17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
>
> (나) $n=3$, 4일 때, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점] 65

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1) \longrightarrow S(n) = a_n a_{n+1}$

$n=1$: $S_1 = a_1 a_2$

$a_1 = a_1 a_2$

$a_1(a_2-1) = 0$

$a_1 = 0$ or $a_2 = 1$

$S_n - S_{n-1} = a_n$, $S_{n-1} = a_n a_{n-1}$ $(2 \le n \le 5)$

$S_n - S_{n-1} = a_n a_{n+1} - a_n a_{n-1}$

$= a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_n$

$a_n(a_{n+1} - a_{n-1} - 1) = 0$

$a_n = 0$ or $a_{n+1} = a_{n-1} + 1$

$\therefore a_1 = 0$ or $a_2 = 1$

$a_2 = 0$ or $a_3 = a_1 + 1$

$a_3 = 0$ or $a_4 = a_2 + 1$

$a_4 = 0$ or $a_5 = a_3 + 1$

$a_5 = 0$ or $a_6 = a_4 + 1$

$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \le 0$, $\frac{f(6)-f(4)}{6-4} \le 0$

$\therefore a_5 \le a_3$, $a_6 \le a_4$

$\therefore a_4 = 0$, $a_5 = 0$ ($\because a_5 = a_3 + 1$, $a_6 = a_4 + 1$ 모순)

17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

i) $a_1=0$, $a_2=0$

$a_4=a_2+1$

$0\neq 0+1$

$\therefore a_3=0$

⋮

$\therefore a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$

$\longrightarrow$ $f(x)$가 사차함수라는 것에 모순

ii) $a_1=0$, $a_3=a_1+1$

$a_3=1$

$a_4=a_2+1 \longrightarrow a_2=-1$ $(\because a_4=0)$

$\therefore a_1=a_4=a_5=0$, $a_3=1$, $a_2=-1$

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-4)(x-5)(x-b)$

$f(3)=a\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)(3-b)$

$=12a-4ab=1$

$f(2)=a\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-3)(2-b)$

$=12a-6ab=-1$

$\therefore a=\frac{5}{12}$, $b=\frac{12}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)(x-\frac{12}{5})$

$f(6)=\frac{5}{12}\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{18}{5}=15 \longrightarrow$ 모순 $(\because a_6\leq a_4+1)$

iii) $a_2=1$, $a_3=a_1+1$

$a_3=0$, $a_1=-1$

$a_4=a_5=0$

17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

$\therefore f(x) = a(x-3)(x-4)(x-5)(x-b)$

$f(2) = a\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(2-b)$

$= -12a + 6ab = 1$

$f(1) = a\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)(1-b)$

$= -24a + 24ab = -1$

$\therefore a = -\frac{5}{24},\ b = \frac{6}{5}$

$\therefore f(x) = -\frac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x - \frac{6}{5}\right)$

$f(6) = -\frac{5}{24} \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{24}{5} = -6 \longrightarrow$ 성립

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{24}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{13}{10}$

$= \frac{65}{128}$

$\therefore 128 \times f\left(\frac{5}{2}\right) = 65$