{x \to 1-} \frac{x^3+ax-4}{x-1} = b \cdots\cdots$ ㉢

이어야 한다.

이때 $x \to 1-$일 때 (분모)$\to 0$이고 ㉢이 수렴하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1-} (x^3+ax-4) = 1+a-4=0$에서

$a=3$

이때 ㉢에서

$b = \lim_{x \to 1-} \frac{x^3+3x-4}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} (x^2+x+4)$

$= 1^2+1+4$

$= 6$

따라서

$a+b=3+6=9$

50) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$에서

$1-a+2b=-3+b$

$b=a-4$

$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(x^3-ax+2b)-(-3+b)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{x^3-ax+a-1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} (x^2+x+1-a)$

$=3-a$

$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(-3x+b)-(-3+b)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{-3x+3}{x-1}$

$=-3$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$3-a=-3$에서 $a=6$이고 $b=2$

따라서 $a \times b = 12$

51) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=a$에서 미분가능하다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$에서

$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} (x^2-2x) = a^2-2a$

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} (2x+b) = 2a+b$

$f(a) = 2a+b$

$\therefore a^2-2a=2a+b,\ b=a^2-4a \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하여야 한다.

$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a-} \frac{x^2-2x-(2a+b)}{x-a}$

$= \lim_{x \to a-} \frac{x^2-2x-a(a-2)}{x-a}$

$= \lim_{x \to a-} \frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a}$

$=2a-2$

$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{2x+b-(2a+b)}{x-a}$

$= \lim_{x \to a+} \frac{2(x-a)}{x-a}$

$=2$

따라서 $2a-2=2$에서 $a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

이상에서 $a+b=-2$

52) [정답] ③

[해설]

$f(x)g(x)=\begin{cases} -(x+3)(2x+a) & (x<-3) \\ (x+3)(2x+a) & (x\geq -3) \end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=-3$에서 미분가능하다. 즉,

$\lim_{x\to -3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$

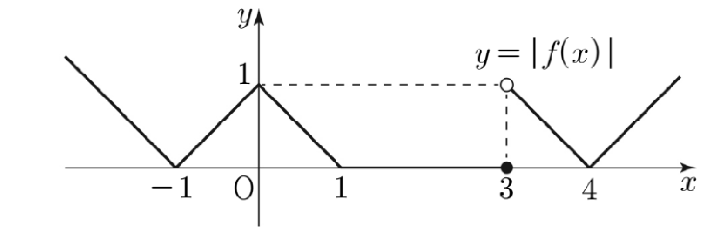
$\lim_{x\to -3-}(-2x-a)=\lim_{x\to -3+}(2x+a)$

따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

53) [정답] ④

[해설]

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의

그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로

함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-}f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)$,

$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$에서

$\lim_{x\to 0-}g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이

되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(i) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}$

$=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}$

$=-1$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ii) $k=-2$일 때

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(iii) $k=-1$일 때

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}$

$=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은

$-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

54) [정답] ②

[해설]

$y=x^3-x^2$ 위의 점을 $\mathrm{A}(t,\ t^3-t^2)$라 하면

$y'=3x^2-2x$에서 점 A에서의 기울기는 $3t^2-2t$이므로

$3t^2-2t=8$, $(t-2)(3t+4)=0$

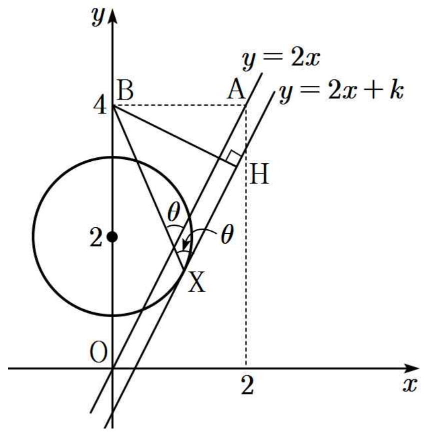
$\therefore t=2(\because\ t>0)$

따라서 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$이다.

두 직선 OA와 BX가 이루는 예각의 크기가 θ이고, 직선

OA의 기울기가 2이므로 θ는 직선 BX와 점 X를 지나고

기울기가 2인 직선이 이루는 예각과 같다.



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta=\overline{\mathrm{BH}}$이므로 $\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$의 최대는 $\overline{\mathrm{BH}}$가 최대일 때이다.

$\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$, 즉 $\overline{\mathrm{BH}}$의 최댓값이 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$이므로 두 점 X, H를 지나는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 점 B(0, 4)에서 직선 $2x-y+k=0$까지의 거리가 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

$\frac{|k-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $|k-4|=6$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=10$

그런데 θ가 예각이므로 $k=-2$

즉, $y=2x-2$

따라서 원 S의 반지름을 r이라 하면 중심 (0, 2)에서 직선 $2x-y-2=0$과의 거리가 r이므로

$r=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

55) [정답] 10

[해설]

$y=x^3-6x^2+6$에서

$y'=3x^2-12x$이므로 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$3\times1^2-12\times1=-9$

따라서 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식은

$y-1=-9(x-1)$

$y=-9x+10$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=-9\times0+10=10$

56) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

$f(1)=a+1$, $f'(1)=1$이므로

곡선 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(x-1)+a+1$, 즉 $y=x+a$

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a,\ 0)$, $(0,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=6$에서 $\sqrt{a^2+a^2}=6$, $a^2=18$

$a>0$이므로 $a=3\sqrt{2}$

57) [정답] 6

[해설]

$f(x)=3x^3-x+a$에서 $f'(x)=9x^2-1$

$f(1)=a+2$이고, $x=1$일 때의 접선의 기울기는

$f'(1)=8$이므로 접선의 방정식은

$y-(a+2)=8(x-1)$, $y=8x+a-6$

이 접선이 원점을 지나므로 대입하면

$0=a-6$

$\therefore a=6$

58) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$의 도함수는 $y'=3x^2-6x+2$

즉, 점 A(0, 2)에서의 접선의 기울기는 2이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 A(0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-0)+2$$

즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$이다.

