37

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

sol.1)

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 + C = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3$$

$x=-1$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(-1)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(-1)\}^3$

$\therefore C = -\frac{1}{2}\{f(-1)\}^3$

$x=-\frac{1}{8}$ 대입 : $\frac{2}{3} + C = \frac{1}{6}\{f(\frac{3}{4})\}^3$ $(\because f(-\frac{1}{8})=1)$

$x=\frac{3}{4}$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(\frac{3}{4})\}^3 + C = \frac{1}{6}\{f(\frac{5}{2})\}^3$

$x=\frac{5}{2}$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(\frac{5}{2})\}^3 + C = \frac{4}{3}$ $(\because f(6)=2)$

$\therefore C = -\frac{4}{9} = -\frac{1}{2}\{f(-1)\}^3$

$\therefore f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

37

2019학년도 수능(가형) 21번

Sol₂) $f(x)$ 구하기

$4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + \frac{8}{3}$

$g(x) = \{f(x)\}^3$ 라 하자.

$4g(x) = g(2x+1) + \frac{8}{3}$

$4g(x-1) = g(2x-1) + \frac{8}{3}$ ($x-1$ 대입)

$h(x) = g(x-1)$ 라 하자.

$4h(x) = h(2x) + \frac{8}{3}$

$4h'(x) = 2h'(2x)$ ($\because f$ 미가, h도 미가)

$\therefore 2h'(x) = h'(2x)$

$h'(0) = 0$ ($x=0$ 대입)

$i(x) = \frac{h'(x)}{x} = \frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}$ ($x \neq 0$)

$2x\,i(x) = 2x\,i(2x)$

$\therefore i(x) = i(2x)$

$i(x)$는 연속함수라 가정.

$\longrightarrow i(0) = h''(0)$

$i(x) = i\left(\frac{x}{2}\right) = i\left(\frac{x}{4}\right) = \cdots = i(2^{-n}x)$ (n은 자연수)

$\lim_{n\to\infty} i(2^{-n}x) = i(0) = h''(0)$

$\therefore i(x) = h''(0)$

37

$h'(x) = xh''(x)$

$h''(0) = a$ 라 하면 $(a>0)$

$h(x) = ax^2 + \frac{8}{9}$

$g(x) = a(x+1)^2 + \frac{8}{9}$

$\therefore f(x) = \sqrt[3]{a(x+1)^2 + \frac{8}{9}}$

이고, 나) 조건을 이용하여

$f(x) = \sqrt[3]{\left\{\frac{8}{21}(x+1)\right\}^2 + \frac{8}{9}}$

$\therefore f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$