30

양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e)\\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

— $x \ge e$: $g(x) \ge f(x)$

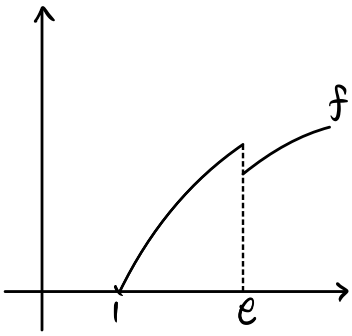
— $1 < x < e$: $f(x) \ge g(x)$

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

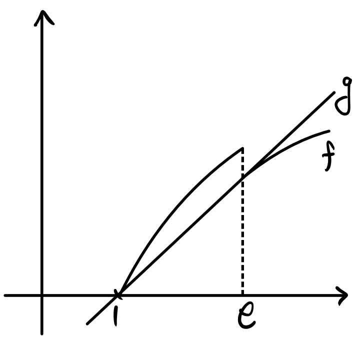
$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

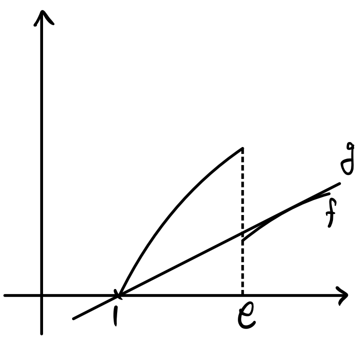
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$



i) $g(x)$가 $(e, -t+1)$을 지날 때



ii) $x \ge e$ 에서 g와 f가 접할 때



30

2018학년도 수능(가형) 21번

: $(e, -t+1)$을 지나면서 + 동시에 f와 접하는걸 찾아보자 (경계 찾기)

$(e, -t+1)$에서 f의 접기. : $\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 가 $(e, -t+1)$에서 접할 때 : $h(t)=\frac{1}{e}$

$-t+1=\frac{1}{e}(e-1)$

$\therefore t=\frac{1}{e}$

i) $0<t\le\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 이 $(1, 0)$과 $(e, -t+1)$ 지남.

$\therefore h(t)=\frac{1-t}{e-1} \longrightarrow h'(t)=-\frac{1}{e-1}$

ii) $t>\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 이 $y=-t+\ln x$ 와 접함.

$y'=\frac{1}{x}$ $\quad$ ↳ $x=k$ 에서 접

$\therefore h(t)=\frac{1}{k}$

sol1) 라이프니츠 표기법

$-t+\ln k=\frac{1}{k}(k-1)$ $\quad$ ($\because y=\frac{1}{k}(x-1)$ 이 $(k, -t+\ln k)$를 지남)

$\therefore t=\ln k+\frac{1}{k}-1$

$1=\frac{1}{k}\cdot\frac{dk}{dt}-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{dk}{dt}$

$\therefore \frac{dk}{dt}=\frac{k^2}{k-1}$

30

$$h'(t) = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{dk}{dt}$$
$$= -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k^2}{k-1}$$
$$= -\frac{1}{k-1}$$

$t=a$일 때 $k=e+2$ $\left(\because h(a)=\frac{1}{e+2},\ h(t)=\frac{1}{k}\right)$

$$\therefore h'(a) = -\frac{1}{e+1}$$

$h'\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{1}{e-1}$ $\left(\because 0<x\le\frac{1}{e}\text{ 일 때 } h'(t) = -\frac{1}{e-1}\right)$

$$\therefore h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a) = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

sol2) 뉴턴 포기법

$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\ln k - t$$

$0=\frac{1}{k}-1+\ln k - t = h(t)-\ln(h(t))-t-1=0$ $\left(\because \ln k = -\ln\frac{1}{k}\right)$

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}>h(a)$$

$$\therefore h(a)-\ln(h(a))-a-1=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{e+2}+\ln(e+2)-1$$

$$h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}-1=0$$

$$h'(a)-\frac{h'(a)}{h(a)}-1=0$$

$$h'(a)\left\{1-(e+2)\right\}-1=0$$

$$\therefore h'(a)=-\frac{1}{e+1}$$

$$\therefore h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$$