32

이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
>
> (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다.
>
> (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 k $(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다.

k의 값을 구하시오. [4점] 9

sol$_1$)

$$a_n=\int_0^n h(x)dx=\int_0^5 g(x)dx+\int_5^k 2x-g(x)dx+\int_k^n g(x)dx$$

1) $$\int_0^5 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\sum_{k=1}^{4}\int_k^{k+1}\frac{1}{2^k}\{f(x-k)-(x-k)\}dx+\int_1^5 x\,dx$$
$$=\frac{7}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^4}\right)+12$$

2) $$\int_5^k 2x-g(x)dx=\int_5^k x\,dx-\sum_{j=5}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{2^j}\{f(x-j)-(x-j)\}dx$$
$$=\frac{k^2-25}{2}-\frac{7}{12}\left(\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

3) $$\int_k^n g(x)dx=\sum_{j=k}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{2^j}\{f(x-j)-(x-j)\}dx+\int_k^n x\,dx$$
$$=\frac{7}{12}\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{n^2-k^2}{2}$$

$$a_n = 1) + 2) + 3)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{31}{16} - \frac{2^{k-6}+\cdots+1}{2^{k-1}} + \frac{2^{n-k-1}+\cdots+1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n^2}{2}$$

$$2a_n - n^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{15}{8} + \frac{1}{2^{k-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n + n^2) = \frac{5}{16} + \frac{1}{3\cdot 2^{k-1}} = \frac{241}{768}$$

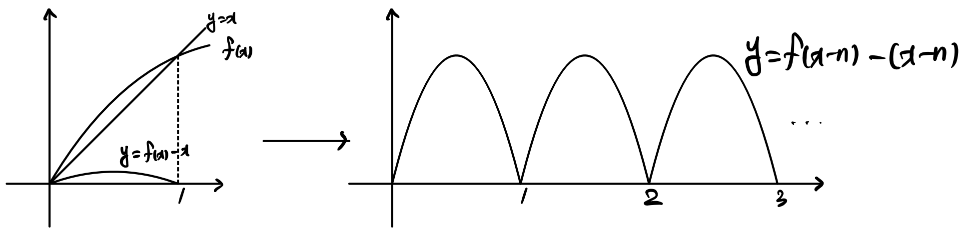
$$\frac{241}{768} = \frac{5}{16} + \frac{1}{3\times 2^8}$$

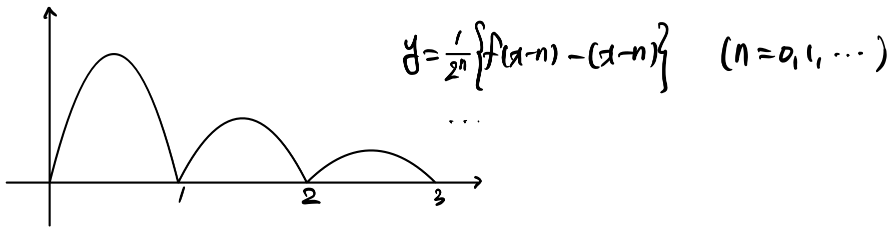
$$\therefore k=9$$

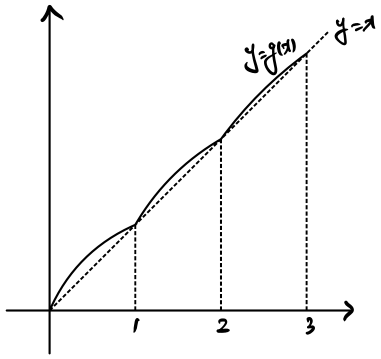
sol2)

나 조건에 $n=0$ 대입.

$0\le x<1$ 일 때, $g(x)=f(x)$: 가, 나 조건 합치기







32

규칙성 : 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 넓이 $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 에 대하여

$\beta-\alpha$는 일정, 최고차항의 계수만 절반씩 줄어듦.

$\therefore$ 구간 $[n, n+1]$ 에서

$$y = g(x) - x = \frac{-(x-n)(x-n-1)}{2^n}$$

과 x축으로 둘러싸인 넓이 $= \frac{1}{6\cdot 2^n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^n g(x)dx = \text{발산}$$

+) $[5, k)$ 에서 $h(x)$ 함수는 $g(x)$의 개형을 $y=x$에 대하여 대칭.

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n - n^2) = 2\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n^2}{2}\right)$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n h(x)dx - \frac{n^2}{2}\right\}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\int_0^n h(x)-x\,dx \qquad \left(\because \int x\,dx = \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{241}{768}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{241}{768} = \int_0^5 g(x)-x\,dx - \int_5^k x-g(x)\,dx + \lim_{n\to\infty}\int_k^n g(x)-x\,dx$$

$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192} - \frac{1}{6\cdot 2^6} - \frac{1}{6\cdot 2^7} - \cdots - \frac{1}{6\cdot 2^k} + \frac{1}{6\cdot 2^{k+1}} +$$

$$= \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\cdots\right) - 2\left(\frac{1}{6\cdot 2^6}+\cdots+\frac{1}{6\cdot 2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{96}\left(1-\frac{1}{2^{k-5}}\right)$$

$$\therefore \frac{241}{16} = 16 - \left(1-\frac{1}{2^{k-5}}\right)$$

$$\therefore k = 9$$

32

2018학년도 수능(나형) 30번

sol3)

sol2)에서 g(x)와 y=x로 둘러싸인 넓이들이

초항 $= \frac{1}{12}$, 공비 $= \frac{1}{2}$ 인 등비수열임을 알아냈다.

$$2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots+\frac{1}{12\cdot 2^4}-\frac{1}{12\cdot 2^5}-\cdots-\frac{1}{12\cdot 2^{k-1}}+\frac{1}{12\cdot 2^k}+\cdots\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\cdot 2^n}-4\sum_{n=5}^{k-1}\frac{1}{6\cdot 2^n} = \frac{241}{768}$$

이 되는 k값 찾기