21. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$는 $\lim_{x\to\infty} f(x) + f(x_4) = 0$을 만족시킨다. 서로 다른 네 실수 x_1, x_2, x_3, x_4에 대하여 $x_1x_3 < 0, x_2x_4 < 0$이고, $f''(x) = 0$을 만족시키는 오직 하나의 근 α (단, α는 실수)에 대하여 $f(x)$는, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\alpha) + f(-x-\alpha) = 0$을 만족시키며, $0 < \alpha < x_1 < x_2$이다. $f(x_1+\alpha) + f(-x_3-\alpha) = 0$, $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) > 0$, 모든 실수 $a, b(a < b)$에 대하여 $0 < f'(a) < f'(b)$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오. [4점] (단, $x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha$는 모두 상수이다.)

ㄱ. $f(x_1) + f(x_4) > 0$

ㄴ. $3x_1 = x_2 + 2\alpha$이면, $\int_{x_1}^{2x_1-\alpha} 2f(x)dx < (f(x_2) - f(\alpha)) \times (x_2 - x_1)$이다.

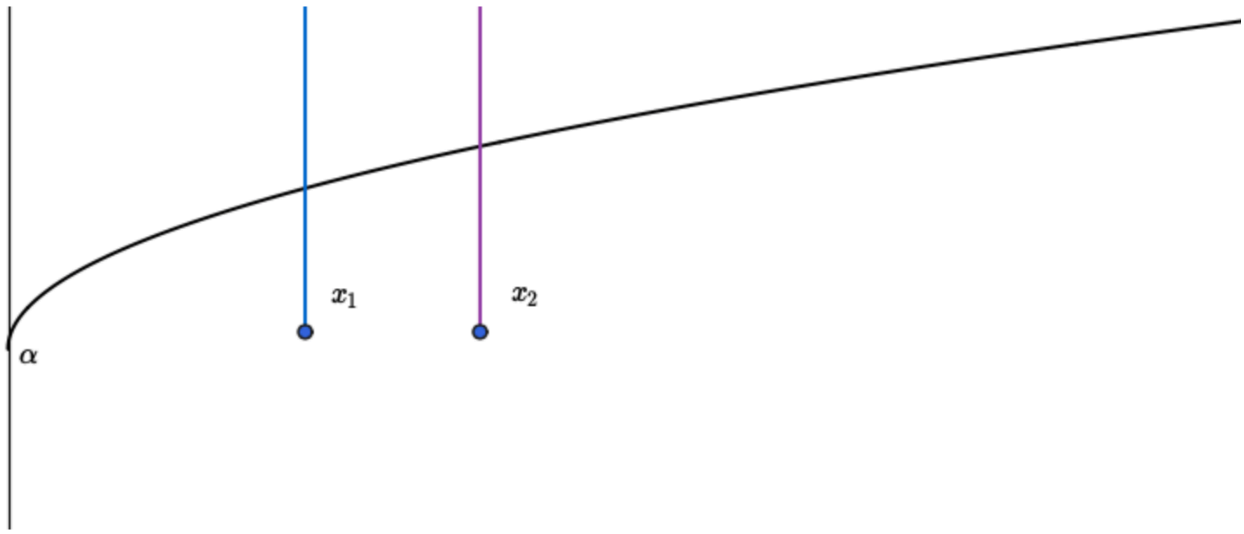
ㄷ. $\frac{\alpha + x_2}{2x_1} < 1$이면, $\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx > \int_{\alpha}^{x_2} (x_2 - x_1)f'(t)dt$이다.
(단, $\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt > 0$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답] ④

