N th STEP

Part I

이차함수 · 도형의 방정식 · 집합

창수동
창의적인 수학 동아리

들어가며 _

창의적인 수학 동아리입니다.

우리 동아리는 올해 3월과 6월, 여러분들의 모의고사 대비에 도움이 되기 위하여
총 두 차례 창수동 모의고사를 진행했습니다. 하지만 이번엔 조금 다른 방식으로 여러분들의 수학
학습에 도움을 주고자 합니다.

고1은 상위 학년보다 모의고사를 대비하기 위한 학습 자료가 압도적으로 부족합니다.
수능 대비를 위한 사설 모의고사와 n제는 모두 풀어 보는 것이 불가능할 정도로 많이
출판되고 있지만, 고1은 역대 교육청 모의고사 기출문제 정도가 끝입니다.

사실 이는 당연한 것일지도 모릅니다. 일단 고1 수학은 개념이 비교적 쉽거나 깊이가
깊지 않아 출제할 수 있는 문항의 유형이 한정적입니다. 이뿐만이 아니라, 고1 수학은 수능의 출제
범위에 들어가지 않기 때문에 비교적 학습 자료를 만들 명분과 중요성이 떨어집니다.
당연히 교육계에서는 고1을 위한 수학 학습 자료를 열심히 만들지 않겠죠.

우리는 이런 정보량의 격차로 인해 고등학교 1학년을 유의미한 경험 없이 허투루 보내는 것이 적절치 않다고 생각합니다. 따라서, 저희 창의적인 수학 동아리에서는 이번 창수동 n제로 여러분들의 학습에 도움을 주고자 합니다.

창수동 n제에 수록된 문제는 대부분 자작 문제로, 계산력만 미치도록 요구하는 문제가 아닌 어느 정도의 수학적 감각이 필요한 문제들을 선별해 넣어 여러분들의 수학적 능력 향상에 최대한 도움이 되도록 설계하였습니다. 창수동 n제에 수록된 참신하고 새로운 문제들은 여러분들이 낯선 상황에서도 당황하지 않고 생각을 할 수 있게 만드는 힘을 길러줍니다.
이는 장기적으로 여러분들의 수능 대비에도 도움을 줄 것입니다.

우리는 이번 창수동 n제에 수록된 문제들이 여러분의 사고력을 길러줄 것이라고 자신합니다.
한번 풀어 보십시오. 어떤 문제집에서도 느끼지 못한 새로운 느낌을 줄 것입니다.

창수동
창의적인 수학 동아리

2022.07

문의 : creativemt2022@gmail.com

창수동 Nth STEP [Part I] 구성 _

난이도 (비율) _

■□□ 기본 개념 적용 문제 (25%)
■■□ 적절한 접근 방법이 필요한 문제 (38%)
■■■ 심화 문제 해결 및 추론 문제 (24%)
+Plus 고난도 신유형 및 개념 확장 문제 (13%)

범위 _

고등학교 〈수학〉 교과 중
I. 다항식
II. 방정식과 부등식 [주 출제 영역]
III. 도형의 방정식 [주 출제 영역]
IV. 집합과 명제 (일부분, 집합) [주 출제 영역]

총 63문제 수록

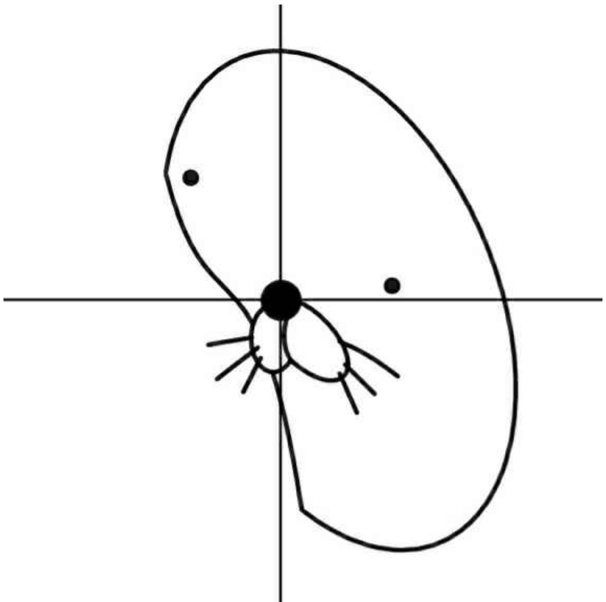
목차 _

해설지는 별도로 제공하지 않습니다.
아래 QR코드 또는 링크를 통해 주요 문항 해설 영상을 제공받으실 수 있습니다.

https://www.youtube.com/channel/UC6i00zy1PH_nt--Q7U9OWJw/featured

0 □□□

그림과 같이 좌표평면에 보노보노가 있다.



보노보노의 오른쪽 눈의 좌표가 $(10, 1)$이고, 왼쪽 눈의 좌표가 $(-8, 10)$일 때, 두 눈을 지나는 직선의 기울기는? [0점]

① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{12}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

[문제를 해결하는데 어려움이 있을 때는 페이지 아래 설명을 참고하시오.]

문제 접근

기본적인 문제이다. 빠르게 풀고 넘겨야 하는 문제... 정답은 2번이다.

1 ■□□

이차부등식 $3x^2-16x+5<0$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2 ■□□

두 직선 $4x+ay-5=0$, $bx+2y+7=0$ 이 서로 수직일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ -2 ⑤ -4

문제 접근

기본적인 개념을 묻는 문제이다. 교과서적인 정의를 잘 생각해보자.

3 ■□□

이차함수 $f(x)=(x-a)^2+b$ 가 $f(2+\sqrt{3})=8$ 을 만족시킬 때, 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

4 ■□□

이차함수 $f(x)=x^2+2x-4$ 과 일차함수 $g(x)=ax-4$ 가 서로 접할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

문제 접근

문제의 조건은 무조건 사용된다.

