제 2 교시

랑데뷰-2024학년도 대학수학능력시험 수학영역

어사킬러-제0회

성명		수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

   랑데뷰수학-수능을 보다!

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
6. 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~3쪽, 선택과목 확률과 통계 4쪽, 미적분 5쪽, 기하 6쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

송원학원 황보백T

For 2024학년도 대학수학능력시험

제 2 교시

랑데뷰-어사킬러 제0회

2023년 제작예정 랑데뷰 컨텐츠 소개

[시즌 시작은 2023년 3월 부터(자료 제공은 2월 중순부터)]

① 3, 4, 7, 10월 교육청 수I, 수II, 미적분 4점 전문항

② 6, 9평가원 싱크로율99% (46문항 전체)

③ 2024학년도 EBS 수능특강 수I, 수II, 미적분 Lev3 전문항 변형

④ 2024학년도 EBS 수능완성 수I, 수II, 미적분 주요문항 변형

⑤ 3월~7월 매월 [R-27 3회분 & R-30 1회분] (총 20회 (15회+5회) 공통,미적분 전문항 신규, 확통,기하는 재탕될 수 있음, 8월은 쉼)

⑥ 9월~10월 매주 Final-R-30 (전문항 신규 총 8회)

각지역 한분에게만 제공되는 자료 - (황보백T 현강용 자료)

⑦ 3월~7월 매주 매월 [R+27 3회분 & R+30 1회분] (총 20회 (15회+5회) 공통,미적분 전문항 신규, 확통,기하는 재탕될 수 있음, 8월은 쉼)

⑧ 9월~10월 매주 Final+R+30 (전문항 신규 총 8회)

2023년 신규 컨텐츠 [샘플 (제0회) 참고]

주1회 월4회 총 20회 (8월제외) 공통(수1&수2) 15문항으로 이루어진 컨텐츠

① R+15 어사준킬 - 상위권 대상

② R-15 어삼쉬사 -중하위권 대상

공통과목

1. 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여 세 수 $\log a+\log c$, $\log_c a$, $\log_b c$는 모두 한 자리 자연수이고 $\log_c a=\log_b c$일 때, $a\times b\times c$의 최댓값을 M이라 하자. $\log M$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

2. $f'(0)=f'(a)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f'(x)\times\int_0^x f(t)dt+\{f(x)\}^2$$

이고 함수 $g(x)$에 대하여

$$h(x)=\int_0^x g(s)ds$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 양의 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^a f(x)dx=0$이면 $g\left(\frac{a}{2}\right)<0$이다.

ㄴ. $f(x)$의 극솟값이 0이면 $h\left(-\frac{a}{2}\right)=0$이다.

ㄷ. $f(x)$의 극댓값이 0이면 $h\left(\frac{3}{2}a\right)+h'(2a)<0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. $70<a_1<80$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n-3a_{n+1} & (a_n \geq a_{n+1})\\ a_{n+1}-4n & (a_n<a_{n+1})\end{cases}$$

이다. $a_{m+3}=a_{m+1}<a_m=a_{m+2}$인 2이상의 자연수 m이 존재할 때, $\sum_{n=1}^{6}a_n$의 값은? [4점]

① 168 ② 172 ③ 176 ④ 180 ⑤ 184

4. 양의 상수 a와 어떤 음의 실수 b에 대하여 두 함수 $y=\frac{1}{a}\sin(a\pi x)$와 $y=b\left(x-\frac{1}{a}\right)$가 있다. 두 함수의 그래프가 세 점에서 만날 때, 이 세 점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $100a$의 값을 구하시오. (단 O는 원점이다.) [4점]

> (가) $\sin(\angle \mathrm{AOC})=1$
> (나) $\overline{\mathrm{AC}}=8$

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$, $f'(0)=3$
> (나) 방정식 $f'(x)=3$의 서로 다른 실근의 합은 $\frac{3}{2}$이다.
> (다) 직선 $y=3x+t$가 곡선 $y=f(x)$에 접하도록 하는 실수 t의 개수는 2이다.

$f(2)$의 값으로 가능한 모든 값의 합을 구하시오. [4점]

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

(가) $f(1)=g(1)$, $f(2)=\dfrac{g(2)}{2}$, $f(3)=\dfrac{g(3)}{3}$, $f(4)=\dfrac{g(4)}{4}$
(나) $f'(1)=g'(1)-4$

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

7. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 $x \geq a$에서 함수 $f(x)-f(a)$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $g(x)=k$의 양의 실근은 $x=b$뿐이다.

양수 t에 대하여 함수 $\int_0^t g(x)dx$의 최댓값을 M이라 할 때, $\dfrac{M}{k\times b}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

8. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos bx\ \left(0 \le x \le \frac{2\pi}{b}\right)$$

가 있다. 양수 c에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left[\{f(x)\}^2-3c^2\right]\{f(x)+2c\}=0$$

실근의 개수가 5이고 실근을 작은 것부터 순서대로 나타내면 α_1, α_2, $\cdots$, α_5이고 각 점 $\mathrm{A}_1(\alpha_1, f(\alpha_1))$, $\mathrm{A}_2(\alpha_2, f(\alpha_2))$, $\mathrm{A}_3(\alpha_3, f(\alpha_3))$, $\mathrm{A}_4(\alpha_4, f(\alpha_4))$, $\mathrm{A}_5(\alpha_5, f(\alpha_5))$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4}=6\,\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}$
> (나) 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$의 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

