수학 1

4. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오. [4월 21번][4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.

(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

Note1.

절댓값은 부호에 따라 벗겨내기.

Note2.

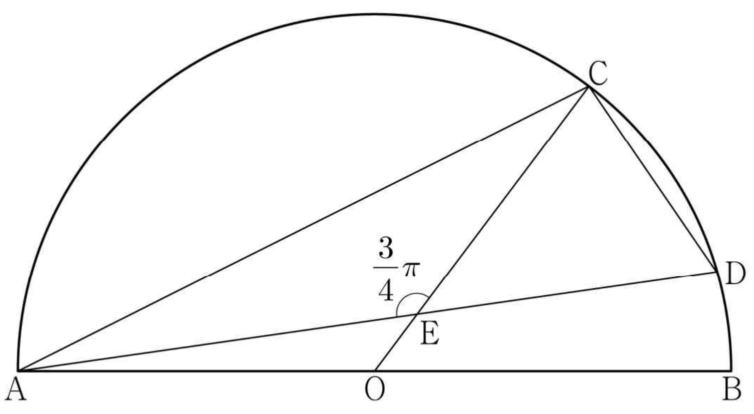
등차는 두 항의 차의 형태로 표현하는 것이 의미 있을 가능성이 높다.

$S_p - S_q = a_{q+1} + \cdots + a_p$

7. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [9월 13번][4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

Note1.

원 → ① sin 법칙

② 원주각·중심각

③ 지름포함 내접▲ : 직각▲

Note2.

원의 중심이 언급되고, 원 위의 점이 중심과 이어져 있지 않다면 보조선을 그린다.

Note3.

α와 β는 둘 중 하나만 구해도 된다.

8. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)

(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [9월 15번][4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Note1.

점화식에서 노가다가 쓰이는 경우

① a_n을 기준으로 점화식이 나뉜 경우

② 중간항이 주어진 경우

③ a_m구하기에서 m이 작은 경우

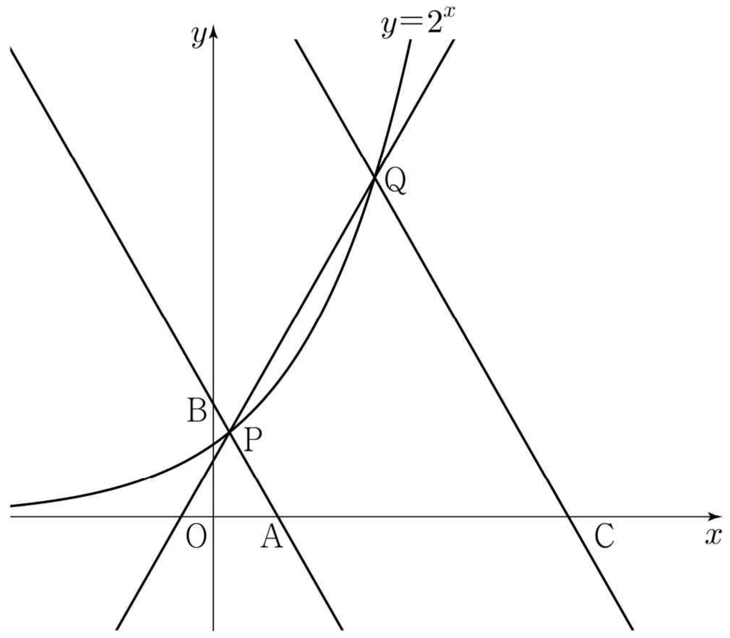
Note2.

a_n을 기준으로 점화식이 나뉜 경우 중간항을 이용하여 노가다를 할 때, 구한 값이 기준에 맞는지 계속 확인해야 한다.

9. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a,\ 2^a)$, $Q(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{AB}=4\overline{PB},\quad \overline{CQ}=3\overline{AB}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [9월 21번][4점]



Note1.

좌표의 비 주어짐 → 1개의 문자로 표현.

Note2.

