곡선이론 1

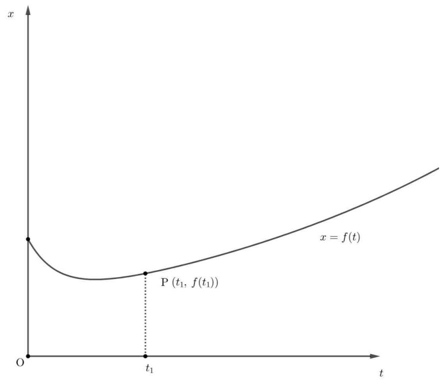
著 : 雀

sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 직선운동

가장 간단한 형태의 곡선은 직선이므로, 2차원과 3차원의 운동을 논하기에 앞서 수직선을 따라 움직이는 물체의 운동을 분석해보도록 하겠다.

직선운동에서는 오직 위치 x만이 시간 t에 의존하므로 이는 $x = f(t)$와 같이 표현되고, 아래 **[그림 1]**과 같이 시간에 따른 변위 그래프를 그릴 수 있다.



[그림 1] 시간에 따른 변위($x - t$) 그래프

또한 시간에 따른 속도 $v(t)$는 $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$이고, 속력은 $|v(t)| = |f'(t)|$, 가속도는 $a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$, 가속도의 크기는 $|a(t)| = |f''(t)|$이다.

이를 이용하여 시간 $t = t_1$에서 점 P의 위치를 구해보면

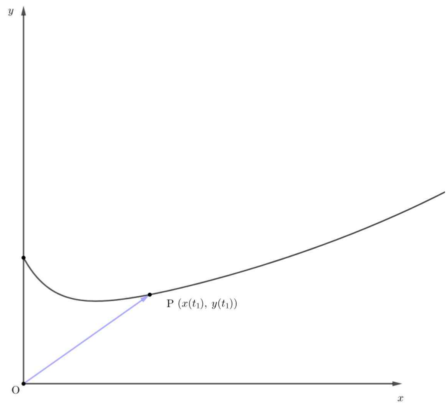
$$f(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \quad (\text{단, } x_0 = f(t_0))$$

이고, 마찬가지로 시간 $t_1 \le t \le t_2$에서 점 P의 변위 d와 이동거리 s는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt, \quad s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt$$

Ⅱ. 평면운동

점 P가 2차원 평면 상에서 움직이는 경우, 시간에 따른 점 P의 위치는 x좌표와 y좌표로 표현될 것이고, 이는 점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 이용하여 해석할 수 있다. 만약 점 P의 이동경로를 xy평면에 그리게 된다면, x와 y는 각각 t를 매개변수로 매개화된 상태일 것이다. 즉, 아래 **[그림 2]**와 같이 xy평면에서 점 P의 이동경로와 그 위치벡터를 생각할 수 있다.



[그림 2] 시간 t로 매개화되어 xy평면에 그려진 점 P의 궤적

즉 시간 t에 대한 점 P의 위치는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x(t),\, y(t))$와 같이 주어지며, 이 위치벡터를 직선운동에서와 동일하게 한 번 미분, 두 번 미분하여 속도와 가속도를 얻을 수 있다. 여기서 벡터 미분의 개념이 필요한데, 단순히 벡터의 각 성분을 미분하는 것으로 받아들여도 무방하다. 즉, 속도벡터 $\vec{v}$와 가속도벡터 $\vec{a}$는

$$\vec{v} = (x'(t),\, y'(t)), \quad \vec{a} = (x''(t),\, y''(t))$$

와 같이 주어지고, 이들의 크기는 다음과 같다.

$$|\vec{v}| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{[x''(t)]^2 + [y''(t)]^2}$$

변위와 이동거리 역시 이들 벡터를 적분하여 얻을 수 있는데, 벡터의 미분과 마찬가지로 피적분 벡터의 각 성분을 적분한 것으로 생각하면 된다. 시간 $t = t_1$에서 점 P의 위치는

$$\overrightarrow{x_0} + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}dt = (x_0,\, y_0) + \left(\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt,\, \int_{t_0}^{t_1} y(t)dt \right)$$

이고, 위치의 변화량은

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\,dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} x(t)dt,\ \int_{t_0}^{t_1} y(t)dt\right)$$

이며, 이동거리는

$$\int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

이다. 특히 이동거리는 점 P 의 자취에 해당하는 곡선의 길이(Arc Length)이며, 여기까지는 교육과정 미적분 범위 내에서 친숙한 내용일 것이다.