$a\times b\times c$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

9. 실수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 처음 위치가 a이고 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2(t-2)\left(2t^2-8t+a\right)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량을 A, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 B라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. $A=-\int_2^4 v(t)dt$
> ㄴ. $B=2A$을 만족시키는 a의 최댓값은 0이다.
> ㄷ. $B=-2A$을 만족시키는 a의 최솟값은 8이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(n-1)a_1 & (a_n<0)\\ a_n-3 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_8<0$일 때, 가능한 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

11. 집합 $A=\{x\mid x$는 a이상 b이하의 자연수$\}$와 자연수 전체의 집합 N에 대하여 집합 A에서 집합 N으로의 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_{\sqrt[3]{3}}x & (\log_{\sqrt[3]{3}}x\in N)\\ 3^x & (\log_{\sqrt[3]{3}}x\notin N)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)$가 집합 A의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족시킬 때, $b-a$의 최댓값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$h(x)=\frac{f(x)-g(x)+|f(x)+g(x)|}{2}, \quad k(x)=f(x)+g(x)$$

이고, 두 함수 $k(x)$, $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 2$에서 $k(x)=x(x-1)(x-2)$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $k(x)=k(x+2)$이다.
> (다) $\int_0^9 f(x)dx=8$

$\int_0^9 h(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

13. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{|a_k|}$의 최솟값 α라 하자. $|\alpha|$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $a_1=-45$
> (나) $\sum_{k=m}^{m+3}\left\{(-1)^{a_k}\times a_k\right\}=0$인 자연수 m이 존재한다.

14. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+4x$ 와 실수 k 대하여 x 에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=(k-2)x$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $N(k)$ 라 하자.
$\lim_{k\to\alpha+}N(k)\neq\lim_{k\to\alpha-}N(k)$ 을 만족시키는 모든 α 의 값의 합을 구하시오. [4점]

15. 수직선 위를 움직이는 점 P와 Q의 시각 t에서의 위치는 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$이고 두 상수 a, b에 대하여

$$x_1(t)=t^2(at+b),\ x_2(t)=t(at+b)$$

이다. 점 P와 Q의 시각 t에서의 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$가 $\int_0^1|v_1(t)-v_2(t)|dt=2$를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=1$

ㄴ. $x_1(t_1)=x_2(t_1)$인 t_1이 열린구간 $(0,1)$에 존재하면 $v_1(t_2)=v_2(t_2)$인 t_2가 열린구간 $(0,1)$에 2개 존재한다.

ㄷ. 점 P와 Q의 위치가 같은 시각 t_3이 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

어사킬러 2024-제0회

빠른답

1	⑤	2	③	3	③	4	25	5	24
6	①	7	43	8	①	9	⑤	10	④
11	24	12	9	13	22	14	21	15	②

2024학년도 수학영역 랑데뷰 어사킬러 제0회 -풀이

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

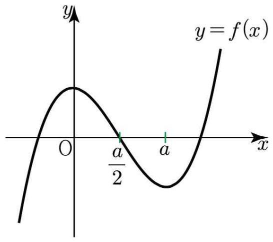
1) 정답 ⑤
한 자리 자연수 m, n에 대하여
$\log a+\log c=m$라 하면
$\log a+\log c=\log ac=m$, $ac=10^m$이다.

$\log_c a=n$라 하면 $a=c^n$이므로 $c^{n+1}=10^m$, $c=10^{\frac{m}{n+1}}$이다.
$\log_c a=\log_b c$이므로 $\log_b c=n$에서 $c=b^n$, $b=c^{\frac{1}{n}}$이다.

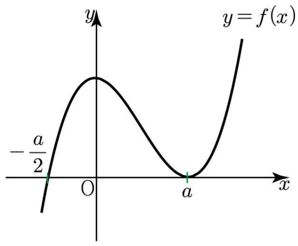
그러므로
$a\times b\times c$
$=c^n\times c^{\frac{1}{n}}\times c$
$=c^{n+\frac{1}{n}+1}$
$=c^{\frac{n^2+n+1}{n}}$
$=10^{\frac{m(n^2+n+1)}{n(n+1)}}$
$=10^{m\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)}$
이 값이 최대가 되려면 m은 최대, n은 최소이어야 하므로
$m=9$, $n=1$일 때다.
따라서
$M=10^{9\times\left(1+\frac{1}{2}\right)}=10^{\frac{27}{2}}$
$\log M=\dfrac{27}{2}$

2) 정답 ③
[그림 : 최성훈T]
$g(x)=\left\{f(x)\times\int_0^x f(t)dt\right\}'$이므로
$h(x)=\left[f(s)\times\int_0^s f(t)dt\right]_0^x=f(x)\times\int_0^x f(s)ds$
즉, $h(x)=f(x)\times\int_0^x f(s)ds$, $h'(x)=g(x)$이다.
삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $a>0$이므로
$f'(0)=f'(a)=0$에서 $x=0$에서 극대, $x=a$에서 극소이다. …㉠

ㄱ. ㉠에서 $\int_0^a f(x)dx=0$일 때, 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

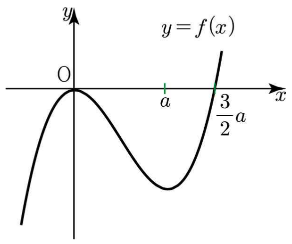


$f\left(\frac{a}{2}\right)=0$이고 $g(x)=f'(x)\times\int_0^x f(t)dt+\{f(x)\}^2$이므로
$f'\left(\frac{a}{2}\right)<0$, $\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt>0$, $f\left(\frac{a}{2}\right)=0$에서 $g\left(\frac{a}{2}\right)<0$ (참)
ㄴ. ㉠에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이면 $f(x)=0$의 해는 삼차함수 비율관계에 의해 $x=-\frac{a}{2}$, $x=a$이다.