5 ■□□

두 집합

$A=\{x \mid x$는 3의 배수$\}$

$B=\{x \mid x$는 $1 \le x \le k$인 정수$\}$

에 대하여 $n(A \cap B)=6$ 을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [3점]

① 53 ② 55 ③ 57 ④ 59 ⑤ 61

6 ■□□

두 집합 A, B에 대하여 $n(B)=5$일 때, $A \subset B$, $A \neq B$를 만족시키는 집합 A의 개수는? [3점]

① 8 ② 15 ③ 16 ④ 31 ⑤ 32

문제 접근

집합의 포함관계에 대한 이해...

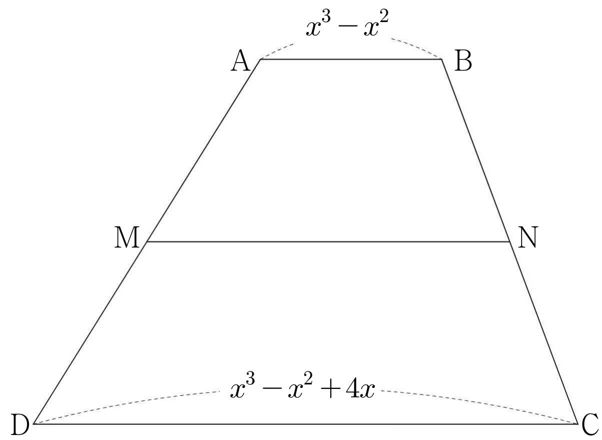
7 ■□□

이차함수 $f(x)=2(x-1)^2+p+3$이 직선 $y=1$과 두 점에서 만날 때, 정수 p의 최댓값은? [3점]

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

8 ■□□

그림과 같이 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$, $\overline{AB}=x^3-x^2$, $\overline{CD}=x^3-x^2+4x$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 선분 AD의 중점 M, 선분 BC의 중점 N에 대하여 $\overline{MN}=8$ 일 때, x의 값은? (단, $x>1$ 이다.) [3점]



① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ $\frac{7}{2}$

문제 접근

기본적인 개념을 묻는 문제이다. 중학교에서 배운 도형의 성질도 필요...

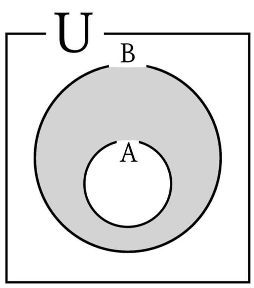
9 ■□□

집합 $A=\{a, b, c, \{d, e\}\}$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [3점]

① $a\in A$　② $\{c, d\}\in A$　③ $\{d, e\}\in A$　④ $\{a, b, c\}\subset A$　⑤ $\varnothing \subset A$

10 ■□□

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 벤다이어그램에서 색칠된 영역을 나타내는 것은? [3점]



① U^C-B　② $B-A^C$　③ $(B\cap A)^C$　④ $A^C\cap B^C$　⑤ $(B^C\cup A)^C$

문제 접근

기본적인 개념을 묻는 문제이다.

11 ■□□

한 학급에서 파란색을 좋아하는 학생이 24명, 빨간색을 좋아하는 학생이 19명이고 학급의 전체 학생의 수가 35명일 때, 파란색과 빨간색을 모두 좋아하는 학생의 수는? (단, 모든 학생은 파란색과 빨간색 중 적어도 하나 이상을 좋아한다.) [3점]

① 7명　② 8명　③ 9명　④ 10명　⑤ 11명

12 ■□□

좌표평면 위에 원 $C:(x-a)^2+(y-1)^2=1$ 와 점 $\mathrm{P}(9,18)$ 가 있다. 원 C위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 점 Q의 y좌표와 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

문제 접근

풀이는 최대한 간결하게...

13 ■□□

이차함수 $y=x^2+4x+4$ 가 x축과 만나는 점과 y축과 만나는 점을 모두 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

14 ■□□

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 $a+5$인 직사각형의 가로의 길이를 2만큼 늘리고 세로의 길이를 4만큼 줄였더니 직사각형의 넓이가 원래 넓이에서 10만큼 줄어들었다. 원래 넓이는? (단, a는 실수이다.) [3점]

① 58　② 60　③ 62　④ 64　⑤ 66

문제 접근

미지수를 적절히 설정해보자.

15 ■□□

두 집합

$A=\{x \mid x$는 p 이하의 자연수$\}$

$B=\{x \mid x$는 p 보다 작거나 같은 소수$\}$

에 대하여 $n(A\cap B)=6$을 만족시키는 자연수 p의 최댓값은? [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

16 ■□□

다음은 두 양수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=10$, $xy=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하는 과정이다.

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=10(x^3+y^3)-9(x+y)$ 이다. 이때, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로, $x+y=$ (가) 이고, $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 이므로, $x^3+y^3=$ (나) 이다. 따라서 $x^5+y^5=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [3점]

① 270 ② 272 ③ 274 ④ 276 ⑤ 278

문제 접근

난이도 ■□□ 문제를 풀면서 개념을 완벽히 체화시키도록 하자.

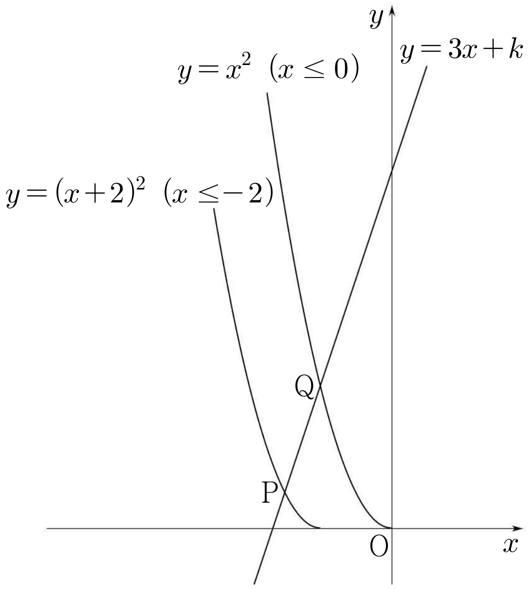
17 ■■□

직선 $y=3x+k$ 가 두 함수

$y=(x+2)^2\ (x\le -2),\ y=x^2\ (x\le 0)$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11



18 ■■□

좌표평면 위의 세 점 A$(2,\ 0)$, B$(8,\ 0)$, P가 다음 조건을 만족시킨다.