따라서 직선의 x절편은 $y=0$일 때 $x=4$

59) [정답] ①

[해설]

$y'=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$이므로 $x=1$, $y=6$일 때 기울기는 3으로 최대이다.

따라서 직선 l은 $y=3(x-1)+6=3x+3$

구하는 도형의 넓이는

$S=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$

60) [정답] ④

[해설]

$y=x^3-x+2$에서 $\quad y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\, t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$$

이 직선이 점 $(0,\,4)$를 지나므로

$$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$$

$$t^3=-1, \qquad t=-1$$

따라서 점 $(0,\,4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$$y-2=2(x+1), \qquad y=2x+4$$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

61) [정답] ②

[해설]

접점의 x좌표를 t라 하면 $y'=-3x^2-2x+1$

$y=(-3t^2-2t+1)(x-t)-t^3-t^2+t$

$0=3t^3+2t^2-t-t^3-t^2+t$

$2t^3+t^2=0,\ t^2(2t+1)=0$

$t=0,\ -\dfrac{1}{2},\ y'=1,\ \dfrac{5}{4},\ \therefore 1+\dfrac{5}{4}=\dfrac{9}{4}$

62) [정답] ③

[해설]

k값에 관계없이 성립하므로 k에 관한 항등식이다.

즉, $x^2+2x+1=0$이므로 $x=-1$

따라서 점 P는 P$(-1,\ 3)$

점 P에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 오직 한 점에서 만나므로 점 P는 변곡점이다.

$$f'(x)=3x^2+2kx+2k-1$$

$$f''(x)=6x+2k$$

$f''(-1)=0$이므로 $-6+2k=0$

$$\therefore k=3$$

63) [정답] ①

[해설]

$y=x^3-4x+5$을 미분하면 $y'=3x^2-4$이므로 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\,2)$에서의 접선의 방정식은

$y=-(x-1)+2=-x+3$

이다. 이 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$와 $x=t$에서 접한다고 하면

$t^4+3t+a=-t+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\quad 4t^3+3=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

이고, 식 ㉡에서 $t=-1$이므로 이를 식 ㉠에 대입하면

$\therefore\ a=6$

64) [정답] ②

[해설]

곡선 $y=x^2$ 위의 점을 $(t,\ t^2)$이라 하면 접선의 기울기는 $y'=2x$에서 $m=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

그런데 이 접선이 $(a,\ b)$를 지나므로 $b-t^2=2t(a-t)$

즉, $t^2-2at+b=0$

이차방정식 $t^2-2at+b=0$을 만족하는 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta=b$

그런데, 두 접선이 서로 수직이므로 $2\alpha\cdot2\beta=-1$이어야 한다.

따라서 $4b=-1,\ b=-\dfrac{1}{4}$

조건에서 $a^2+b^2\le\dfrac{37}{16}$이므로 $a^2+\dfrac{1}{16}\le\dfrac{37}{16}$

즉, $a^2\le\dfrac{9}{4}$이므로 $-\dfrac{3}{2}\le a\le\dfrac{3}{2}$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=\dfrac{3}{2}$일 때이고, 최솟값은 $a=-\dfrac{3}{2}$일 때이므로

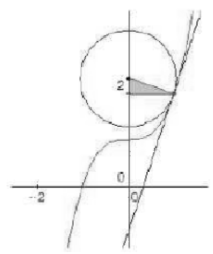
최댓값 p는 $p=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

최솟값 q는 $q=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{4}$

$\therefore pq=-\dfrac{35}{16}$

65) [정답] ④

[해설]



그림과 같이 원의 반지름의 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이므로

중심은 $\left(0,\ 2+\dfrac{1}{3}\right)$

따라서 반지름 r에 대하여

$S=\left(1+\dfrac{1}{9}\right)\pi=\dfrac{10}{9}\pi$

66) [정답] ⑤

[해설]

점 $(0,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(0)=0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=f'(0)(x-0)$, $y=f'(0)x$ …… ㉠

점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점이므로

$1\times f(1)=2$, $f(1)=2$

$y=xf(x)$에서 $y'=f(x)+xf'(x)$이므로

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)$, $y=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$y=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉡

$f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq 0)$이라 하면

$f(0)=0$에서 $d=0$

이때 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

$f(1)=2$에서 $a+b+c=2$ …… ㉢

한편, ㉠, ㉡에서 두 접선이 일치하므로

$f'(0)=f'(1)+2$이고 $-f'(1)=0$

즉, $f'(1)=0$, $f'(0)=2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서 $c=2$

이때 $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+2=0$ …… ㉣

㉢에 $c=2$를 대입하면 $a+b=0$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로

$f'(2)=-24+8+2=-14$

67) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2+2x$이고, $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$(t+1,\ f(t+1))$에서의 접선의 방정식은

$$y=(3(t+1)^2+2(t+1))(x-t-1)+(t+1)^3+(t+1)^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 각각의 y절편 $g_1(t)$, $g_2(t)$를 구하면

$$g_1(t)=-2t^3-t^2,\ g_2(t)=-2(t+1)^3-(t+1)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore h(t)&=|g_1(t)-g_2(t)|\\&=|6t^2+8t+3|\\&=\left|6\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right|\end{aligned}$$

따라서 $h(t)$의 최솟값은 $t=-\dfrac{2}{3}$일 때 $\dfrac{1}{3}$

68) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ …㉠

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\ge 5$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{f(5)-3}{4}\ge 5$

$f(5)\ge 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.