$h(x)=f(x)\times\int_0^x f(s)ds$이므로 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$에서
$h\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ (참)

ㄷ. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 0을 갖고 $x=a$에서 극솟값을 가지면 $f(x)=0$의 해는 삼차함수 비율에 의해 $x=0$, $x=\frac{3}{2}a$이므로
$f(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)$이다.



$h(x)=f(x)\times\int_0^x f(s)ds$이므로 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$에서 $h\left(\frac{3}{2}a\right)=0$…㉠
$h'(x)=g(x)=f'(x)\times\int_0^x f(t)dt+\{f(x)\}^2$에서 $h'(2a)$은
$x=2a$에서 $f(x)$가 증가하므로 $f'(2a)>0$이고 $f(2a)>0$이다.
$\int_0^{2a} f(t)dt$
$=\int_0^{2a}\left\{x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)\right\}dx$

$= \int_0^{2a} \left(x^3 - \frac{3}{2}ax^2 \right) dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 \right]_0^{2a}$

$= 4a^4 - 4a^4 = 0$

따라서 $h'(2a) > 0$이다. …㉡

㉠, ㉡에서 $h\left(\frac{3}{2}a\right) + h'(2a) > 0$ (거짓)

3) 정답 ③

$p > q$인 두 실수 p와 q에 대하여

a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
p	q	p	q

라 하자.

$a_m > a_{m+1}$이므로

$a_{m+2} = 2a_m - 3a_{m+1}$에서 $p = 2p - 3q$

$\therefore\ p = 3q$

a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
$3q$	q	$3q$	q

$a_{m+1} < a_{m+2}$이므로 $a_{m+3} = a_{m+2} - 4(m+1)$에서

$q = 3q - 4(m+1)$에서 $q = 2(m+1)$

따라서 $a_{m+1} = 2(m+1)$

a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
$6(m+1)$	$2(m+1)$	$6(m+1)$	$2(m+1)$

m이 2이상의 자연수이므로 a_{m-1}이 존재하므로

$a_{m+1} = \begin{cases} 2a_{m-1} - 3a_m & (a_{m-1} \geq a_m) \\ a_m - 4(m-1) & (a_{m-1} < a_m) \end{cases}$에서

(i) $a_{m-1} < a_m$일 때,

$a_{m+1} = a_m - 4(m-1)$에서

$2(m+1) \neq 6(m+1) - 4(m-1)$이므로 모순

(ii) $a_{m-1} > a_m$일 때,

$a_{m+1} = 2a_{m-1} - 3a_m$에서

$2a_{m-1} = 2(m+1) + 18(m+1)$

$a_{m-1} = 10(m+1)$이다.

a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
$10(m+1)$	$6(m+1)$	$2(m+1)$	$6(m+1)$	$2(m+1)$

$m = 2$일 때, $a_1 = 20$로 $50 < a_1 < 100$에 모순이다.

$m > 3$일 때, a_{m-2}가 존재하므로

$a_m = \begin{cases} 2a_{m-2} - 3a_{m-1} & (a_{m-2} \geq a_{m-1}) \\ a_{m-1} - 4(m-2) & (a_{m-2} < a_{m-1}) \end{cases}$

(i) $a_{m-2} < a_{m-1}$일 때,

$a_m = a_{m-1} - 4(m-2)$에서

$6(m+1) \neq 10(m+1) - 4(m-2)$이므로 모순

(ii) $a_{m-2} > a_{m-1}$일 때,

$a_m = 2a_{m-2} - 3a_{m-1}$에서

$2a_{m-2} = 6(m+1) + 30(m+1)$

$a_{m-2} = 18(m+1)$이다.

a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
$18(m+1)$	$10(m+1)$	$6(m+1)$	$2(m+1)$	$6(m+1)$	$2(m+1)$

$m = 3$일 때, $a_1 = 18 \times 4 = 72$

따라서 $m = 3$이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
72	40	24	8	24	8

$\sum_{n=1}^{6} a_n$

$= 72 + 40 + 24 + 8 + 24 + 8$

$= 176$

4) 정답 25

(가)에서 $\angle \mathrm{AOC} = \frac{\pi}{2}$이다.

두 함수 $y = \frac{1}{a}\sin(a\pi x)$와 $y = b\left(x - \frac{1}{a}\right)$는 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$에 점 대칭인 그래프이므로 점 B의 좌표가 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$이고 두 점 A, C는 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$에 서로 대칭이므로 점 B는 선분 AC의 중점이다.

점 B가 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점으로 직각삼각형 AOC의 외접원의 중심이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = 4$이다.

$\frac{1}{a} = 4$에서 $a = \frac{1}{4}$이다.