두 점 A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내접원과 외접원의 중심의 좌표는 모두 P이다.

$\overline{\mathrm{OP}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

문제 접근

17번) 선분 PQ의 길이와 기울기가 주어져 있다.

18번) 두 원의 중심의 좌표가 같다는 것에 초점을 두자.

19 ■■□

x절편이 -4인 일차함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

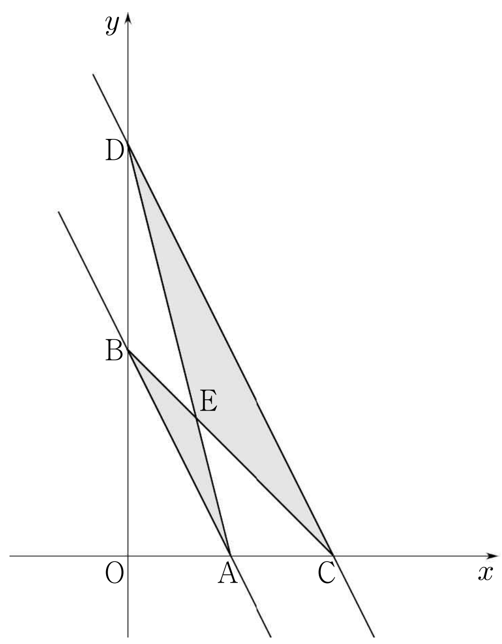
함수 $y=f(x-a)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 $\frac{1}{4}$이다.

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

20 ■■□

좌표평면에 직선 $l : 2x+y-6=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 l과 평행한 직선 m이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D, 선분 BC와 선분 AD의 교점을 E라 하자. 삼각형 ABE와 삼각형 CDE의 넓이의 비가 $1 : 4$일 때, 삼각형 ABE와 삼각형 CDE의 넓이의 합은? (단, 점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15



문제 접근

19번) a가 평행이동과 관련되어 있다는 것을 알고, 삼각형의 닮음을 이용해야 한다.

20번) 넓이비를 적절히 변형하자.

21 ■■□

이차함수 $y=(x-a)(x-5)$ $(0<a<5)$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

점 B에서 선분 CD에 내린 수선이 선분 CD를 수직이등분 할 때, $60a$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

22 ■■□

이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)$, $f(4)$, $f(14)$의 값은 모두 1이 아닌 자연수이다.
(나) $f(1)\times f(4)\times f(14)=98$

$f(20)$의 값을 구하시오. [4점]

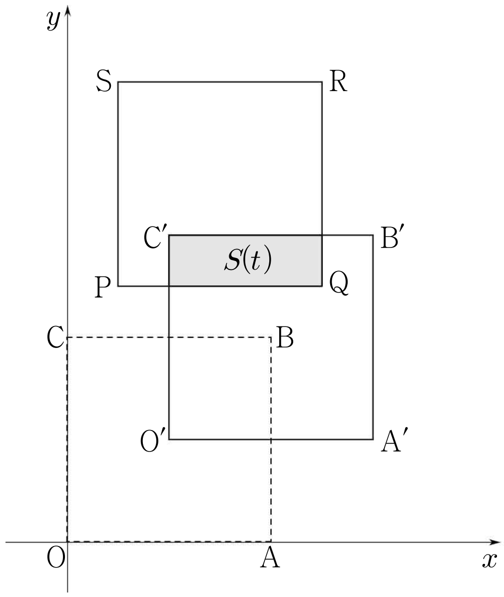
문제 접근

문제의 조건에 주목해보자.

23 ■■□

좌표평면 위에 네 점 O$(0, 0)$, A$(4, 0)$, B$(4, 4)$, C$(0, 4)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 네 점 P$(1, 5)$, Q$(5, 5)$, R$(5, 9)$, S$(1, 9)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 PQRS가 있다. 사각형 OABC를 x축, y축의 방향으로 각각 t만큼 평행이동 시킨 사각형 O'A'B'C'와 사각형 PQRS 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. $S(t)$는 $t=a$ 일 때 최댓값 M을 갖는다. $a+M$ 의 값은? (단, $1<t<5$ 이다.) [4점]

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9



24 ■■□

두 함수 $f(x)=-x^2+6x+10$, $g(x)=2x+5\ (x \geq k)$ 가 있다. 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 을 항상 만족시키는 실수 k의 최솟값을 구하시오. (단, $x_2 \geq k$ 이다.) [4점]

문제 접근

23번) $S(t)$를 t에 관한 식으로 나타내보자.

24번) x_1과 x_2의 값이 서로 다를 수 있다는 것에 주의하자.

25 ■■□

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=16$ 위의 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P의 y좌표는 양수이고, 직선 OP의 기울기는 $\frac{5}{12}$이다.
(나) 점 Q, R의 y좌표는 음수이고, 사각형 OPQR은 평행사변형이다.

직선 QR의 x절편은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{22}{5}\sqrt{3}$ ② $\frac{23}{5}\sqrt{3}$ ③ $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{26\sqrt{3}}{5}$

26 ■■□

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert f(0)\rvert+\lvert f(4)\rvert=0$
(나) $\{f(1)\}^2+16=\{f(-1)\}^2$

이차함수 $f(x)$가 최댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

문제 접근

25번) 그림을 문제 상황에 맞게 잘 그리는 것도 중요하다.

26번) 절댓값의 정의...

