

2016학년도 KUME 6월 모의평가

집필 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부
조용환 김민정 장재혁 이경민 황현정
정수연 박성은 심준보 이동선 김정문
심재운 신문성

검토 정성현(고려대학교 수학교육과)
정흥기(고려대학교 수학교육과)
오명훈(고려대학교 수학교육과)
김동현(고려대학교 수학교육과)
정철호(고려대학교 수학교육과)
김병수(고려대학교 수학교육과)
양병호(고려대학교 수학교육과)
황정식(고려대학교 수학교육과)
조기강(D&T 수학연구소)

본 모의평가에 대한 저작권은 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부에 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(B형)

5지선다형

1. $4^{\log_3 \sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A + kE$ 의 모든 성분의 합이 10일 때, k 의 값은? (단, E 는 단위행렬이다.) [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\cos\theta = \frac{3}{4}$ 일 때, $\sin\frac{\theta}{2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [2점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

4. 함수 $f(x) = (x+1)e^{2x}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 - a_3 = 2$ 일 때, a_7 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

7. 함수 $f(x) = a \sin x - 3 \cos x - 2$ 의 최댓값이 3일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} -2 & a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9. 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 + a_2 = 10, \quad a_1 \times a_2 = 24$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① -30 ② -28 ③ -26 ④ -24 ⑤ -22

10. 반응 속도 상수가 k ($k > 0$)이고 반응시의 초기 온도를 $T(^{\circ}\text{C})$ 라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log k = A - \frac{E_0}{273 + T} \quad (\text{단, } A, E_0 \text{은 양의 상수이다.})$$

어떤 반응에서 초기 온도가 27°C 일 때 반응 속도 상수를 k_0 라 하면, 초기 온도가 327°C 일 때 반응 속도 상수는 $10k_0$ 가 된다고 한다. 같은 반응에서 초기 온도가 127°C 일 때의 반응속도 상수를 k_1 , 초기 온도가 177°C 일 때의 반응속도 상수를 k_2 라 할 때, $k_2 = 10^{\alpha} k_1$ 이다. α 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

11. 일차변환 f 를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 이라 하자. 일차변환 f 의 역변환 f^{-1} 에 의하여 점 $(2, 4)$ 가 (a, b) 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

12. 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F 에 대하여 제 1사분면에 있는 포물선 위의 점 A 가 $\overline{AF} = 3$ 를 만족시킨다. 점 A 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

13. 자연수 n 에 대하여 분수부등식

$$\frac{x-n^2}{n-x} \geq 0$$

을 만족시키는 자연수 x 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^6 a_n$ 의 값은?

[3점]

- ① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

14. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=3$, $a_2=4$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 이라 할 때,

$$a_{n+2} = 4 + 6S_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_{n+1} = 4 + 6S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 이므로,
 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad \text{㉠}$$

이다.

$n=1$ 일 때, ㉠이 성립하므로, ㉠은 $n \geq 1$ 일 때 만족한다.

㉠으로부터

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n)$$

이므로, 수열 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ 의 일반항을 구하면,

$$a_{n+1} + 2a_n = \boxed{\text{(가)}} \quad \text{㉡}$$

이다. 또한, ㉠으로부터

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$$

이므로, 수열 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 의 일반항을 구하면,

$$a_{n+1} - 3a_n = \boxed{\text{(나)}} \quad \text{㉢}$$

이다. ㉡과 ㉢을 이용하면,

$$a_n = \boxed{\text{(다)}} \quad \text{이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 하고 할 때, $h(5) + g(4) - f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 100 ② 114 ③ 128 ④ 142 ⑤ 156

15. 0이 아닌 모든 실수에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$\frac{f(x)}{x} + f'(x) = \sin x$$

를 만족시킨다. $f(\pi) = 1$ 일 때, $f(2\pi)$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB + A^2B = E, \quad A^3 + E = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]