그러므로 $100a = 100 \times \frac{1}{4} = 25$

5) 정답 24

[그림 : 이호진T]

(가)에서 사차함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x$라 할 수 있다.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + 3$이므로

(나)에서 $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$의 서로 다른 실근의 합이 $\frac{3}{2}$이고

(다)에서 직선 $y = 3x + t$가 곡선 $y = f(x)$에 접하도록 하는 실수 t의 개수는 2이므로

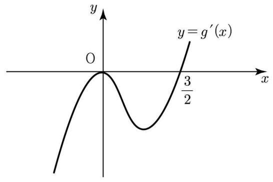
$x^4 + ax^3 + bx + 3x = 3x + t$

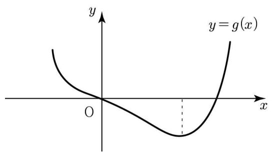
$x^4 + ax^3 + bx^2 = t$

에서 곡선 $y=x^2(x^2+ax+b)$와 직선 $y=t$가 접하는 t의 개수가 2이다.

$g(x)=x^4+ax^3+bx^2$라 할 때,
함수 $g(x)$는 극솟값 한 개만 가지면서 t의 값이 극솟값보다 큰 값(변곡점의 y의 값) 일 때 접선이 되는 개형이거나 극솟값이 같은 값으로 2개이고 극댓값이 1개 존재하는 그래프이어야 한다.
따라서
$g'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$이고
함수 $g'(x)$의 그래프에 따른 함수 $g(x)$는 다음과 같이 3가지 개형을 생각할 수 있다.

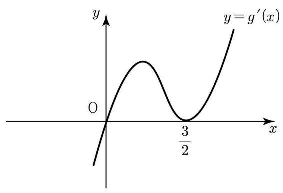
(i)

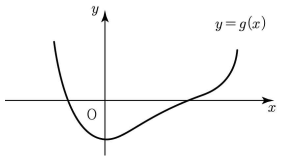




$g'(x)=4x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)=4x^3-6x^2$에서
$3a=-6$, $a=-2$
$b=0$
따라서 $f(x)=x^4-2x^3+3x$ 이다.
$f(2)=16-16+6=6$

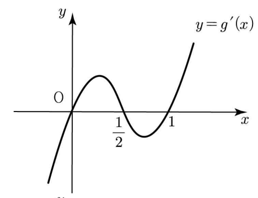
(ii)

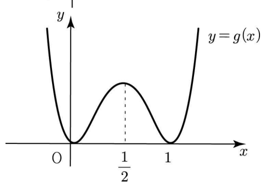




$g'(x)=4x\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4x^3-12x^2+9x$에서
$3a=-12$, $a=-4$
$2b=9$, $b=\frac{9}{2}$
따라서 $f(x)=x^4-4x^3+\frac{9}{2}x^2+3x$이다.
$f(2)=16-32+18+6=8$

(iii)



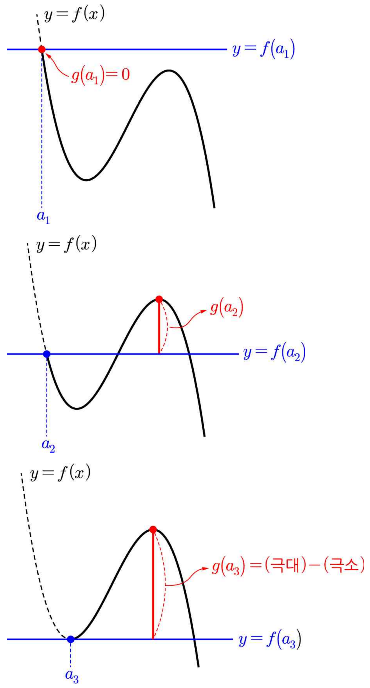


$g'(x)=4x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=4x\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=4x^3-6x^2+2x$
$3a=-6$, $a=-2$
$2b=2$, $b=1$
따라서 $f(x)=x^4-2x^3+x^2+3x$이다.
$f(2)=16-16+4+6=10$
(i), (ii), (iii)에서
$f(2)$의 값으로 가능한 모든 값의 합은
$6+8+10=24$

6) 정답 ①
(가)에서 등식 $xf(x)=g(x)$에서 $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$을 대입한 식이므로
$h(x)=xf(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 2인 사차함수이다.
$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=0$이므로
$h(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$이다.
$h'(x)=f(x)+xf'(x)-g'(x)$이고
$h'(x)=2(x-2)(x-3)(x-4)+2(x-1)k(x)$꼴이므로
$h'(1)=f(1)+f'(1)-g'(1)=-12$
$f'(1)-g'(1)=-4$이므로 $f(1)-4=-12$에서 $f(1)=-8$이다.

7) 정답 43
[그림 : 배용제T]
삼차함수 $f(x)$가 극대, 극소가 없이 실수 전체의 집합에서 감소하는 그래프라면 $x \geq a$에서 함수 $f(x)-f(a)$의 최댓값은 항상 0이므로 조건에 모순이다. 따라서 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가지는 함수이다.

함수 $f(x)-f(a)$는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-f(a)$만큼 평행이동한 그래프이므로 $y=f(x)$위의 점 $(a, f(a))$가 x축 위의 점이 되는 그래프이다.
따라서 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 a의 값에 따른 $x \geq a$에서의 최댓값 $g(a)$는 다음 그림과 같다.



따라서 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)-f(a)$는 $f(x)-f(a)=-x(x-\alpha)^2$으로 (나)에서 k는 함수 $g(x)$의 최댓값이므로 함수 $f(x)-f(a)$의 극솟값이 $-k$이다.