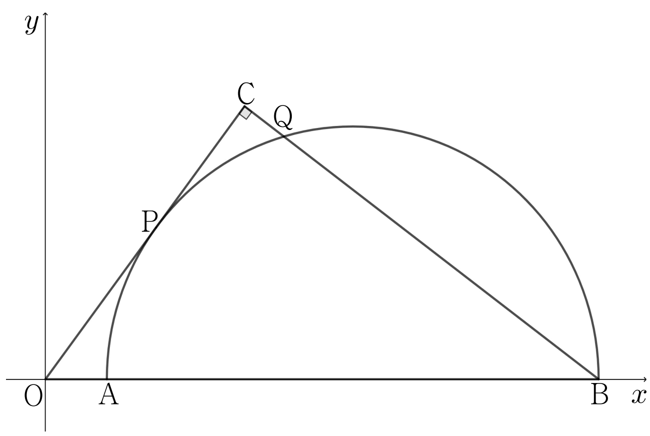
27 ■■□

좌표평면에 두 점 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$과 제 1사분면 위의 점 C가 $\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{17}$을 만족시킨다. 직선 $l: 2x+y-20=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 BC와 선분 AP의 교점을 E라 하자. 삼각형 ACE의 넓이와 삼각형 PBE의 넓이가 같을 때, 점 P의 좌표는 (a, b)이다. $a+b$의 값은? (단, $4<a<10$ 이다.) [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

28 ■■□

그림과 같이 두 점 $A(1, 0)$, $B(9, 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 반원이 좌표평면 위에 있다. 반원 위의 점 P에서의 접선이 원점을 지날 때, 직선 OP에 수직이고 점 B를 지나는 직선이 직선 OP와 만나는 점을 C, 직선 BC가 반원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q라 하자.
직선 AQ의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, $f(10)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

문제 접근

27번) 문제에서 주어진 조건을 알아보기 쉽게 바꾸어보자.
28번) 중학교 수학에서 배웠던 원의 성질을 사용하자.

29 ■■□

도형 $(|x|-a)^2+y^2=4a^2$ 내부의 넓이를 $f(a)$라 하자.

$f(-\sqrt{3})+f(3)=p\pi+q\sqrt{3}$ 일 때, $p-q$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이고, p와 q는 정수이다.) [4점]

30 ■■□

이차항의 계수가 각각 $\frac{1}{3}$, 3인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대해 대칭이다. (나) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $-1<x<5$이다.

$p\times\{f(5)-g(5)\}$의 값은? [4점]

① -24 ② -12 ③ -6 ④ 0 ⑤ 12

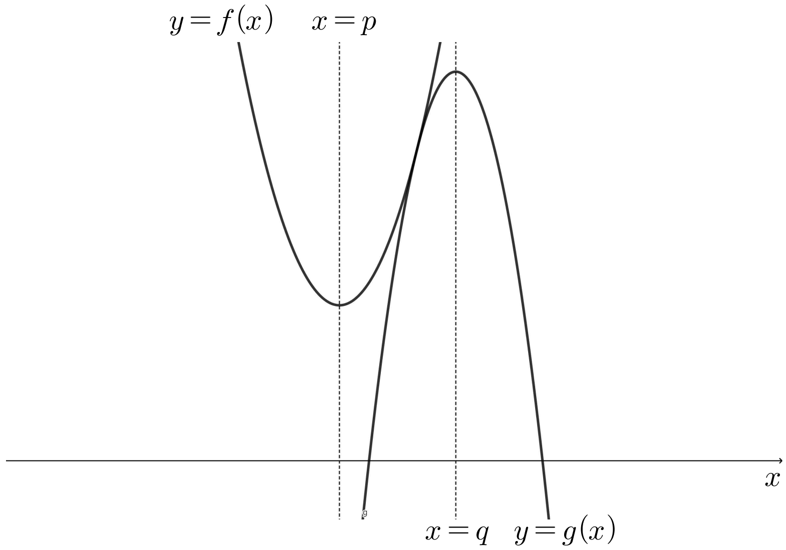
문제 접근

29번) 절댓값에 주의하자.

30번) 다른 문제집에서 자주 볼 수 있는 유형이겠지만... (나) 조건을 푸는 것이 핵심이다.

31 ■■□

이차항의 계수가 각각 1, -2이고 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 각각 p, q인 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같이 접할 때, 접점의 x좌표를 p와 q에 관한 식으로 옳게 나타낸 것은? [4점]



① $\dfrac{3p+2q}{5}$ ② $\dfrac{2p+3q}{5}$ ③ $\dfrac{p+3q}{4}$ ④ $\dfrac{2p+q}{3}$ ⑤ $\dfrac{p+2q}{3}$

32 ■■□

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합 중에서 홀수인 원소가 k개인 부분집합의 개수를 a_k라 할 때, $(a_1+a_2)-(a_3+a_4)$의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

문제 접근

31번) 계산이 좀 더럽다... 내신 시험에서는 계산력도 중요하기 때문에 연습해보자...

32번) 적절한 케이스 분류가 필요하다.

33 ■■□

집합 $A=\{x\,|\,x$는 18 이하의 자연수의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 X의 모든 원소의 곱의 최솟값은 $2^a\times3^b\times c$이다. $\dfrac{abc}{10}$의 값은? [4점]

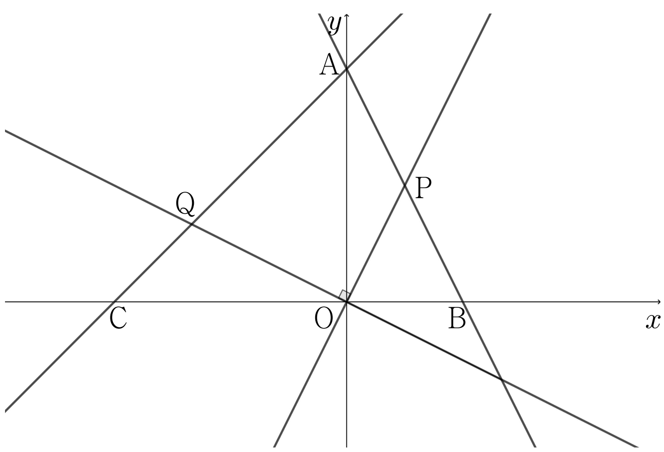
(가) $k\in X$이면 $(18-k)\in X$이다. (나) 집합 X의 모든 원소의 합은 36보다 크고 54보다 작다.

