공부하다

박수칠 수학

기본서

학습 자료

☆이 자료는 EBS 연계 교재에 수록된 문제 가운데 고난도 유형을 선별하고, 그에 관련된 수능/모평/학평 기출 문제를 추가해서 쉽게, 자세하게, 그리고 다양한 방법으로 풀이한 것입니다. 따라서 각 문제를 푼 다음, 해설까지 정독하면 실력 향상에 많은 도움이 될 것입니다.

EBS 수능특강+기출문제

적분과 통계-2강

1 2016학년도 수능 대비 수능특강 적통 $p.22$ #1

$0<x<4\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$의 도함수가

$f'(x)=x\cos\dfrac{x}{2}$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 π일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① -8π ② -7π ③ -6π
④ -5π ⑤ -4π

2 2008학년도 7월 학평(가형) #19

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(x-1)^3$이다. 함수 $f(x)$의 극값을 M, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $A(0,f(0))$, $B(2,f(2))$에서 접하는 두 접선의 교점의 y좌표를 N이라 할 때, $16(M-N)$의 값을 구하시오. [3점]

3 2016학년도 수능 대비 수능특강 적통 $p.22$ #2

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=2$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f'(x)=(2x+1)e^{x^2}+1$

함수 $g(x)$를 $e^x f(x)$라 할 때, $g'(0)+f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$의 값은?

① $1+\sqrt{e}$ ② $2+\sqrt{e}$ ③ $3+\sqrt{e}$
④ $4+\sqrt{e}$ ⑤ $5+\sqrt{e}$

4 2014학년도 7월 학평(B형) #9

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\frac{\pi}{2})=1$	(나) $f(x)+xf'(x)=x\cos x$

$f(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{2}{\pi}$ ② $-\dfrac{1}{\pi}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{2}{\pi}$

5 2016학년도 수능 대비 수능특강 적통 $p.22$ #3

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=4f(x)f(y)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

$f'(0)=\dfrac{3}{2}$일 때, $f(\ln 2)$의 값을 구하여라.

6 2016학년도 수능 대비 수능특강 적통 $p.11$ #4

미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$$

를 만족시킨다. $f'(1)=2$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선과 원점 사이의 거리는?

① $\dfrac{2\sqrt{65}}{13}$ ② $\dfrac{11\sqrt{65}}{65}$ ③ $\dfrac{12\sqrt{65}}{65}$

④ $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ ⑤ $\dfrac{14\sqrt{65}}{65}$

7 2007학년도 수능 6월 모평(가형) #23

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$$

을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$$

일 때, $f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

8 2016학년도 수능 대비 수능특강 적통 $p.22$ #4

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x) = -g(x),\ g'(x) = -f(x)$$이고

$$f(x)+g(x)>0,\ f(x)>g(x)$$

를 만족시킨다. $f(0)=3$, $g(0)=2$일 때, 아래에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\{f(2)\}^2-\{g(2)\}^2=5$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 수능특강+기출문제 적통-2강

1 ②

★주어진 도함수로부터 극값의 위치를 파악하고, 도함수를 적분해서 극값을 구하는 문제

방정식 $f'(x)=x\cos\frac{x}{2}=0\ (0<x<4\pi)$의 근이 $x=\pi,\ 3\pi$ 이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	3π	$\cdots$	(4π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

그리고 도함수 $f'(x)=x\cos\frac{x}{2}$를 부분적분으로 적분하면

$$f(x)=\int x\cos\frac{x}{2}\,dx=2x\sin\frac{x}{2}-\int 2\sin\frac{x}{2}\,dx$$
$$=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$$

이며, 극댓값 $f(\pi)=\pi$를 이용해서 적분상수 C를 구하면

$$f(\pi)=2\pi+C=\pi$$
$$C=-\pi$$
$$f(x)=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}-\pi$$

가 된다. 따라서 극솟값은 다음과 같다.