————<보 기>————

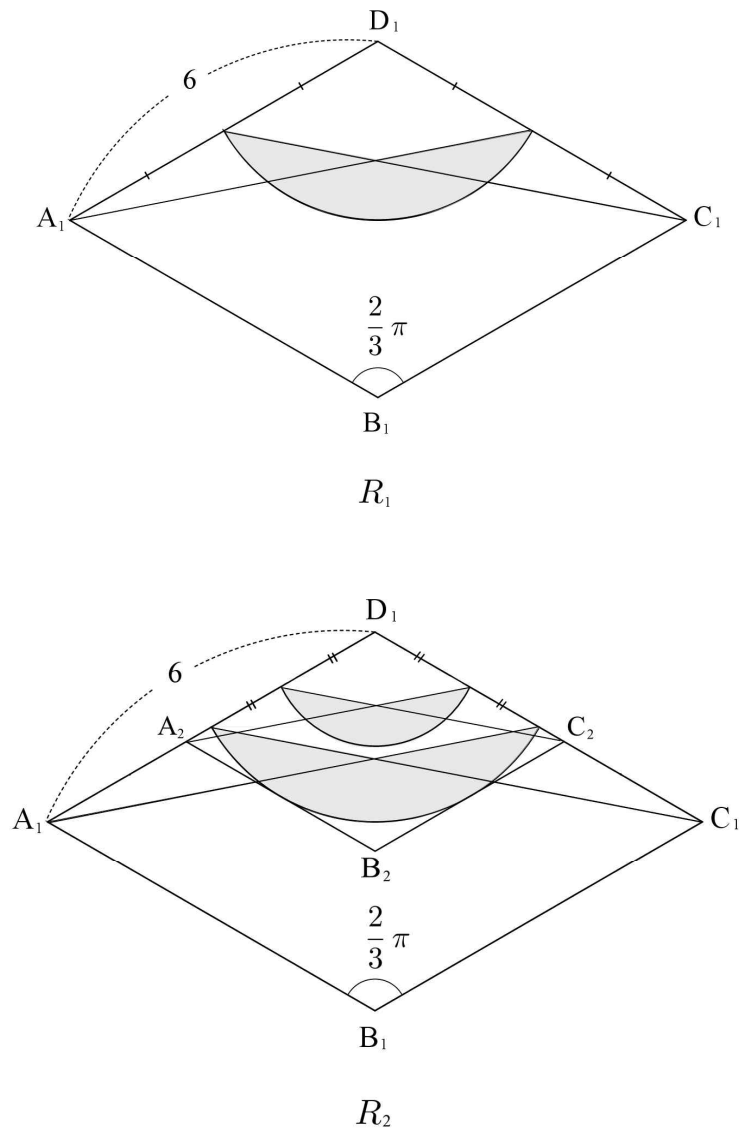
ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $2AB = B + E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 한 변의 길이가 6이고 $\angle A_1B_1C_1$ 의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 마름모 $A_1B_1C_1D_1$ 가 있다. 그림과 같이 점 A_1 과 선분 C_1D_1 의 중점을 이은 선분, 점 C_1 과 선분 A_1D_1 의 중점을 이은 선분을 각각 그리고, 중심이 D_1 이고 선분 C_1D_1 의 중점, 선분 A_1D_1 의 중점을 양 끝점으로 하는 호를 그렸을 때, 두 선분과 이 호로 둘러싸인 부분이  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 의 호에 접하고 마름모 $A_1B_1C_1D_1$ 의 두 쌍의 대변과 각각 평행한 두 직선이 선분 A_1D_1 , 선분 C_1D_1 와 만나는 점을 각각 A_2, C_2 , 두 직선의 교점을 B_2 라 할 때, 마름모 $A_2B_2C_2D_1$ 에 대하여 위와 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



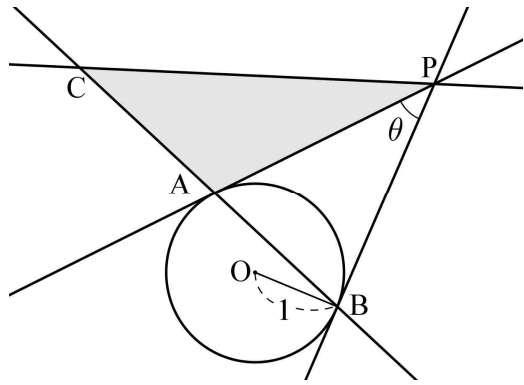
- ① $\frac{9(\pi - \sqrt{3})}{2}$
- ② $\frac{7(\pi - \sqrt{3})}{2}$
- ③ $\frac{5(\pi - \sqrt{3})}{2}$
- ④ $\frac{9(\pi - 1)}{2}$
- ⑤ $\frac{7(\pi - 1)}{2}$