서로 닮은 직각▲ 2개 이상

→ 삼각비, 닮음비

닮지 않거나, 삼각형이 1개 주어진 경우에는 세 변을 한 문자로 표현하여 피타고라스의 정리를 이용한다.

Note3.

기울기 m 일 때, 직선의 x축 대칭 → 기울기 = −m

직선의 y축 대칭 → 기울기 = −m

직선의 y=x 대칭 → 기울기 = $\frac{1}{m}$

10. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|\ \left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은? [10월 12번][4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

Note1.

삼각방정식 → 대칭성·주기성

Note2.

삼각함수의 미지수 → 미지수의 의미 이용

Note3.

곡선, 직선 위치관계 → 직선 = 접선 or 점근선부터 의심

Note4.

삼각함수의 대칭축과 주기는 여러 개이다.

11. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n=pn^2-36n+q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

> 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i\neq j$이면 $S_i\neq S_j$이다.

$p=p_1$일 때, $|a_k|<a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [10월 15번][4점]

① 372　② 377　③ 382　④ 387　⑤ 392

Note1.

등차 a_n : 1차식 → 다항함수의 성질 이용

s_n : 2차식 ↗

$a_n = dn + \cdots$, $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \cdots$

Note2.

a_n은 자연수에서만 정의된 함수이다.

Note3.

$S_n = pn^2+qn$ → $a_n = 2pn+q-p$ (n≥1)

pn^2+qn+r → $a_n = 2pn+q-p$ (n≥2)

12. $2\le n\le 7$인 자연수 n과 정수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는?
[수능특강][수1][1단원][Level3][1번]

> (가) $\sqrt[n]{a}<0$
> (나) $\sqrt[n]{(-1)^n}\times\sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}}=-3$

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

Note1.

$\sqrt[n]{a}$ ≠ a의 n 제곱근

→ $\sqrt[n]{a}<0$: $a<0$, n은 홀수

Note2.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n\text{이 홀수} \\ |a| & n\text{이 짝수} \end{cases}$$

Note3.

자연수 조건 → 부등식 수의 특정, 귀류법

13. 2 이상의 자연수 M에 대하여 $\log_4 M + \log_4(2\log_2 M)$의 값이 자연수가 되도록 하는 M의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, …이라 할 때, $a_1 \times a_3$의 값을 구하시오.
[수능특강][수1][1단원][Level3][4번]

Note1.

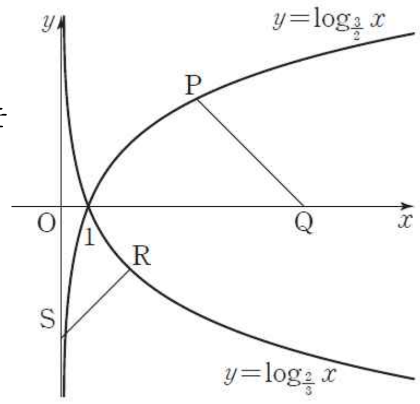
로그의 자연수 조건 : $\log a^b$ 자연수

$\rightarrow b = a^p$, p는 자연수

Note2.

로그 $\log_a b \rightarrow a > 0, a \neq 1$
$b > 0$

14. 그림과 같이 곡선 $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 또 곡선 $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ 위의 제4사분면에 있는 점 R를 지나고 기울기가 1인 직선이 y축과 만나는 점을 S라 하자. 네 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P의 x좌표는? (단, O는 원점이다.)
[수능특강][수1][2단원][Level3][6번]



(가) $\sqrt{2} \times \overline{\text{OQ}} = \overline{\text{PQ}} + \overline{\text{RS}} + \sqrt{2}$
(나) 두 점 P, R의 y좌표의 합은 1이다.

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

Note1.

직선의 기울기, 두 점 거리 → $\triangle x$, $\triangle y$

Note2.

삼각비와 관련된 수와 직선 위 두 점 사이의 거리는 조건을 해석하는 힌트가 될 수 있다.