① 11 ② 13 ③ 17 ④ 19 ⑤ 23

34 ■■□

좌표평면 위에 세 점 A$(0, 6)$, B$(3, 0)$, C$(-6, 0)$가 있다. 직선 AB 위의 점 P에 대하여 직선 OP와 수직이고 원점을 지나는 직선이 직선 AC와 만나는 점을 Q라 하자.
삼각형 COQ의 넓이가 6일 때, 점 P의 x좌표는? (단, O는 원점이고, P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{7}{12}$ ③ $\dfrac{11}{12}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

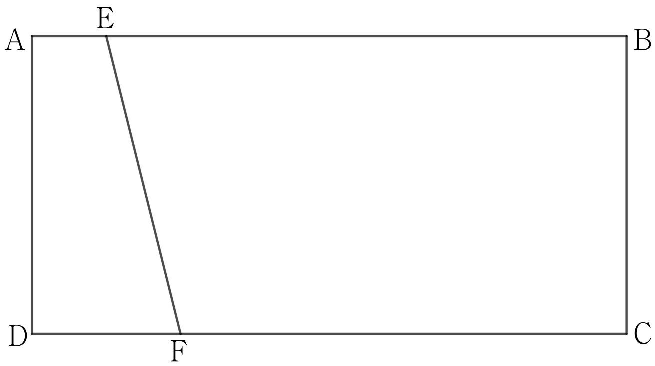


문제 접근

33번) (가) 조건을 주의하고, 경우를 잘 나눠보자.
34번) 계산력이 좀 필요하다. 좌표와 직선의 방정식을 적절히 구해보자.

35 ■■□

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$ 인 직사각형 ABCD가 있다.
선분 AB 위의 점 E와 선분 CD위의 점 F가
$\overline{AD}=2\overline{DF}=4\overline{AE}$ 를 만족시킬 때, 사각형 BEFC의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{31}{3}$ ② $\frac{32}{3}$ ③ 11 ④ $\frac{34}{3}$ ⑤ $\frac{35}{3}$

36 ■■□

최고차항의 계수가 1인 사차 다항식 $P(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$(x-8)P(x)=xP(x-2)$를 만족시킬 때, $P(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

문제 접근

35번) 사각형의 넓이를 식으로 표현해보아야 한다.
36번) x에 적당한 값을 대입하는 쇼를 해야 한다...

37 ■■□

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)|$가

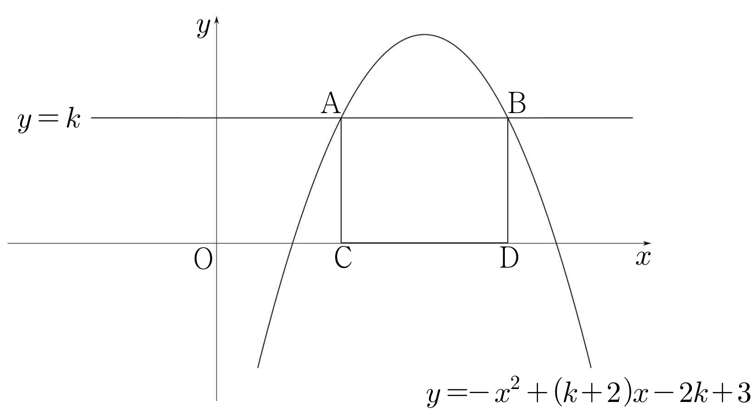
$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (x<1 \text{ 또는 } x>a) \\ f(x)-2x^2+kx-6 & (1\le x\le a) \end{cases}$$

일 때, $a+k$의 값은? (단, $a>1$이고, k는 상수이다.) [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

38 ■■□

그림과 같이 $y=-x^2+(k+2)x-2k+3$ 가 직선 $y=k$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이가 60일 때, k의 값은? (단, $k>5$이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

문제 접근

37번) 절댓값의 정의를 잘 생각해보자.

38번) 이차함수가 직선과 만난다는 것은 그 이차방정식의 근과 관련이 있다.

39 ■■□

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(6, 2)$와 제 2사분면 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OA와 OB는 서로 수직이다.
(나) $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$

세 점 O, A, B를 지나는 이차함수 $y=f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

40 ■■□

이차항의 계수가 1인 이차다항식 $f(x)$와 일차항의 계수가 양수인 일차식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$의 값은? [4점]

(가) $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$는 $x(x+4)$로 나누어 떨어진다.
(나) $f(-1)=g(-1)=0$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

문제 접근

39번) 문제 조건을 잘 사용해야 한다. 그림을 그리면 좀 더 쉽게 풀린다.

40번) 나머지정리를 사용하자.