$f'(b)=0$이므로

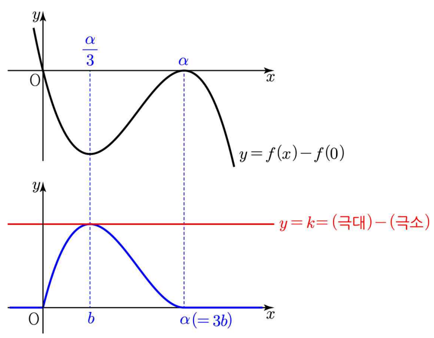
$$f'(x)=-(x-\alpha)^2-2x(x-\alpha)$$
$$=-(x-\alpha)(x-\alpha+2x)$$
$$=-(x-\alpha)(3x-\alpha)$$

$f'(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\alpha}{3}$이다.

$\dfrac{\alpha}{3}=b$이므로 $\alpha=3b$이다.

그러므로

$a=0$일 때, $y=f(x)-f(0)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x(x-3b)^2 & (0\le x<3b)\\ 0 & (x\ge 3b)\end{cases}$$

k는 함수 $g(x)$의 최댓값이므로 $g(b)=b\times(-2b)^2=4b^3$

$\therefore\ k=4b^3$

함수 $\displaystyle\int_0^t g(x)dx$의 최댓값은 $t\ge 3b$일 때, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$M=\int_0^{3b}\{x(x-3b)^2\}dx=\frac{(3b)^4}{12}=\frac{27}{4}b^4$$

따라서 $\dfrac{M}{k\times b}=\dfrac{27}{4}b^b\times\dfrac{1}{4b^3\times b}=\dfrac{27}{16}$

그러므로 $p=16$, $q=27$

$p+q=43$

8) 정답 ①

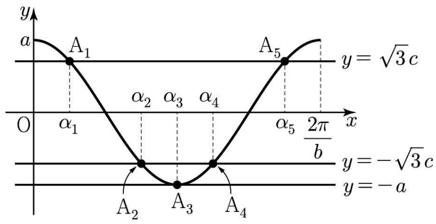
[그림 : 배용제T]

$[\{f(x)\}^2-3c^2]\{f(x)+2c\}=0$

$\{f(x)-\sqrt{3}c\}\{f(x)+\sqrt{3}c\}\{f(x)+2c\}=0$

$f(x)=\sqrt{3}c$, $f(x)=-\sqrt{3}c$, $f(x)=-2c$에서 서로 다른 실근의 개수가 5이기 위해서는 $-2c=-a$이어야 한다.

따라서 $c=\dfrac{a}{2}$



(i) $f(x)=\sqrt{3}c$에서

$a\cos bx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\cos bx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$bx=\dfrac{\pi}{6}$, $bx=\dfrac{11\pi}{6}$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{6b}$, $x=\dfrac{11\pi}{6b}$

(ii) $f(x)=-\sqrt{3}c$에서

$a\cos bx=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\cos bx=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$bx=\dfrac{5\pi}{6}$, $bx=\dfrac{7\pi}{6}$

따라서 $x=\dfrac{5\pi}{6b}$, $x=\dfrac{7\pi}{6b}$

(iii) $f(x)=-2c$에서

$a\cos bx=-a$

$\cos bx=-1$

$bx=\pi$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{b}$

(i), (ii), (iii)에서

$\alpha_1=\dfrac{\pi}{6b}$, $\alpha_2=\dfrac{5\pi}{6b}$, $\alpha_3=\dfrac{\pi}{b}$, $\alpha_4=\dfrac{7\pi}{6b}$, $\alpha_5=\dfrac{11\pi}{6b}$

따라서

$\mathrm{A}_1\left(\dfrac{\pi}{6b}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\mathrm{A}_2\left(\dfrac{5\pi}{6b}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\mathrm{A}_3\left(\dfrac{\pi}{b}, -a\right)$, $\mathrm{A}_4\left(\dfrac{7\pi}{6b}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\mathrm{A}_5\left(\dfrac{11\pi}{6b}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

이다.

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4}=\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{b^2}+3a^2}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}=\dfrac{\pi}{3b}$ 이고

(가) $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4}=6\,\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}$에서 $\dfrac{\pi^2}{b^2}+3a^2=\dfrac{4\pi^2}{b^2}$

$3a^2=\dfrac{3\pi^2}{b^2}$

$\therefore\ a=\dfrac{\pi}{b}$

(나)에서 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$는 사다리꼴이므로 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5}+\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}\right)\times h$에서 $h=\sqrt{3}a$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\left(\dfrac{10\pi}{6b}+\dfrac{2\pi}{6b}\right)=\sqrt{3}$

$a\times\dfrac{\pi}{b}=1$

$a^2=1$

$a=1$, $b=\pi$, $c=\dfrac{1}{2}$

그러므로 $a\times b\times c=\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

9) 정답 ⑤

[그림 : 서태욱T]

$v(t)=2(t-2)\left(2t^2-8t+a\right)$

$\quad=4t^3-16t^2+(2a+32)t-4a$

이므로

$\displaystyle\int v(t)dt=t^4-8t^3+(a+16)t^2-4at+C$

이다.