Ⅲ. 공간운동

점 P 가 3차원 공간에서 움직일 경우, 평면운동과 마찬가지로 벡터 미적분을 이용하여 해석해야 한다. 다음은 벡터 미적분의 기본적인 성질들이며, 성분을 대입하여 쉽게 증명할 수 있으므로 증명은 생략하고 넘어가도록 하겠다.

두 공간벡터 $\vec{u}, \vec{v}$와 실수 c, t에 관한 함수 f(스칼라)에 대하여, 실함수의 미분과 마찬가지로 선형성과 곱의 미분이 성립한다. ($\cdot$ 은 내적, $\times$는 외적이다.)

(1) $(\vec{u} \pm \vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$

(2) $(c\vec{u})' = c\,\vec{u}'$

(3) $(f(t)\vec{u})' = f'(t)\vec{u} + f(t)\vec{u}'$

(4) $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

(5) $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'$

또한, 다음의 **보조정리 1**이 필요하다.

Lemma 1. 공간벡터 $\vec{v}$에 대하여 $\vec{v}$의 크기 $|\vec{v}|$가 일정할 때, $\vec{v}$와 $\vec{v}'$은 서로 수직하다.

pf) 상수 c에 대하여 $|\vec{v}| = c$라고 하자. 이때 $\vec{v}$의 성분을 $\vec{v} = (x, y, z)$라고 하면 $|\vec{v}|^2 = c^2 = x^2 + y^2 + z^2$이고 양변을 매개변수 t로 미분하면 $0 = 2x'x + 2y'y + 2z'z$이다. 즉, $0 = x'x + y'y + z'z = \vec{v} \cdot \vec{v}'$이므로 $\vec{v} \perp \vec{v}'$임이 증명되었다. ■

이제 점 P 의 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\beta}$를 생각하자. 편의상 벡터를 나타내는 화살표는 생략하고, $\vec{\beta}$를 시간 t에 관한 함수 $\beta(t)$로써 다룰 것이다. 공간의 곡선 $\beta(t)$에 대하여 정칙곡선과 단위속력곡선을 각각 다음과 같이 정의한다.

> **Def.** 정칙곡선(Regular Curve) $\alpha(s)$는 다음의 두 조건을 만족시키는 공간 곡선이다.
>
> ① $\alpha'(s)$가 존재한다.
> ② 임의의 s에 대하여 $\alpha(s) \neq 0$이다.

> **Def.** 단위속력곡선(Unit Speed Curve) $\alpha(s)$는 다음의 두 조건을 만족시키는 공간 곡선이다.
>
> ① $\alpha(s)$는 정칙곡선이다.
> ② $|\alpha'(s)| = 1$이다. 즉, 속력이 항상 1이다.

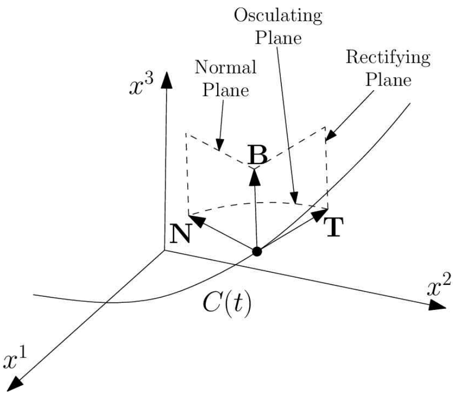
정칙곡선을 간단하고 직관적으로 표현하면 "부드럽게 잘 이어진 곡선" 이다.