41 ■■■

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 을 갖는다.
(나) $\beta-\alpha=1$

방정식 $f(x-|f(x)|)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

42 ■■■

좌표평면 위의 두 점 $A(-3,\ -4)$, $B(3,\ 4)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원 C가 있다.
직선 AB에 수직인 직선이 원 C와 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하자. $\overline{AP}=4\sqrt{5}$ 일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

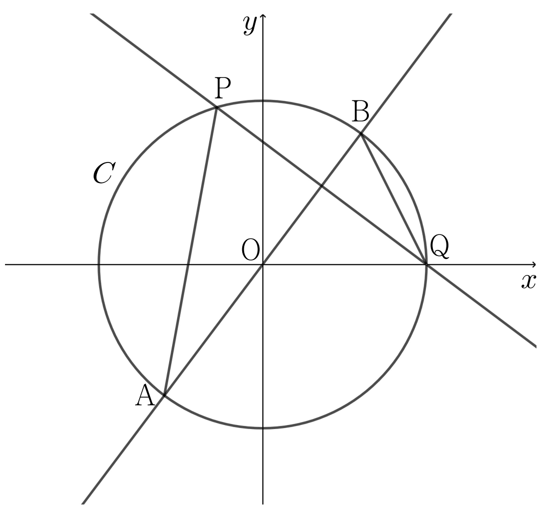
〈 보 기 〉

ㄱ. $\overline{PQ}=8$

ㄴ. 원점과 직선 AP사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

ㄷ. 직선 AP와 직선 BQ의 기울기의 곱은 -11이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



문제 접근

41번) $f(x-|f(x)|)=0$에서 $x-|f(x)|$가 어떤 값이 되어야 할까?

42번) ㄱ, ㄴ, ㄷ 과정 문제는 보통 순서대로 풀어야 수월하다.

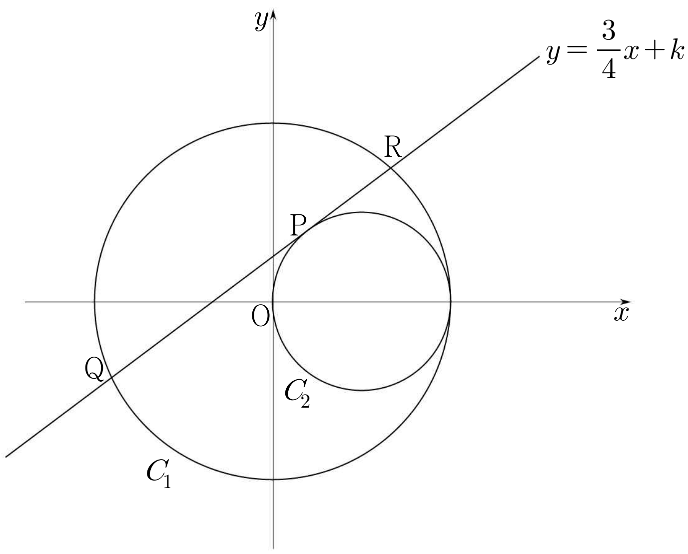
43 ■■■

좌표평면 위에 두 원

$C_1 : x^2+y^2=16$

$C_2 : (x-2)^2+y^2=4$

이 있다. 직선 $y=\frac{3}{4}x+k\ (k>0)$이 원 C_2와 접할 때, 그 접점을 P라 하고 원 C_1과 만나는 두 점을 Q, R 이라 하자. 선분 PQ의 길이가 $\frac{a\sqrt{6}+b}{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이고, 점 Q의 x좌표는 점 R의 x좌표보다 작다.) [4점]

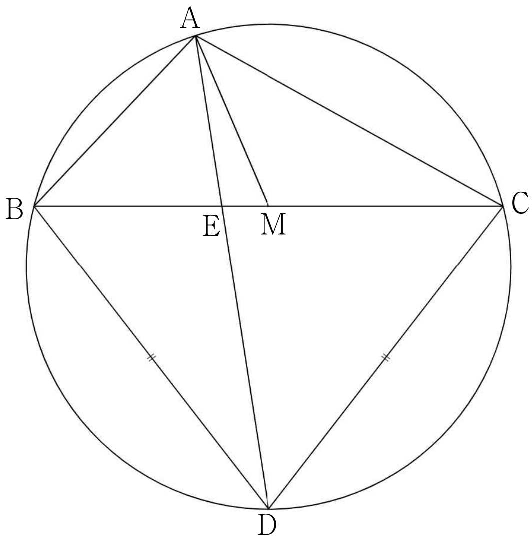


문제 접근

계산 노가다로도 물론 풀리지만... 중학교에서 배운 도형의 성질을 적절히 이용하여 보조선을 야무지게 그으면 깔끔한 풀이가 가능하다.

44 ■■■

그림과 같이 $\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=15$ 인 삼각형 ABC의 외접원 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 선분 BC와 점 E에서 만난다. 선분 BC의 중점 M에 대하여 $\overline{EM}=2$, $\overline{BD}=\overline{CD}$ 일 때, 선분 AM의 길이는 $\frac{q}{p}\sqrt{10}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



45 ■■■

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다. (나) 함수 $\lvert f(x)+g(x)\rvert$는 최댓값 2를 갖는다. (다) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=-2$일 때 최솟값 10을 갖는다.

$f(0)<9$ 일 때, $f(1)-g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 접근

44번) 중선정리에 더해 원의 성질을 잘 생각해보자.

45번) (나) 조건을 만족시키키는 경우가 좀 특이하다... 잘 생각해보야아 한다.

46 ■■■

전체집합 $U=\{x \mid x=2^n,\ n$은 10 이하의 자연수$\}$
의 두 부분집합 $A,\ B$가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

(가) 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 280이다. (나) 집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합의 800배 이다.

47 ■■■

이차함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $a \neq 3,\ 5$ 이다.) [4점]

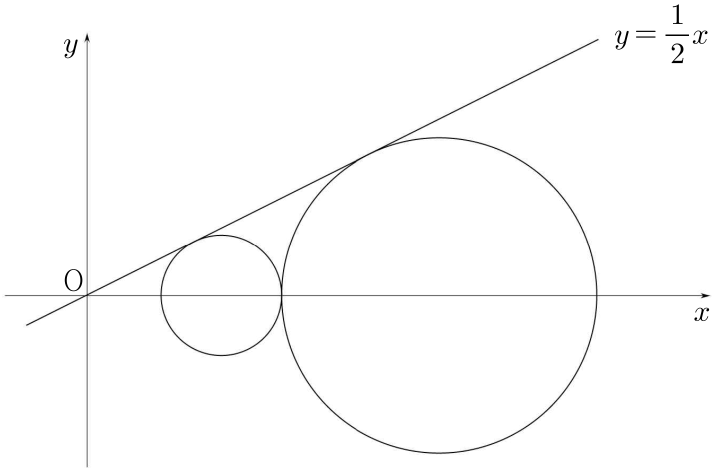
방정식 $f(x)\{f(x)-5\}=0$ 의 서로 다른 실근은 3, 5, a 뿐이다.