15. 좌표평면에서 직선 $\sqrt{3}x-3y=0$에 수직이고 원점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2=4$와 만나는 서로 다른 두 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하자. 동경 OP가 나타내는 각을 α, 동경 OQ가 나타내는 각을 β라 할 때, $\sin\alpha\times\cos\beta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [수능특강][수1][3단원][예제][2번]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Note1.

좌표&삼각비 → 삼각함수의 정의

$P(x,y) \rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$

$\rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$

Note2.

두 직선이 수직 → $m_1\times m_2=-1$

16. $0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 각 θ에 대하여 $\sin(\theta-\pi)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$의 값은?

[수능특강][수1][3단원][Level2][2번]

(가) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 서로 일치한다.
(나) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

Note1.

θ_1, θ_2 동경 일치 → $\theta_1-\theta_2 = 2n\pi$

반대방향 → $|\theta_1-\theta_2| = (2n-1)\pi$

x축 대칭 → $\theta_1+\theta_2 = 2n\pi$

y축 대칭 → $\theta_1+\theta_2 = (2n-1)\pi$

Note2.

$\sin(\frac{n}{2}\pi\pm\theta)$ → 각변환 (각변환시 θ는 항상 예각취급)

17. $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=-\cos^2 x-2a\sin x+a+4$의 최솟값을 $f(a)$라 하자. 방정식 $3f(a)-a+4=0$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? [수능특강][수1][3단원][Level3][2번]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Note1.

삼각 방·부등식 → 일차항 치환

Note2.

이차함수 최대·최소 & 구간 주어짐

→ 대칭축 포함 여부에 따라 최대·최소 생기는 위치 달라짐.

Note3.

구간에 따라 방정식의 해를 각각 구할 때, 구간에 포함되는지 반드시 확인한다.

18. 5 이하의 자연수 n에 대하여 두 함수

$f(x)=\cos 2\pi x$, $g(x)=2\sin\frac{\pi}{n}x$가 있다. $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 10일 때, n의 값은? [수능특강][수1][3단원][Level3][3번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Note1.

$f(g(x))=a$의 실근 구하기

① $g(x)=t$치환, t의 범위 구하기

② $f(t)=a$의 실근 t_1, t_2, $\cdots$ 구하기

③ $g(x)=t_1$, t_2, $\cdots$의 실근 구하기

Note2.

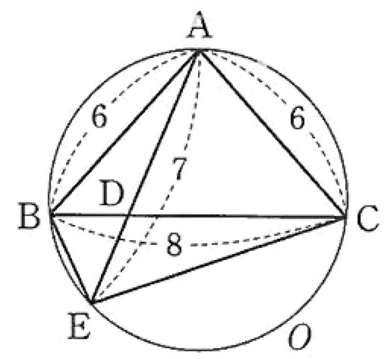
삼각방장식 실근 구하기, 실근의 개수와 관련된 문제는 주어진 범위의 양끝에 등호포함여부를 반드시 확인

19. $\overline{AB}=4$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [수능특강][수1][4단원][유제][5번]

(가) $b\cos C = c\cos B$
(나) $\cos^2(A+B) = \cos^2 A + \sin^2 B$

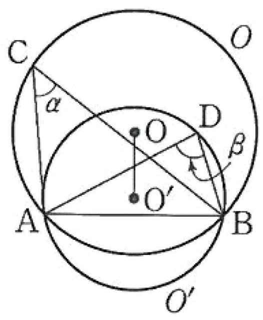
Note1.
삼각비 관련 조건
→ 변의 길이 조건(sin, cos 법칙 이용)
→ 특수▲ 여부 파악
Note2.
A+B = π−C

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC가 원 O에 내접하고 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{EA}=7$이다. $9\left(\overline{EB}^2+\overline{EC}^2\right)$의 값을 구하시오.
[수능특강][수1][4단원][Level2][5번]



Note1.
원주각은 무조건 표시.
Note2.
두 변과 끼인각이 아닌 다른 각도 cos법칙 가능.
Note3.
동일한 성분을 서로 다른 두 가지 이상의 방법으로 표현
→ 관계식 (도형에서 주로 이용되는 관계식 잡기.)
Note4.
이차방정식의 두 실근이 언급되면 근과 계수의 관계를 떠올린다.