$$f(3\pi)=6\pi\times(-1)-\pi=-7\pi$$

2 12

도함수 $f'(x)=(x-1)^3$로 함수 $f(x)$의 증감을 조사하면

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

와 같다. 그리고 도함수 $f'(x)$를 적분하면

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+C$$

이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$$f(1)=C$$

이다. 따라서 $M=C$

또한 $f'(0)=-1,\ \ f'(2)=1,\ \ f(0)=f(2)=\frac{1}{4}+C$이므로

$A(0,f(0)),\ B(2,f(2))$에서의 접선 방정식은

$$y-\left(\frac{1}{4}+C\right)=-(x-0) \qquad y-\left(\frac{1}{4}+C\right)=x-2$$
$$y=-x+\frac{1}{4}+C \qquad y=x-\frac{7}{4}+C$$

이며, 두 식을 연립해서 더하면 다음과 같이 x가 소거되면서 접선 교점의 y좌표가 나타난다.

$$2y=-\frac{3}{2}+2C \Rightarrow y=-\frac{3}{4}+C=N$$

$$\therefore 16(M-N)=16\times\frac{3}{4}=12$$

3 ③

★함수 $y=e^{f(x)}$의 도함수가 $y'=f'(x)e^{f(x)}$임을 알고 있으면 치환적분을 거치지 않고 쉽게 풀 수 있는 문제

$g'(0)$의 값을 구하기 위해 함수 $g(x)$를 미분하고 $x=0$을 대입하면 다음과 같다.

$$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$$
$$=e^x\left\{(2x+1)e^{x^2}+1\right\}=(2x+1)e^{x^2+x}+e^x$$
$$g'(0)=2$$

다음으로 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$의 값을 구하려면 함수 $f(x)$를 구해야 한다. 이를 위해 위의 도함수 $g'(x)$를 변형해보자.

$$g'(x)=(2x+1)e^{x^2+x}+e^x=(x^2+x)'e^{x^2+x}+e^x$$
$$=\left(e^{x^2+x}+e^x\right)'$$

$$g(x)=e^{x^2+x}+e^x+C$$
$$f(x)=\frac{g(x)}{e^x}=e^{x^2}+1+\frac{C}{e^x}$$

$$f(0)=2+C=2$$
$$C=0$$

$$f(x)=e^{x^2}+1$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{e}+1$$
$$\therefore g'(0)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2+(\sqrt{e}+1)=3+\sqrt{e}$$

4 ②

★함수 $y=xf(x)$의 도함수가 $y'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하는 문제

(나)에 주어진 식을 변형하면

$$f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'=x\cos x$$

이므로 $xf(x)$는 다음과 같다.

$$xf(x)=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

여기에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{2}+C$$
$$C=0$$

$$xf(x)=x\sin x+\cos x$$
$$f(x)=\sin x+\frac{\cos x}{x}$$

따라서

$$f(\pi)=0+\frac{(-1)}{\pi}=-\frac{1}{\pi}$$

5 16

★함수 $f(x)$가 $f(x+y)=\cdots$ 꼴의 함수방정식으로 정의될 때, 도함수의 정의를 이용해서 $f'(x)$를 구하고 다시 적분해서 $f(x)$를 구하는 문제

㈎의 함수방정식과 도함수의 정의를 이용해서 도함수 $f'(x)$를 구하면 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$=4f(x)\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{4}}{h}$$

㈎의 함수방정식에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=4\{f(0)\}^2$

$f(0)=\frac{1}{4}$

$$f'(x)=4f(x)\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=4f(x)f'(0)$$

$$=6f(x)$$

따라서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=6$이 성립하고, 양변을 x에 대해 적분하면 $f(x)$가 나타난다.

$\ln f(x)=6x+C$

$f(x)=e^{6x+C}$ ……… ①

㈎의 함수방정식에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=4\{f(0)\}^2 \Rightarrow f(0)=\frac{1}{4}$

이므로 이를 ①에 적용해서 적분상수 C와 $f(x)$를 구하면

$f(0)=e^C=\frac{1}{4} \Rightarrow C=\ln\frac{1}{4}=-2\ln 2$

$f(x)=e^{6x-2\ln2}$

이다. 따라서

$f(\ln 2)=e^{6\ln 2-2\ln 2}=e^{4\ln2}=2^4=16$

[다른 방법] 도함수 $f'(x)$는 대학수학에서 배우는 편미분의 원리로 구할 수도 있다. 이 방법은 함수 $f(x)$가 두 개의 변수 x, y에 대한 함수방정식으로 정의될 때 적용하며, y에 상수 k를 대입해서 변수를 하나로 줄인 다음 미분하는 것이 핵심이다.