문제 접근

46번) (나) 조건의 숫자가 왜 저렇게 큰지 잘 생각해보자.
47번) 이차함수의 대칭성을 사용하자.

48 ■■■

그림과 같이 좌표평면에 중심이 x축 위에 있고 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 접하는 두 원 C_1, C_2가 있다. 두 원이 서로 외접하고 원 C_1의 반지름의 길이가 2일 때, 원 C_2의 반지름의 길이는? (단, 원 C_2의 반지름의 길이는 원 C_1의 반지름의 길이보다 크다.) [4점]



① $3+\sqrt{5}$ ② $3+\sqrt{6}$ ③ $3+\sqrt{7}$ ④ $4+\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{3}$

49 ■■■

좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(a, 0)$ $(a>0)$, $\mathrm{B}(b, 0)$, $\mathrm{C}(0, c)$ $(c>0)$가 있다. 선분 AC와 선분 BC의 중점을 각각 M, N 이라 하고, 선분 AN과 BM의 교점을 P라 하자.
점 P가 y축 위의 점이고, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AN}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=12$ 일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 S이다.
$a\times c\times S$의 값을 구하시오. [4점]

문제 접근

48번) 삼각비를 이용하면 비교적 수월하다.
49번) 삼각형에서 중선의 교점은?

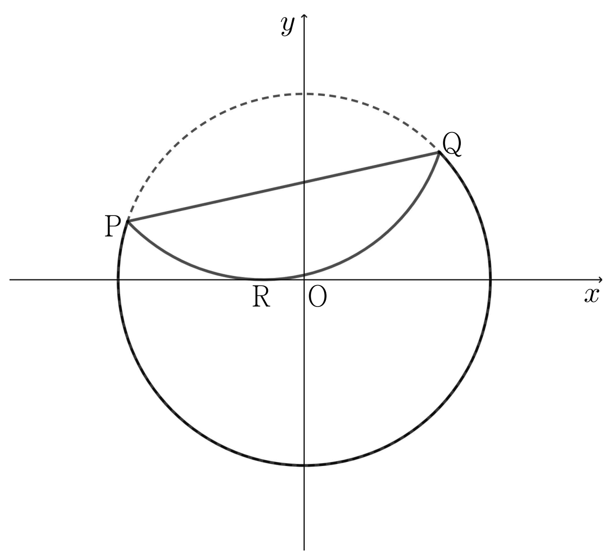
50 ■■■

$-10 \leq a \leq 10$, $-10 \leq b \leq 10$인 정수 a, b에 대하여 원 $O: x^2+y^2=1$ 와 원 $O': (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 원 O'의 중심은 제 2사분면 또는 제 4사분면 위에 있다. (나) 원 O와 원 O'는 적어도 한 점에서 만난다. (다) 원 O'의 반지름은 4 이하이다.

51 ■■■

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 모양의 종이를 중심이 원점에 오도록 좌표평면 위에 올려놓았다. 제 2사분면 위의 점 P와 제 1사분면 위의 점 Q에 대하여 현 PQ를 접는 선으로 하여 접었더니 x축 위의 점 R에 접하였다. 점 R이 원의 지름을 $1:3$ 으로 내분할 때, 세 점 P, Q, R을 지나는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=9$ 이다. $3a+b$의 값은? [4점]



① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

문제 접근

50번) 계산이 좀 많다… 그림을 그려서 문제 상황을 파악하는 것도 괜찮다.

51번) 원을 적절히 평행이동 시켜보자.

52 ■■■

함수

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ 0 & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)=-x(x-a)f(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

방정식 $g(x)+x=9$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

53 ■■■

이차함수 $f(x)$와 y절편이 3인 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\ge g(x)$의 해는 $1\le x\le 5$ 이다.
(나) 함수 $f(x)-g(x)$의 최댓값은 8이다.
(다) $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 8이다.

$f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 접근

52번) 함수의 그래프를 그려본 뒤 조건을 만족시키는 경우를 찾아보자.

53번) 이차부등식과 나머지정리를 모두 사용해보자.

54 ■■■

방정식 $x^6-10x^4+ax^2+9-a=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 6이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $p<a<q$ 또는 $q<a<r$ 이다. $p+q+4r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r는 상수이다.) [4점]

55 ■■■

이차함수 $f(x)$에 대하여 다음과 같은 자료가 있다.

$$f(2),\ f(4),\ f(6),\ f(8),\ f(10),\ f(12)$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 자료 안에 존재하고, 자료의 최빈값이 5, 중앙값이 11일 때, 이 자료의 평균은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

문제 접근

54번) 다항식이 인수분해 가능하다. 인수분해를 하고 나면 뭔가가 보일 것이다.
55번) 처음 보는 유형일 것이다. 이차함수의 대칭성에 주목해보자.

56 **+Plus**

두 집합

$A=\{x \mid x=n^2+2n+3,\ n$은 정수$\}$

$B=\{6,\ a,\ b,\ 13\}\quad (6<a<b<13)$

에 대하여 집합 X가 $X-A \neq \varnothing,\ X \subset (A \cap B),\ n(A \cap X) \leq 2$ 을 만족시킨다.

집합 X의 모든 원소의 합을 S라 할 때, $S=29$ 을 만족시키는 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

문제 접근

플러스 난이도는 조금 많이 어렵다... 벤다이어그램을 그려서 문제 상황을 파악해보고, 조건을 만족하는 경우를 잘 찾아보자.