공간에서 곡선의 거동을 설명하기 위해 접선벡터 T, 법선벡터 N, 그리고 종법선벡터 B를 정의하고, 이를 이용하여 곡률 κ와 비틀림(열률) τ를 구할 것이다.

> **Def.** 공간 곡선 $\beta(t)$에 대하여, 접선벡터(Tangent Vector) T는 운동방향을 향하면서 주어진 점에서 $\beta(t)$에 접하는 단위 벡터로 $\beta'(t)$와 평행하고, 법선벡터(Normal Vector) N은 접선벡터 T를 미분한 T'의 방향을 향하는 단위 벡터로 $\beta''(t)$와 평행하다. $|T| = |N| = 1$이고, T와 N이 이루는 평면을 접촉평면이라 한다.

> **Def.** 공간 곡선 $\beta(t)$에 대하여, 종법선벡터(Binormal Vector) B는 접선벡터 T와 법선벡터 N의 외적으로 정의되는 벡터이다. 즉 $B = T \times N$이다.

다음 **[그림 3]**에서 접선벡터 T와 법선벡터 N, 그리고 종법선벡터 B를 시각적으로 확인할 수 있다.



[그림 3] 공간곡선의 접선벡터, 법선벡터, 종법선벡터

Ⅳ. 공간 곡선의 곡률과 비틀림(열률)

곡률이란, 곡선이 얼마나 휘어져 있는지를 수치적으로 나타낸 값이다. 직관적으로 직선의 곡률이 0이 되어야 하므로, 곡선의 곡률은 해당 지점에서의 접촉원의 반지름의 역수로 정의한다. 접촉원은 곡선의 접평면 상에 존재하면서 해당 곡선을 넘어가지 않고 곡선과 접하는 최대 반지름의 원으로, 직선의 경우 접촉원의 반지름이 양의 무한대로 발산하여 곡률이 0에 수렴하게 된다.

단위속력곡선 $\alpha(s)$에 대하여, 접선벡터 $T(s)$, 법선벡터 $N(s)$, 종법선벡터 $B(s)$는 다음과 같이 구해진다.

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{1}{|T'(s)|}T'(s), \quad B(s) = T(s) \times N(s)$$

이고, 벡터 외적의 성질을 이용하면 $|B(s)| = 1$임을 어렵지 않게 확인할 수 있다. 또한 곡선의 곡률(Curvature) κ와 비틀림(일률, Torsion) τ는 다음과 같이 정의되는 값들이다.

$$\kappa(s) = |T'(s)|, \quad \tau(s) = |B'(s)|$$

교재에 따라서 비틀림을 $\tau(s) = -<B'(s), N(s)>$로 정의하는 경우도 있으며, $<\vec{u}, \vec{v}>$는 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$의 내적이다. (벡터의 화살표 기호를 생략하였으므로 스칼라 간의 단순 곱셈과 벡터 간의 내적을 구분하기 위해 이러한 기호를 사용한다.)

이렇게 구해진 다섯 개의 값 T, N, B, κ, τ를 Frenet-Serret Apparaus라고 한다. (1847년에 이 공식을 발견한 장 프레데릭 프레네와 1851년에 이를 독자적으로 발견한 조제프 알프레드 세레의 이름을 땄다. 공식 자체는 19세기 중반에 발견되었지만, 본문에서 사용된 벡터 기호 및 선형대수학과 벡터 미적분학은 그로부터 한참 후에 소개되었다.)

또한 다음의 **보조정리** 2가 성립한다.