㈎의 함수방정식에 $y=k$(k는 임의의 상수)를 대입하고, 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x+k)=4f(x)f(k)$

$f'(x+k)=4f'(x)f(k)$

가 된다. 여기에 $x=0$을 대입해서

$f'(k)=4f'(0)f(k)=6f(k)$

로 만든 다음, 임의의 상수 k를 x로 바꾸고 식을 변형해서 적분하면 다음과 같다.

$f'(x)=6f(x)$

⋮

6 ③

주어진 함수방정식

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$ ……… ①

와 도함수의 정의를 이용해서 도함수 $f'(x)$를 구하면 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+6xh\}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+6x\right\}$$

또한 $f'(1)=2$에 ①과 미분계수의 정의를 적용하면

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+6h\}-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+6\right\}=2$$

$$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-4$$

이므로 도함수는

$f'(x)=6x-4$ ……… ②

가 된다.

따라서 함수 $f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 기울기는 $f'(2)=8$이고, 접점의 y좌표 $f(2)$를 구하기 위해 ②를 적분하면 다음과 같다.

$f(x)=3x^2-4x+C$

①에 $x=y=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로

$f(0)=C=0$

$f(x)=3x^2-4x$

$f(2)=4$

함수 $f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선 방정식은

$y-4=8(x-2)$

$8x-y-12=0$

이며, 접선과 원점 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|-12|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{65}}=\frac{12\sqrt{65}}{65}$$

[다른 방법] 여기서도 도함수 $f'(x)$를 편미분의 원리로 구할 수 있다.

주어진 함수방정식

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$

에 $y=k$(k는 임의의 상수)를 대입하고, 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x+k)=f(x)+f(k)+6kx$

$f'(x+k)=f'(x)+6k$

가 된다. 여기에 $x=0$을 대입하면 다음과 같이 함수 $f(x)$의 도함수가 k에 대한 식으로 나타난다.

$f'(k)=f'(0)+6k$

다시 $k=1$을 대입하면

$f'(1)=f'(0)+6$

$f'(0)=-4$

이므로

$f'(k)=6k-4$

$f'(x)=6x-4$

$\vdots$

7 28

주어진 함수방정식

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

과 도함수의 정의를 이용해서 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}$$

①에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x\right\}$$
$$=2x+f'(0) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

이 되고, 양변을 x에 대해 적분하면 다음과 같다.

$$f(x)=x^2+xf'(0)+C$$

$f(0)=C=1$

$$f(x)=x^2+xf'(0)+1$$

이를 문제에 주어진 극한 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{x^2+xf'(0)+1\}-\{2x+f'(0)\}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2+(x-1)f'(0)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+f'(0)}{x+1}$$
$$=\frac{f'(0)}{2}=14$$
$$\therefore f'(0)=28$$

8 ⑤

ㄱ. 주어진 식 $\{f(2)\}^2-\{g(2)\}^2=5$의 좌변으로부터 새로운 함수 $y=\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$을 생각해 보자. 이 함수는 도함수가

$$y'=2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)$$
$$=2f(x)\{-g(x)\}-2g(x)\{-f(x)\}$$
$$=-2f(x)g(x)+2f(x)g(x)$$
$$=0$$

이므로 상수함수이며, $x=0$일 때의 함숫값이

$$y_{x=0}=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2=3^2-2^2=5$$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=5$$

가 성립한다. 따라서

$$\{f(2)\}^2-\{g(2)\}^2=5 \text{ (참)}$$

ㄴ. ㄱ으로부터

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=5$$
$$\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2+5$$
$$f(x)=\sqrt{\{g(x)\}^2+5}\ge\sqrt5$$

가 성립한다. 여기서 등호는 $g(x)=0$일 때 성립하기 때문에 $f(x)$의 최솟값이 $\sqrt5$이기 위해서는 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재해야 한다.