18. 함수 $f(x) = e^{|x|}$ 와 정수 a, b 대하여 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

- (가) $-3 \leq a \leq 2, -3 \leq b \leq 2$
- (나) $\int_0^1 \{f(a+x) - f(b+x)\} dx < 0$

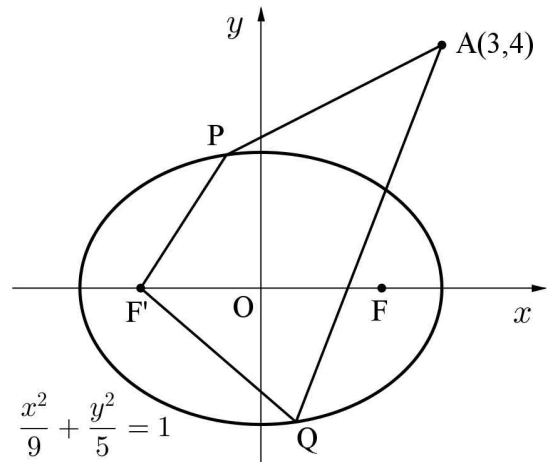
- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

19. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다. 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하고 $\angle APB = \theta$ 라 하자. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{BC} = \overline{PC}$ 인 점 C를 잡고, 삼각형 CAP의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \{\theta^3 \times S(\theta)\}$ 의 값은? [4점]



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

20. 그림과 같이 점 A(3, 4)과 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, $(\overline{AP} + \overline{AQ}) - (\overline{F'Q} + \overline{F'P})$ 의 최솟값은? [4점]



- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

21. 원점에 대하여 대칭이고 실수 전체에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 와 자연수 n 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{x^2 + \ln x}{x} - \sum_{k=1}^n f^k(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 일 때, $g'(e) \leq 10^{-10}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은?
(단, $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$ 이고, $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.) [4점]

- ① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

단답형

22. 로그방정식 $\log_2(x+6)=5$ 의 해를 구하시오. [3점]

23. 자연수 n 에 대하여 ${}_nC_2 \times {}_nH_2 = 18$ 일 때, n 의 값을 구하시오. [3점]

24. 점 $(1, 5)$ 를 $(10, 9)$ 로 옮기는 일차변환 f 의 변환행렬 A 에 대하여

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ q \end{pmatrix}$$

가 성립할 때, pq 의 값을 구하시오. [3점]

25. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(x) = xf(x)$ 라고 하자.
함수 $f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선이 원점을 지날 때, 함수 $g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 접선의 x 절편을 k 라 하자. $10k$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x) = 2(x+2)^2 - 8$ 에 대하여 무리 방정식

$\sqrt{f(x) + |f(x)| + 16} = kx$ 가 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오. [4점]

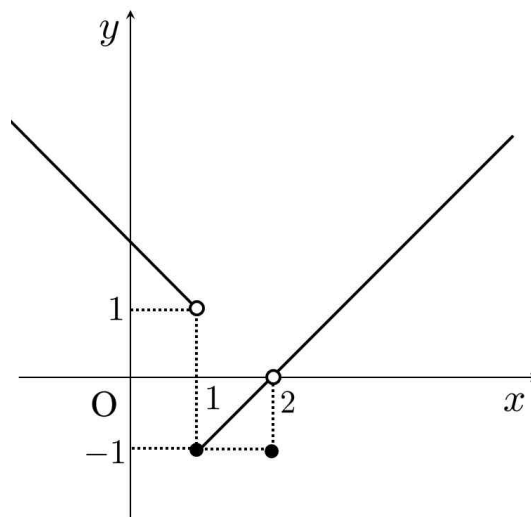
27. 첫째항이 3이고 각 항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{n+1} = a_n \times \sum_{k=2}^4 \left(\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

를 만족시킨다. $a_4 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=1$ 과 $x=2$ 에서만 불연속일 때, $g(5)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$ 라고 하자. 집합 A 를

$$A = \{g(n) \mid f(n) + f(5n) = f(3n) + f(4n), 1 \leq n < 1000\}$$

라 할 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선

$y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 $y = 2$ 까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(1) = 0$

(나) $g(t)$ 는 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않고 $1 < \alpha < \beta$ 이다.

$(2\beta - \alpha)^3$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.