점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(0)=a$이므로

$x(t)=t^4-8t^3+(a+16)t^2-4at+a$

$\quad=t(t-4)\left(t^2-4t+a\right)+a$

따라서 $x(0)=x(4)=a$이다.

ㄱ. $\displaystyle\int_0^4 v(t)dt=x(4)-x(0)=0$이므로

$\displaystyle\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt=0$

$\displaystyle\int_0^2 v(t)dt=-\int_2^4 v(t)dt$

$A=\displaystyle\int_0^2 v(t)dt$이므로 $A=-\displaystyle\int_2^4 v(t)dt$이다. (참)

ㄴ.

$v(t)=2(t-2)\left(2t^2-8t+a\right)$에서

$f(t)=2t^2-8t+a$라 하면

방정식 $f(t)=0$에서 $D/4=16-2a>0$에서

$a<8$이면 방정식 $f(t)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. …㉠

두 실근을 α_1, α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$라 하면 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_2$는 $x=2$에 대칭이므로

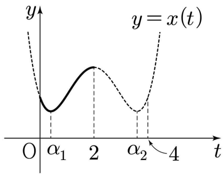
$\alpha_2=4-\alpha_1$이다.

따라서 방정식 $v(t)=0$의 해는

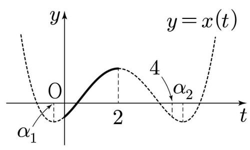
서로 다른 세 실근 α_1, 2, α_2 $(\alpha_1<2<\alpha_2)$을 갖는다.

따라서 $x(t)$는 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_2$에서 동일한 극솟값을 갖는 사차함수이다.

$B\neq 2A$



$B=2A$



$B=2A$ ⇒ 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량이 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 $\dfrac{1}{2}$이기 위해서는 구간 $(0, 2)$에서 사차함수 $x(t)$가 증가하고 구간 $(2, 4)$에서 함수 $x(t)$가 감소해야 한다.

즉, $x(t)$의 극솟값이 $t\le 0$과 $t\ge 4$에서 나타나야 한다.

$v(0)\le 0$

$-4a\le 0$

$a\ge 0$이다.

$B=2A$을 만족시키는 a의 최댓값은 0이다. (참)

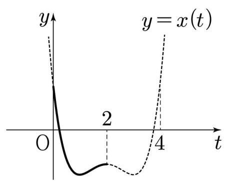
ㄷ.

$B>0$이므로 $B=-2A$에서 $A<0$이다.

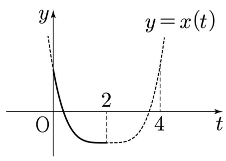
$x(0)>x(2)$이어야 한다.

또한 $B=-2A$을 만족시키기 위해서는 사차함수 $x(t)$가 구간 $(0, 2)$에서 감소하고 구간 $(2, 4)$에서 증가해야 한다. 즉, $x(t)$는 $x=2$에서 극솟값을 가진 함수이여야 한다.

$B\neq -2A$



$B=-2A$



㉠에서 $a\ge 8$이면 $v(t)=2(t-2)\left(2t^2-8t+a\right)=0$의 해가 $x=2$뿐이므로 사차함수 $x(t)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $B=-2A$을 만족시키는 a의 최솟값은 8이다. (참)

10) 정답 ④

a_1이 자연수이고 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(n-1)a_1$도 자연수이므로

$$a_{n+1}=\begin{cases}(n-1)a_1 & (a_n<0)\\ a_n-3 & (a_n \geq 0)\end{cases}$$

에서 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 -3이상인 정수이다.

$a_7<0$이면 $a_8=7a_1>0$이므로 $a_8<0$에 모순이다.

따라서 $a_7 \geq 0$이고 $a_8=a_7-3<0$이므로

$0 \leq a_7<3$이다.

즉, a_7의 값은 0, 1, 2가 가능하다.

(i) $a_7=0$일 때,

a_7은 자연수가 아니므로 $a_6=3$

a_6은 4의 배수가 아니므로 $a_5=6$

a_5는 3의 배수이므로

① $a_5=3a_1$일 때,

$a_1=2$, $a_2=-1$, $a_3=2$, $a_4=-1$, $a_5=3\times a_1=6$

로 만족한다.

