10. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}-2a_n & (n\text{이 홀수}) \\ 6a_{n+1}-a_n & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에서 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_{2n+1}=a_{2n}-2a_{2n-1}$ ⋯ ㉠
>
> $a_{2n+2}=6a_{2n+1}-a_{2n}$ ⋯ ㉡
>
> $a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}$ ⋯ ㉢
>
> 이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 정리하면
>
> $a_{2n+3}-a_{2n+1}=2(a_{2n+1}-a_{2n-1})$
>
> 이고, ㉠에서 $n=1$일 때 $a_3=3$이므로
>
> $a_{2n+1}-a_{2n-1}=$ (가) $(n\geq 1)$
>
> 이다. 따라서
>
> $a_{2n-1}=$ (나) $(n\geq 1)$
>
> 이고, ㉠으로부터
>
> $a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-1}$
>
> 이므로
>
> $a_{2n}=$ (다) $(n\geq 1)$
>
> 이다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_{2n-1}=$ (나), $a_{2n}=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 식을 $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(5)g(10)}{h(10)-1}$의 값은? [4점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

26. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(2^k)=m\log 2-n$이다. 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

27. 모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3 = 7a_3$일 때, $\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{a_n}$의 값을 구하시오. [4점]

28. 삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x) = |x-1|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+2)$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x) = x + f(x)$$

라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $n \leq a \leq n+2$

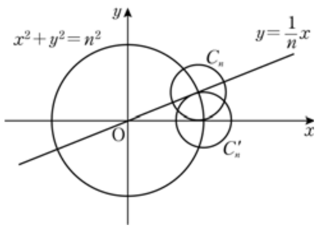
(나) $0 < b \leq g(a)$

3월 교육청 : A형 응시자도 풀어야 하는 B형 문항 정답 및 해설

1) [정답] ④
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 원과 직선 사이의 관계를 이용하여 극한값 구하는 문제를 해결한다.

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C_n이라 하자.

원 C_n의 넓이 S_n은 그림과 같이 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축의 교점 $(n, 0)$을 중심으로 하고 직선 $y=\frac{1}{n}x$에 접하는 원 $C_n{}'$의 넓이 $S_n{}'$과 같다.



원 $C_n{}'$의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 r_n은 점 $(n, 0)$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$ 사이의 거리와 같으므로

$r_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

따라서 $S_n=S_n{}'=(r_n)^2\pi=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\pi=\pi$

[다른 풀이 1]
원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 C_n의 중심의 y좌표는 원 C_n의 반지름의 길이 r_n과 같고, 직선의 기울기가 $\frac{1}{n}$이므로 원 C_n의 중심의 x좌표는 nr_n이다.

원점에서 원 C_n의 중심까지의 거리가 n이므로

$(nr_n)^2+(r_n)^2=n^2$

$(n^2+1)(r_n)^2=n^2$

$(r_n)^2=\frac{n^2}{n^2+1}$

따라서 $S_n=\pi(r_n)^2=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$

[다른 풀이 2]
원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 교점의 y좌표가 원 C_n의 반지름의 길이이므로

$x^2+y^2=n^2$에 $x=ny$를 대입하면

$(ny)^2+y^2=n^2$

$(n^2+1)y^2=n^2$

$y^2=\frac{n^2}{n^2+1}$이므로 원의 넓이 S_n은

$S_n=\pi y^2=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$

2) [정답] ②
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항 구하는 과정을 증명한다.
주어진 식에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=a_{2n}-2a_{2n-1}$ ⋯ ㉠

$a_{2n+2}=6a_{2n+1}-a_{2n}$ ⋯ ㉡

$a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}$ ⋯ ㉢

이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$$\begin{aligned}a_{2n+3}&=a_{2n+2}-2a_{2n+1}\\&=(6a_{2n+1}-a_{2n})-2a_{2n+1}\\&=4a_{2n+1}-(a_{2n+1}+2a_{2n-1})\\&=3a_{2n+1}-2a_{2n-1}\end{aligned}$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned}a_{2n+3}-a_{2n+1}&=2(a_{2n+1}-a_{2n-1})\\&=2^n(a_3-a_1)\end{aligned}$$

이고, ㉠에서 $a_3=a_2-2a_1=3$이므로 $a_3-a_1=2$
따라서

$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2^n$ $(n\geq 1)$

$$\begin{aligned}a_{2n-1}&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\&=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}\\&=2^n-1\ (n\geq 2)\end{aligned}$$

이고, $a_1=1$이므로

$a_{2n-1}=2^n-1(n\geq 1)$

㉠으로부터

$a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-1}$

이므로

$$\begin{aligned}a_{2n}&=(2^{n+1}-1)+2(2^n-1)\\&=2^{n+2}-3\ (n\geq 1)\end{aligned}$$

이다.
즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=2^n-1$, $a_{2n}=2^{n+2}-3$