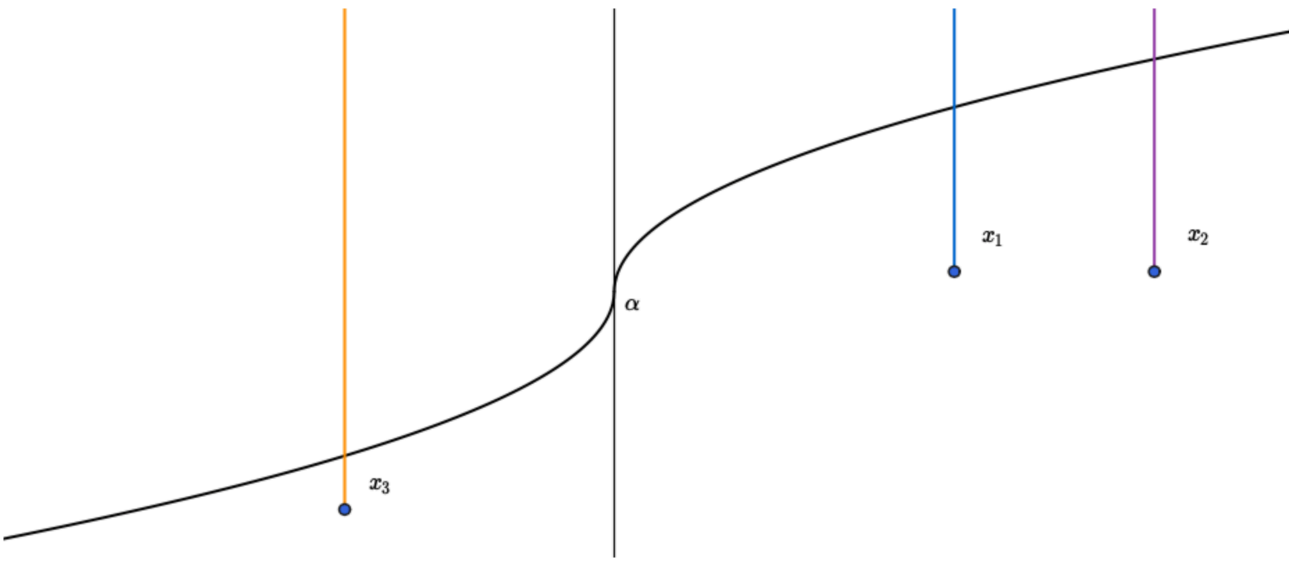
$\lim_{x\to\infty} f(x) + f(x_4) = 0$에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -f(x_4)$이고, $f(x+\alpha) + f(-x-\alpha) = 0$이므로 $f(x)$는 $x = \alpha$에 대하여 대칭이다. 또 $x_1x_3 < 0, x_2x_4 < 0, 0 < \alpha < x_1 < x_2$이므로, x_1, x_2는 양수, x_3, x_4는 음수임을 알 수 있다. $f(x_1+\alpha) + f(-x_3-\alpha) = 0$이므로, x_1, x_3는 $x = \alpha$에 대하여 대칭이다. 또, 모든 실수 $a, b(a < b)$에 대하여 $0 < f'(a) < f'(b)$이므로 이 함수의 그래프는 ∞로 갈수록, 접선의 기울기가 감소하는 형태의 증가함수임을 알 수 있다.

따라서, $f(x) > \alpha$에서의 그래프는 다음 페이지의 [그림1]과 같다.