이를 확인하기 위해 함수 $g(x)$를 구해보자. 먼저 두 식 $f'(x)=-g(x)$, $g'(x)=-f(x)$를 더해서 변형하면

$$f'(x)+g'(x)=-f(x)-g(x)$$
$$\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=-1$$

이며, 양변을 x에 대해 적분하고 $x=0$을 대입해서 적분상수의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\ln\{f(x)+g(x)\}=-x+C$$
$$f(x)+g(x)=e^{-x+C}$$

$f(0)+g(0)=e^C$

$5=e^C$

$C=\ln5$

$$\therefore f(x)+g(x)=e^{-x+\ln5}=5e^{-x} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

또한 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=5$ 로부터

$$f(x)-g(x)=\frac{5}{f(x)+g(x)}=\frac{5}{5e^{-x}}=e^x \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

이며, ①, ②를 빼면

$$2g(x)=5e^{-x}-e^x$$
$$g(x)=\frac52e^{-x}-\frac12e^x$$

이다. 이를 이용해서 방정식 $g(x)=0$을 풀면

$$\frac52e^{-x}=\frac12e^x \Rightarrow e^{2x}=5 \Rightarrow x=\frac12\ln5$$

이다. 따라서 $g(x)=0$을 만족시키는 x가 존재하므로 $f(x)$의 최솟값은 $\sqrt5$이다.

ㄷ. $f(x)+g(x)>0$, $f(x)>g(x)$로부터 $f(x)>0$가 항상 성립한다. 따라서

$$g'(x)=-f(x)<0$$

이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. (참)

[다른 방법] 다음과 같이 $f(x)$, $g(x)$ 각각의 함수식을 구할 수도 있다.

두 식 $f'(x)=-g(x)$, $g'(x)=-f(x)$를 더해서 변형하면

$$f'(x)+g'(x)=-f(x)-g(x)$$
$$\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=-1$$

이며, 양변을 x에 대해 적분하고 $x=0$을 대입해서 적분상수의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\ln\{f(x)+g(x)\}=-x+C_1$$
$$f(x)+g(x)=e^{-x+C_1}$$

$$f(0)+g(0)=e^{C_1}$$
$$5=e^{C_1}$$
$$C_1=\ln 5$$

$$\therefore f(x)+g(x)=e^{-x+\ln 5}=5e^{-x} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

두 식 $f'(x)=-g(x)$, $g'(x)=-f(x)$를 빼서 변형하면

$$f'(x)-g'(x)=f(x)-g(x)$$
$$\frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}=1$$

이며, 양변을 x에 대해 적분하고 $x=0$을 대입해서 적분상수의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\ln\{f(x)-g(x)\}=x+C_2$$
$$f(x)-g(x)=e^{x+C_2}$$
$$f(0)-g(0)=e^{C_2}$$
$$1=e^{C_2}$$
$$C_2=0$$

$$\therefore f(x)-g(x)=e^{x} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①+②로부터

$$2f(x)=5e^{-x}+e^{x} \Rightarrow f(x)=\frac{5}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$$

①-②로부터

$$2g(x)=5e^{-x}-e^{x} \Rightarrow g(x)=\frac{5}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x}$$

ㄱ. $f(2)=\frac{5}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}$, $g(2)=\frac{5}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{2}$이므로

$$\{f(2)\}^2-\{g(2)\}^2$$
$$=\left(\frac{5}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)^2$$
$$=2\times\frac{5}{2}e^{-2}\times\frac{1}{2}e^{2}+2\times\frac{5}{2}e^{-2}\times\frac{1}{2}e^{2}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$$

(참)

ㄴ. 산술평균, 기하평균 사이의 관계에 따라 다음과 같이 함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.

$$f(x)=\frac{5}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}\geq 2\sqrt{\frac{5}{2}e^{-2}\times\frac{1}{2}e^{2}}$$
$$=2\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{5}$$

(참)

ㄷ. $g'(x)=\left(\frac{5}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x}\right)'=-\frac{5}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x}<0$

이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. (참)