이다.
(가)에 알맞은 식은 2^n이므로 $f(n)=2^n$
(나)에 알맞은 식은 2^n-1이므로 $g(n)=2^n-1$
(다)에 알맞은 식은 $2^{n+2}-3$이므로 $h(n)=2^{n+2}-3$
따라서

$$\frac{f(5)g(10)}{h(10)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{(2^{12}-3)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{2^2(2^{10}-1)}=8$$

3) [정답] 67
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 가수의 합을 구한다.

i) $1\leq k\leq 3$일 때, $1\leq 2^k<10$이므로
   $\log 2^k$의 지표는 0이고,
   $f(2^k)=\log 2^k=k\log 2$

ii) $4\leq k\leq 6$일 때, $10\leq 2^k<10^2$이므로
   $\log 2^k$의 지표는 1이고,
   $f(2^k)=\log 2^k-1=k\log 2-1$

iii) $7\leq k\leq 9$일 때, $10^2\leq 2^k<10^3$이므로
   $\log 2^k$의 지표는 2이고,
   $f(2^k)=\log 2^k-2=k\log 2-2$

iv) $k=10$일 때, $10^3\leq 2^k<10^4$이므로
   $\log 2^k$의 지표는 3이고,
   $f(2^k)=\log 2^k-3=k\log 2-3$

따라서 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}f(2^k)&=\sum_{k=1}^{10}k\log 2-(1\times 3+2\times 3+3\times 1)\\&=55\log 2-12\end{aligned}$$

이므로 $m=55$, $n=12$ 따라서 $m+n=67$

4) [정답] 502

[풀이] [2014년 3월 교육청]

[출제의도] 등비수열과 등비수열의 합의 관계를 이해하고 수열의 합을 구한다.

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$S_3=7a_3$에서 $a+ar+ar^2=7ar^2$

$a>0$이므로

$1+r+r^2=7r^2$

$6r^2-r-1=0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

따라서

$$a_n=a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{8}\frac{2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{8}(2^n-1)$$

$$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-8=502$$

[다른 풀이]

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

ⅰ) $r=1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $a+a+a=7a$

$4a=0$에서 $a=0$

$a>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $r\neq 1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $\frac{a(1-r^3)}{1-r}=7ar^2$

$$\frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=7ar^2$$

$r\neq 1$이므로 $a(1+r+r^2)=7ar^2$

$a>0$이므로

$1+r+r^2=7r^2$

$6r^2-r-1=0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

따라서 $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}=502$

5) [정답] 13

[풀이] [2014년 3월 교육청]

[출제의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-0}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-0}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]=\lim_{x\to k-0}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]=-3k^2+2k+9$$

또, $\lim_{x\to k+0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$=3k^2-2k-9$

$$\lim_{x\to k-0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

이므로

$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$

$3k^2-2k-9=0$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

6) [정답] 427

[풀이] [2014년 3월 교육청]

[출제의도] 주어진 함수의 그래프와 조건을 이해하여 수열의 합을 추측한다.

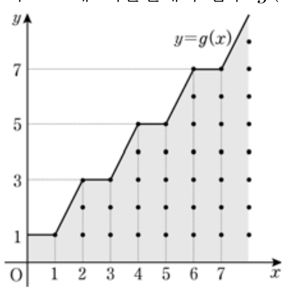
닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $g(x)=x+f(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<1)\\ 2x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned}g(x+2)&=(x+2)+f(x+2)\\&=x+2+f(x)\\&=g(x)+2\end{aligned}$$

이므로 제1사분면에서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 그림에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점으로 나타내어진다. 또, $a=n$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $g(n)$과 같다. 따라서

$a_1=g(1)+g(2)+g(3)=1+3+3=7$,

$a_2=g(2)+g(3)+g(4)=3+3+5=11$,

$a_3=g(3)+g(4)+g(5)=3+5+5=13$,

$a_4=g(4)+g(5)+g(6)=5+5+7=17$,

$a_5=g(5)+g(6)+g(7)=5+7+7=19$,

$a_6 = g(6)+g(7)+g(8) = 7+7+9 = 23$,

$a_7 = g(7)+g(8)+g(9) = 7+9+9 = 25$,

$a_8 = g(8)+g(9)+g(10) = 9+9+11 = 29$

$\vdots$

여기서

$a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = a_7 - a_5 = \cdots = 6$,

$a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = a_8 - a_6 = \cdots = 6$

이므로

자연수 n에 대하여 a_{2n-1}과 a_{2n}을 추론하면

$a_{2n-1} = a_1 + 6(n-1) = 7 + 6(n-1) = 6n+1$

$a_{2n} = a_2 + 6(n-1) = 11 + 6(n-1) = 6n+5$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15} a_n &= \sum_{n=1}^{8} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{7} a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{8}(6n+1) + \sum_{n=1}^{7}(6n+5) \\ &= \left(6\times\frac{8\times 9}{2} + 1\times 8\right) + \left(6\times\frac{7\times 8}{2} + 5\times 7\right) \\ &= 427\end{aligned}$$