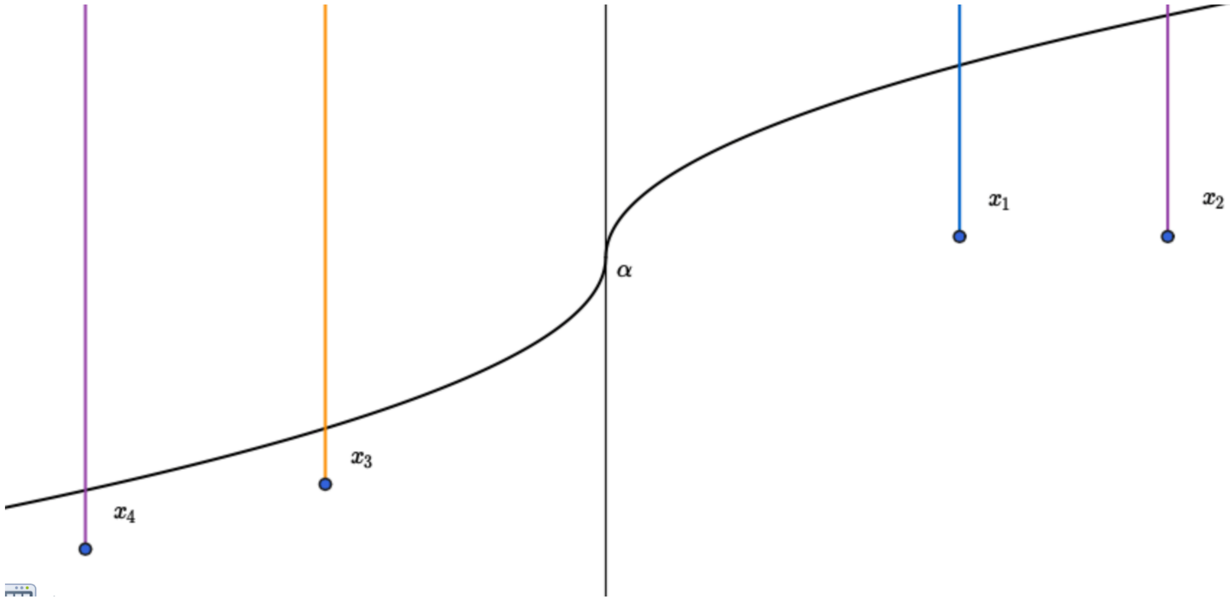
[그림1]

이때, $x + a = t$라 하면 $f(t) = -f(-t)$꼴의 기함수이므로, α에 대하여 기함수 꼴로 대칭시키면,



[그림2]
위와 같은 함수의 그래프가 얻어진다.

만약 $x_3 < x_4$라면, $f(x_2) + f(x_4) > 0$이므로 조건에 맞지 않는다.
따라서 $x_3 > x_4$이다. 그러므로 함수의 최종 그래프는 [그림3]과 같다.



[그림3] 최종 f(x)의 그래프

ㄱ. $f(x_1)+f(x_4)>0$은 거짓이다. $f(x_1)+f(x_4)<0$이다. (X)

ㄴ. $3x_1=x_2+2\alpha$이면, $\int_{x_1}^{x_1-\alpha}2f(x)dx<(f(x_2)-f(\alpha))\times(x_2-x_1)$이다. (O)