$\therefore\ a_1=2$

② $a_5=a_4-3$일 때, $a_4=9$

a_4가 2의 배수가 아니므로 $a_3=12$

$a_3=12$, $a_2=15$, $a_1=18$

$\therefore\ a_1=18$

(ii) $a_7=1$일 때,

a_7은 5의 배수가 아니므로 $a_6=4$

① a_6은 4의 배수이므로

㉠ $a_6=4a_1$일 때로 보면 $a_1=1$이고

$a_2=-2$, $a_3=1\times a_1=1$, $a_4=-2$, $a_5=3\times a_1=3$, $a_6=0\neq 4$으로 모순

㉡ $a_6=a_5-3$으로 볼 때, $a_5=7$

a_5는 3의 배수가 아니므로 $a_4=10$

② a_4는 2의 배수이므로

㉠ $a_4=2\times a_1$에서 $a_1=5$

$a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=2\times a_1=10$

$\therefore\ a_1=5$

㉡ $a_4=a_3-3$으로 볼 때, $a_3=13$

$a_2=16$, $a_1=19$

$\therefore\ a_1=19$

(iii) $a_7=2$일 때,

a_7은 5의 배수가 아니므로 $a_6=5$

a_6은 4의 배수가 아니므로 $a_5=8$

a_5는 3의 배수가 아니므로 $a_4=11$

a_4는 2의 배수가 아니므로 $a_3=14$

$a_2=17$, $a_1=20$

$\therefore\ a_1=20$

(i), (ii), (iii)에서 가능한 a_1의 값의 합은

$2+18+5+19+20=64$

11) 정답 24

$\log_{\sqrt[3]{3}}x=k$ (k는 자연수)라 하면

$\log_{\sqrt[3]{3}}x=3\log_3 x=k$, 즉 $x=3^{\frac{k}{3}}$

(i) 자연수 x가 $x=3^{\frac{k}{3}}$ $(k=3,\ 6,\ 9,\ \cdots)$일 때,

$f(x)=k$이므로

$f(3)=3$, $f(9)=6$, $f(27)=9$, $\cdots$

(ii) 자연수 x가 $x\neq 3^{\frac{k}{3}}$ $(k=3,\ 6,\ 9,\ \cdots)$일 때, $f(x)=3^x$이므로

$f(2)=3^2=9$, $f(4)=3^4$, $f(5)=3^5$, $f(7)=3^7$, $\cdots$

(i), (ii)에서 $f(2)=f(27)=9$이므로

집합 A의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이라는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $b \leq 26$이어야 한다.

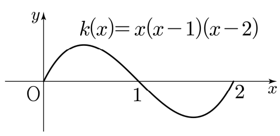
$a=1$일 때, $f(1)=0$이고 $0\not\in N$이므로 $a \geq 2$이다.

따라서 $b-a \leq 24$이다.

12) 정답 9

[그림 : 서태욱T]

$h(x)=\dfrac{f(x)-g(x)+|k(x)|}{2}$ 이다.



$0 \leq x<1$일 때, $k(x)\geq 0$이므로 $h(x)=f(x)$

$1 \leq x<2$일 때, $k(x) \leq 0$이므로 $h(x)=-g(x)$이다.

(나)에서 함수 $k(x)$는 주기가 2인 함수이므로

정수 n에 대하여

$2n \leq x < 2n+1$일 때, $k(x) \geq 0$이므로 $h(x)=f(x)$

$2n+1 \leq x < 2n+2$일 때, $k(x) \leq 0$이므로 $h(x)=-g(x)$

$$\int_0^9 h(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2\{-g(x)\}dx+\cdots+\int_7^8\{-g(x)\}dx+\int_8^9 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_6^7 f(x)dx+\int_8^9 f(x)dx$$

$$+\left\{\int_1^2\{-g(x)\}dx+\int_3^4\{-g(x)\}dx+\int_5^6\{-g(x)\}dx+\int_7^8\{-g(x)\}dx\right\}$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_6^7 f(x)dx+\int_8^9 f(x)dx$$

$$+\left\{\int_1^2\{f(x)-k(x)\}dx+\int_3^4\{f(x)-k(x)\}dx+\int_5^6\{f(x)-k(x)\}dx+\int_7^8\{f(x)-k(x)\}dx\right\}$$

$$=\int_0^9 f(x)dx-\int_1^2 k(x)dx-\int_3^4 k(x)dx-\int_5^6 k(x)dx-\int_7^8 k(x)dx$$
$$=\int_0^9 f(x)dx-4\int_1^2 k(x)dx$$
$$=8-4\int_1^2 \{x(x-1)(x-2)\}dx$$
$$=8-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=9$$

13) 정답 22
[출제자 : 서태욱T 답길학원]

조건 (나)에서 a_k가 홀수인지 짝수인지의 여부가 중요하므로 공차 d가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각해보자.
(i) $d=2n-1$ (n은 자연수)인 경우

	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
①	홀수	짝수	홀수	짝수
②	짝수	홀수	짝수	홀수

①의 경우 :
$$\sum_{k=m}^{m+3}\left\{(-1)^{a_k}\times a_k\right\}=-a_m+a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}=0$$
$\Rightarrow$ $a_m+a_{m+2}=a_{m+1}+a_{m+3}$
$\Rightarrow$ $a_{m+1}=a_{m+2}$
$\Rightarrow$ $d=0$
그런데 이는 d가 홀수라는 가정에 모순이다.
②의 경우 :
①과 같은 이유로 모순이 발생한다.
(ii) $d=2n$ (n은 자연수)인 경우

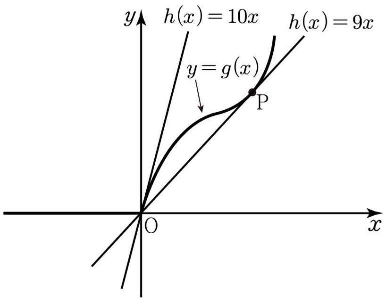
	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	a_{m+3}
①	홀수	홀수	홀수	홀수
②	짝수	짝수	짝수	짝수