Lemma 2. 임의의 공간 곡선의 Frenet-Serret Appatus에 대하여 B'은 N과 평행하다.

pf) $|B| = 1$이므로 **보조정리** 1에 의해 $B' \perp B$이다. 또한 공간벡터의 성질에 의해 $B' = (T \times N)' = T' \times N + N \times T' = N \times T'$ $(\because T' \parallel N)$이므로 $B' \perp T$이다. 한편 세 벡터 T, N, B는 서로 수직이므로 $B' \parallel N$을 얻는다. ■

Ⅴ. 변수 변환과 재매개화

xy평면에 놓인 원을 예시로 들자. 이 원을 따라 움직이는 점 P 는 반지름 r과 시간 t에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\beta(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$$

점 P 의 속도와 속력은 다음과 같다.

$$\beta'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0), \quad |\beta'(t)| = r$$

이때 점 P 의 속력은 일정하지만 그 값이 1이라는 보장이 없다. 따라서 속력 r을 1로 만들기 위해 $t = \dfrac{s}{r}$로 치환할 수 있고, s를 매개변수로 가질 때에는 다음과 같이 속력이 1인 단위속력곡선이 된다.

$$\alpha(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right)$$

일반적으로 다음과 같은 변수 변환을 통해 모든 공간 곡선은 단위속력곡선으로 바꿀 수 있으며, 이를 곡선의 길이(Arc Length)로 재매개화한다고 표현한다.

$$s = \int_0^t |\beta'(t)|\,dt$$

$\alpha(s)$의 Frenet-Serret Appatus를 구해보면

$$T(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}, 0\right), \quad T'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, 0\right)$$

에서

$$\kappa(s) = |T'(s)| = \frac{1}{r}$$

이다. 이는 원의 접촉원은 모든 점에서 자기자신이므로 모든 점에서의 곡률이 $\dfrac{1}{r}$이라는 결론과 일치한다. 또한

$$N(s) = \left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}, 0\right), \quad B(s) = T(s) \times N(s) = (0, 0, 1)$$

이므로 원 위의 임의의 점에서의 종법선벡터는 z축 방향의 단위 벡터임을 알 수 있다. 마지막으로 비틀림(열률)은

$$\tau(s) = |B'(s)| = 0$$

이고, 평면 위의 원을 예로 들었으므로 비틀림은 당연히 0이어야 한다. 비틀림은 돛단배의 돛을 상상하면 이해하기 쉬운데, 돛 위에 아무렇게나 그려진 평면 곡선이 있고 바람이 불지 않아 돛이 그 형태를 유지한다면 위 예시와 같이 비틀림이 0일 것이다. 만약 바람이 불어 돛이 이리저리 흔들려, 어떤 방향으로든 일그러진다면 그 위에 있던 곡선은 공간 곡선이 되고, 비틀림이 0이 아니게 된다.

한편 재매개화 공식

$$s = \int_0^t |\beta'(t)|\,dt$$

가 항상 적용가능한 것은 아닌데, 만약 $|\beta'(t)|$가 적분 불가능하거나 그 부정적분이 초등함수들의 유한 연산으로 표현할 수 없는 경우 문제가 생길 수 있다. 특히 절댓값이 있어 제곱근 안에 복잡한 꼴의 함수가 들어있게 된다면 적분이 매우 어려워진다.

이렇게 적분이 어려운 경우에 대한 해결법은 다음 칼럼에서 논의하도록 하겠다.

Ⅵ. 연습문제

1. $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$에서 곡선 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$의 길이를 구하여라.

2. 곡선 $\alpha(t) = (\sin 3t \cos t,\ \sin 3t \sin t,\ 0)$가 정칙곡선임을 증명하고, $t = \dfrac{\pi}{3}$에서의 α의 접선의 방정식을 구하여라.

3. 다음 각 곡선을 호의 길이로 재매개화 하여라.

   (1) $\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ht)$

   (2) $\alpha(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$

   (3) $\alpha(t) = (\cosh t,\ \sinh t,\ t)$

4. 곡선 $\alpha(s) = \left(\dfrac{(1+s)^{3/2}}{3},\ \dfrac{(1-s)^{3/2}}{3},\ \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$가 단위속력곡선임을 보이고, Frenet-Serret Appatus를 구하여라.

5. 곡선 $\alpha(s) = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2+1},\ (s + \sqrt{s^2+1})^{-1},\ \sqrt{2}\ln(s + \sqrt{s^2+1})\right)$의 Frenet-Serret Appatus를 구하여라.