$3x_1=x_2+2\alpha$를 정리하면,

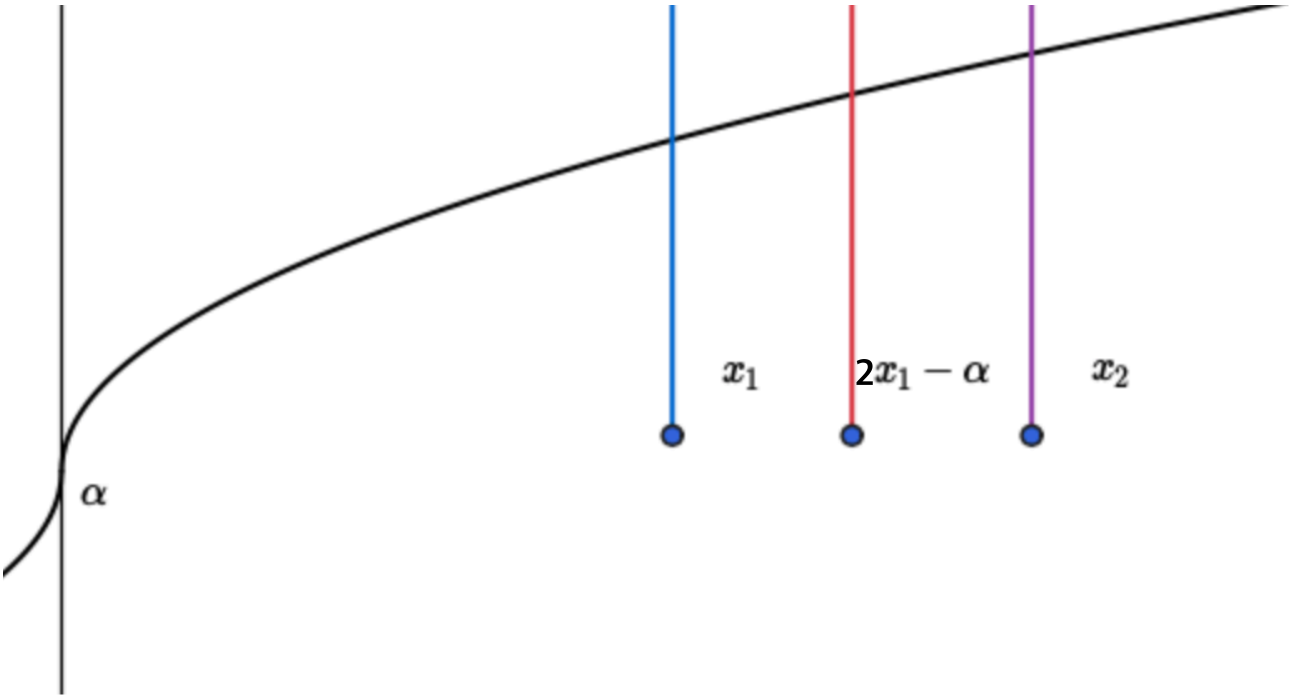
$(4x_1-x_1)-2\alpha=x_2$

$x_1+x_2=4x_1-2\alpha$

$\frac{x_1+x_2}{2}=2x_1-\alpha$

그러므로, $\frac{x_1+x_2}{2}=x_1+(x_1-\alpha)$이다.

이것이 의미하는 바는 [그림4]와 같다.



[그림4]

$\int_{x_1}^{2x_1-\alpha} 2f(x)dx < (f(x_2) - f(\alpha)) \times (x_2 - x_1)$를 정리하면

$\int_{x_1}^{x_1+(x_1-\alpha)} f(x)dx < (f(x_2) - f(\alpha)) \times \frac{(x_2 - x_1)}{2}$이다.

즉, x_1부터 $2x_1 - \alpha$까지의 그래프 하부의 면적이, x_1부터 $2x_1 - \alpha$까지의 길이를 밑변으로 하고, $f(\alpha)$부터 $f(x_2)$까지의 길이를 높이로 하는 사각형의 넓이보다 작다는 부등식이다.

따라서 윗 부등식은 참이다.

ㄷ. $\frac{\alpha + x_2}{2x_1} < 1$이면, $\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx > \int_{\alpha}^{x_2} (x_2 - x_1)f'(t)dt$이다.
(단, $\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt > 0$) (O)

$\frac{\alpha + x_2}{2x_1} < 1$을 정리하면,

$\alpha + x_2 < 2x_1$, $\alpha + x_2 < x_1 + x_1$, 즉 $x_2 - x_1 > x_1 - \alpha$라는 부등식이다.

한편, $\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx > \int_{\alpha}^{x_2} (x_2 - x_1)f'(t)dt$에서

$\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx = \int_{x_3}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{2x_1+\alpha} f(x)dx$이다.

$\int_{x_3}^{x_1} f(x)dx = 0$이므로,

$\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx = \int_{x_1}^{2x_1+\alpha} f(x)dx$이다.

이는 곧 [그림4]에서의, x_1부터 $2x_1 - \alpha$까지의 그래프 하부의 면적을 의미한다.

또, $\int_{\alpha}^{x_2} (x_2 - x_1)f'(t)dt$에서 x_1, x_2가 모두 상수이므로 $x_2 - x_1$ 역시 상수이다. 따라서 $(x_2 - x_1)\int_{\alpha}^{x_2} f'(t)dt$라고 쓸 수 있다.

이때, $\int_{\alpha}^{x_2} f'(t)dt$는 도함수의 정적분이므로, $x = \alpha$부터 $x = x_2$까지의 그래프의 높이 차를 의미한다.

따라서, $(x_2 - x_1)\int_{\alpha}^{x_2} f'(t)dt$는 밑변이 $x_2 - x_1$이고 높이가 $f(x_2) - f(\alpha)$인 직사각형의 넓이를 의미한다.

그러므로 부등식 $\int_{x_3}^{2x_1+\alpha} f(x)dx > \int_{\alpha}^{x_2} (x_2 - x_1)f'(t)dt$은 $\frac{\alpha + x_2}{2x_1} < 1$일 때 참이다. (O)