①의 경우 :
$$\sum_{k=m}^{m+3}\left\{(-1)^{a_k}\times a_k\right\}=-a_m-a_{m+1}-a_{m+2}-a_{m+3}=0$$
$\Rightarrow$ $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}=0$
②의 경우 : $a_1=-45$이므로 가능하지 않다.
즉, $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}=0$이고
$a_m+a_{m+3}=a_{m+1}+a_{m+2}$이므로
$a_{m+1}+a_{m+2}=0$이다. …… ㉠
$\Rightarrow$ $a_1+md+a_1+(m+1)d=0$
$\Rightarrow$ $2a_1+(2m+1)d=0$
$\Rightarrow$ $(2m+1)d=90$
따라서 (i), (ii)에 의해 공차는 짝수이고 $(2m+1)d=90$이다.
$\Rightarrow$ $(2m+1)d=2\times3^2\times5$
$2m+1$이 홀수, d가 짝수이므로
순서쌍 $(2m+1,\ d)$는
(3, 30), (5, 18), (9, 10), (15, 6), (45, 2)이다.
따라서 순서쌍 $(m,\ d)$는
(1, 30), (2, 18), (4, 10), (7, 12), (22, 4)

이때 $a_1=-45$이고 ㉠에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 $m+1$째 항까지 음수이고 $m+2$째 항부터는 양수이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{|a_k|}=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{-a_k}=-m$이다.
이 값은 $m=22$일 때 최솟값 -22를 갖는다.
$\alpha=-22$이므로
$|\alpha|=22$

14) 정답 21
[출제자 : 정일권T 이미지매쓰학원]
[그림 : 이정배T]

방정식을 변형해서 $f(x)+x+|f(x)+x|=(k-1)x$ 라 두자.
좌변을 $g(x)=f(x)+x+|f(x)+x|$, 우변을 $h(x)=(k-1)x$라 하자.
$$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-x^2+5x=\frac{1}{2}x(x^2-2x+10)$$
$x^2-2x+10=(x-1)^2+9>0$ 이므로
$x\ge0$ 이면 $f(x)+x\ge0$ 이고, $x<0$ 이면 $f(x)+x<0$ 이다.
따라서 $g(x)=\begin{cases}x(x^2-2x+10) & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$
조건을 만족하는 그래프를 그려보면 다음과 같은 경우이다.



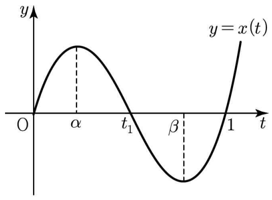
원점에서 $g(x)$에 그은 접선의 접점을 P라 하자.
$\mathrm{P}(t,\,t^3-2t^2+10t)$ 일 때, OP의 기울기와 점 P에서의 접선의 기울기가 같으므로
$$\frac{t^3-2t^2+10t}{t}=3t^2-4t+10\ (t>0)\ \rightarrow\ 2t^2(t-1)=0,\ t=1$$
따라서 OP의 기울기는 9이고, 원점 O에서 $g(x)$의 우미분 계수는 10이다.
$\alpha=9$ 일 때, $3=\lim_{k\to9+}N(k)\neq\lim_{k\to9-}N(k)=1$
$\alpha=10$ 일 때, $2=\lim_{k\to10+}N(k)\neq\lim_{k\to10-}N(k)=3$
이므로 조건을 만족한다.
따라서 만족하는 $\alpha=9,10$ 이므로
$k-1=9$ 또는 $k-1=10$이다.
$k=10$ 또는 $k=11$
따라서 k의 합은 21이다.

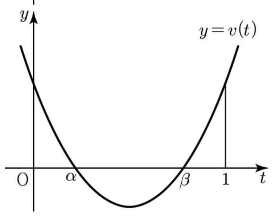
15) 정답 ②
[출제자 : 이정배T 김이김학원, 멘토수학]

$x(t)=x_1(t)-x_2(t)$
$=t^2(at+b)-t(at+b)$
$=t(t-1)(at+b)$
라 하고 위치 $x(t)$의 속도를 $v(t)$라 하자.

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0$ (거짓)

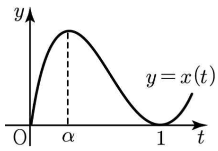
ㄴ. $\int_0^1 v(t)dt=0$이고 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$이므로 $a>0$에서 $x_1(t_1)=x_2(t_1)$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재하면 $y=x(t)$와 $y=v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

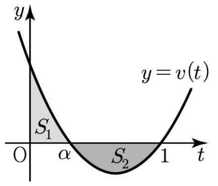




$v(t)=0$이 $(0, 1)$에서 서로 다른 두 근 α, β를 가지므로 $v_1(t_2)=v_2(t_2)$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에서 2개 존재한다. (참)

ㄷ. $a>0$에서 $b=-a$이면 $y=x(t)$와 $y=v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





이때, $S_1=S_2=1$이면

$\int_0^1 |v_1(t)-v_2(t)|dt=2$이지만 $x(t_3)=x_1(t_3)-x_2(t_3)=0$을 만족시키는 t_3의 값은 구간 $(0, 1)$에 존재하지 않는다. (거짓)

[랑데뷰팁]-김진성T
ㄴ. $x_1(t)=x_2(t) \Rightarrow h(t_1)=0$
$t_1 \in (0, 1)$이면
$h(0)=h(t_1)=h(1)$이 되어서 롤의 정리에 의해서
$h'(\alpha)=0$인 $\alpha \in (0, t_1)$
$h'(\beta)=0$인 $\beta \in (t_1, 1)$
즉, $h'(\alpha)=v(\alpha)=v_1(\alpha)-v_2(\alpha)=0$
$h'(\beta)=v(\beta)=v_1(\beta)-v_2(\beta)=0$

즉, $v(t_2)=0$인 t_2가 구간 $(0, 1)$에서 2개 존재한다. (참)