21. 그림과 같이 한 평면에서 선분 AB를 공통변으로 갖는 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원을 각각 O, O'이라 하고 $\angle ACB = \alpha$, $\angle ADB = \beta$라 할 때, 두 원 O, O'과 두 각의 크기 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.
[수능특강][수1][4단원][Level3][1번]



(가) $4\sin\alpha = 3\sin\beta$, $\cos(\beta-\alpha) = \frac{5}{6}$

(나) 두 원 O, O'의 넓이의 합은 25π이다.

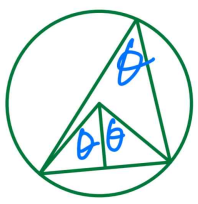
두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 할 때, 선분 OO′의 길이는? (단, 점 C는 원 O'의 외부에 있고, 점 D는 원 O의 내부에 있다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

Note1.

sin비를 사인법칙에 적용하려면 한 ▲위의 각

Note2.



중심에서 수직이등분 내리면 원주각과 각이 같다.

원주각이 서로 같음은 미리 표시하고 해석에 들어가는 것이 좋다.

Note3.

각끼리 연산된 형태가 등장하면 연산된 각이 의미하는 각을 도형에서 직접 찾아야 한다.

Note4.

원의 중심이 언급되고, 원 위의 점이 주어졌는데 중심과 이어져 있지 않은 경우 보조선을 그어서 반지름, 원주각 등을 이용한다.

22. 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여

$$b_n = (a_{n+6})^2 - (a_n)^2,\ c_n = (a_{n+k})^2 - (a_n)^2$$

이라 하자. 두 등차수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 할 때, $\frac{d_1}{d_2} = 3$을 만족시키는 k의 값은?
[수능특강][수1][5단원][Level2][2번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Note1.

등차는 두 항의 차가 유의미. ⇒ 두 항을 빼서 관계식 잡기

등비는 두 항의 비가 유의미. ⇒ 두 항을 나눠서 관계식 잡기

Note2.

등차 $a_p - a_q = (p-q)d$

Note3.

일반항이 n에 대한 일차식이라면 수열은 등차수열임을 알 수 있고, n의 계수가 공차이다.

23. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{21}=-1$
(나) $\sum_{k=1}^{20} k(a_k-2a_{k+1})=98$

$\sum_{k=1}^{18} ka_{k+2}$의 값은? [수능특강][수1][6단원][Level2][1번]

① -60 ② -59 ③ -58 ④ -57 ⑤ -56

Note1.

처음보는 일반항 Σ 또는 시그마의 공식이 존재하지 않을 때 전개하여 규칙을 찾는다.

Note2.

$\Sigma \to \Sigma$, $\lim \to \lim$, $\int \to \int$: 꼴 맞추기

$\Rightarrow$ 최종적인 값이 주어진 조건으로 표현이 되는지 확인

24. 함수 $f(x)=\log_a x+b$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프가 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$에서 만날 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.) [수능완성][지수로그][31번]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

Note1.

$f=f^{-1}$ 가 $y=x$ 위가 아닌 다른 교점을 가지면 (a,b), (b,a)를 둘 다 지난다.

Note2.

지수·로그 함수 = 역함수는 오직 y=x 에서만 교점 (증가함수일 때)

25. 첫째항이 $\frac{6}{5}$이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_5=24$일 때, $10(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_9-a_{10})$의 값은?
[수능완성][수열]][10번]

① -4092　② -4090　③ -4088
④ -4086　⑤ -4084

Note1.

등비수열의 합에서 부호가 번갈아 바뀌는 합도 등비수열의 합으로 구할 수 있다.

$a_1+a_2+\cdots+a_n$: a_1 , 공비 r, 등비합

$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$: a_1 , 공비 $-r$, 등비합