13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점] 243

sol.)

$h(x)=f(x)-g(x)$: 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

가 $\longrightarrow f(\alpha)=g(\alpha) \longrightarrow h(\alpha)=0$

$\longrightarrow f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16 \longrightarrow h'(\alpha)=0$

나 $\longrightarrow f'(\beta)=g'(\beta)=16 \longrightarrow h'(\beta)=0$

$\therefore h(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

$h'(x)=2(x-\alpha)(x-k)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$

$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(3\beta-2k-\alpha)=0$

$\therefore 2k=3\beta-\alpha \quad (\because \alpha\neq\beta)$

$\therefore h'(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

$g(x)=2x^2\sim$

$g'(x)=4x+a$

$g'(\alpha)=4\alpha+a=-16$

$g'(\beta)=4\beta+a=16$

$\therefore \beta-\alpha=8$

$$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1)=-h(\beta+1)$$

$$=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$=-(\beta-\alpha+1)^2\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}+1\right)$$

$$=-(8+1)^2(-4+1)$$

$$=-1\times 81\times(-3)$$

$$=243$$

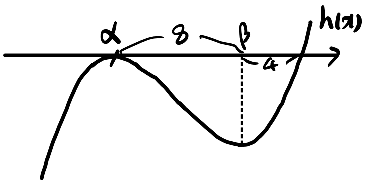
Sol$_2$) 비율관계

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$h(\alpha)=h'(\alpha)=h'(\beta)=0$$

$$g'(\alpha)=4\alpha+a=-16$$
$$g'(\beta)=4\beta+a=16$$

$$\therefore \beta-\alpha=8$$



($\because$ 비율관계)

$$\therefore h(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-12)$$

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1) = -h(\beta+1)$

$= -(\beta-\alpha+1)^2(\beta-\alpha-11)$

$= -(8+1)^2(8-11)$

$= -81\times(-3)$

$= 243$

sol3) f 와 g 따로

$f(\alpha)=g(\alpha)=k$

$f(x+\alpha)=x^3+px^2-16x+k$

$g(x+\alpha)=2x^2-16x+k$

$g'(x+\alpha)=4x-16\Big|_{x=\beta-\alpha} = 4\beta-4\alpha-16=16$

$\therefore \beta-\alpha=8$

$f'(x+\alpha)=x^3+2px-16\Big|_{x=\beta-\alpha} = (\beta-\alpha)^3+2p(\beta-\alpha)-16=16$

$2p=-20$

$\therefore p=-10$

$g(x+\alpha)-f(x+\alpha)=-x^3+12x^2=-x^2(x-12)$

$x=\beta-\alpha+1=9$ 대입

$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1) = -81\times(-3) = 243$

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

sol4) 이계도함수 (미적분)

$g''(x)=4$

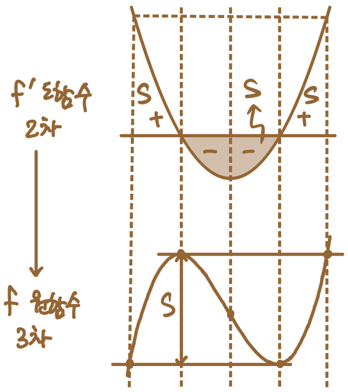
$g'(\beta)-g'(\alpha)=32$

$\int_{\alpha}^{\beta} g''(x)\,dx=4(\beta-\alpha)=32$

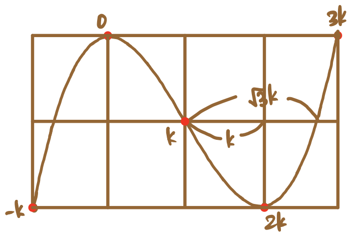
$\therefore \beta-\alpha=8$

⋮

* 참고 : 삼차함수 비율관계



x좌표 등차



합동인 직사각형 8개

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

* 이계도함수의 해석

이계도함수 : 함수 $f(x)$를 두 번 미분한 것

함수 $f(x)$가 정의역에서 :

- 도함수 $f'(x)$를 가진다 : $f(x)$ 미가, 연속
- 이계도함수 $f''(x)$를 가진다 : $f(x)$ 미가, 연속
  $f'(x)$ 미가, 연속