57 **+Plus**

자연수 m과 이차다항식 $P(x)=x(x-a)$ $(|a|<2k)$에 대하여
다항식 $Q(x)$를

$$Q(x)=P(x)\times P(x-k)\times P(x-2k)\times\cdots\times P(x-mk)$$

라 하고, 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{t \mid \text{다항식 } Q(x)\text{가 } x-t\text{로 나누어떨어진다.}\}$$

라 하자. $n(S)=11$ 일 때, 집합 S의 모든 원소의 합이 220이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

문제 접근

집합 S의 원소의 개수가 홀수이다. $P(x)$는 이차다항식이기 때문에 집합 S의 원소의 개수가 홀수가 된다는 것은 매우 특수한 경우라고 볼 수 있다.

58 **+Plus**

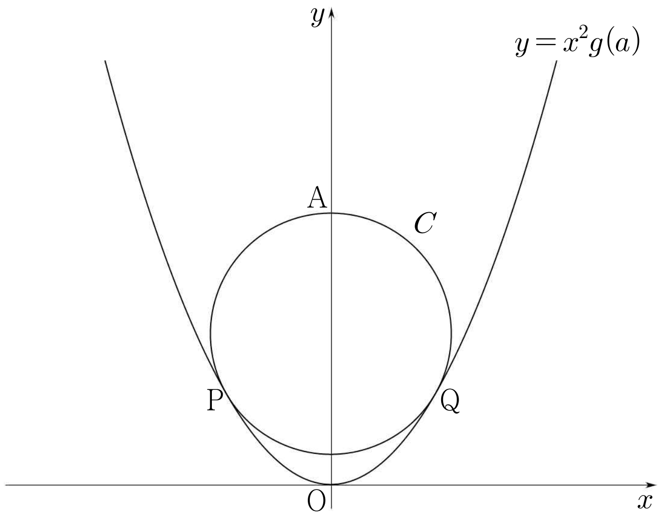
이차함수 $f(x)=x^2+px+1$ 의 꼭짓점의 자취의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자.
이때 집합 A, B를
$A=\{a\,|\,f(a)=g(a)\}$
$B=\{b\,|\,b=3n,\ n$은 정수$\}$
라 하자. $n(A\cap B)=2$, $|p|<100$ 을 만족시키는 p의 값의 개수를 구하시오. [4점]

문제 접근

함수 $g(x)$를 직접 구해볼 수 있다. 집합 B는 큰 의미가 없으니 힘 빼지 말자.

59 **+Plus**

그림과 같이 원 $C: x^2+(y-a)^2=f(a)$ 와 이차함수 $y=x^2g(a)$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 접한다. 이때 원 C가 y축과 만나는 점 중 y좌표가 큰 점을 A라 하자.
삼각형 APQ의 무게중심이 원 C의 중심일 때, 방정식 $f(a)=g(a)$ 를 만족시키는 실수 a의 값을 k라 하자. $100k$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [4점]



문제 접근

상당히 어렵다. $f(a)$와 $g(a)$를 쉽게 다룰 수 있는 방법을 찾고, 삼각형 APQ의 무게중심이 그 외접원의 중심과 일치한다는 점에서 삼각형 APQ의 정체를 밝혀낼 수 있다.

60 **+Plus**

이차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$ 와 실수 t에 대하여,
$t \le x \le t+4$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 $t+2 \le x \le t+6$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값 중에서 크지 않은 값을 $g(t)$라 하고, 방정식 $g(t)=6$ 의 두 실근을 각각 α, β라 하자.
$\beta-\alpha=14$ 일 때, $(a-b)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

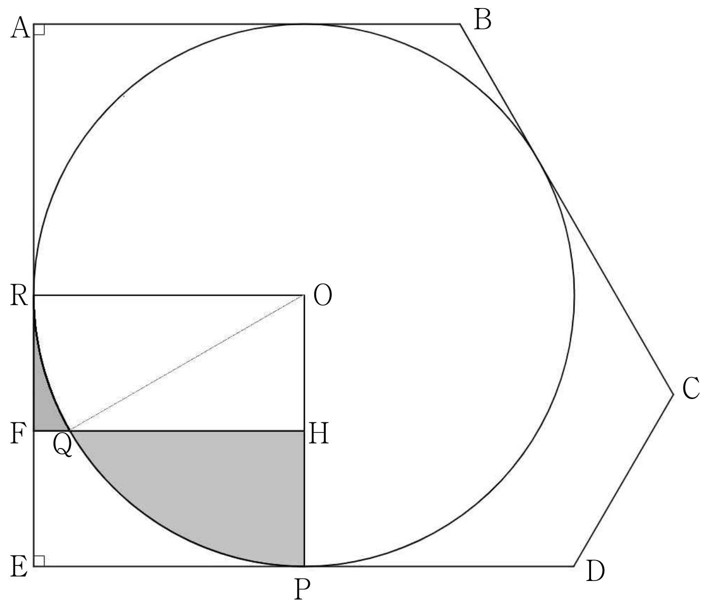
문제 접근

그래프를 직접 그려서 해석해보자. 그리고 문제에서 구해야 하는 값은 이차함수 $f(x)$과 x축과 만나는 두 점 사이의 거리임을 잊지 말자.

61 **+Plus**

그림과 같이 $\angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{BAE} = 90^\circ$, $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{CDE}$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 인 오각형 ABCDE 내부에 중심이 O인 원이 네 선분 AB, AE, BC, DE 에 모두 접할 때, 원이 선분 DE와 접하는 점을 P라 하고, 선분 AE와 접하는 점을 R라 하자. 선분 AE를 $3:1$로 내분하는 점 F에 대하여, 점 F에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 FH가 원과 만나는 점을 Q 라 하자. 호 PQ와 두 선분 HQ, HP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 호 QR과 두 선분 FQ, FR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$S_1 - S_2 = 4\pi - 8$ 일 때, 선분 CD의 길이는 $a\sqrt{3} - b$ 이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]

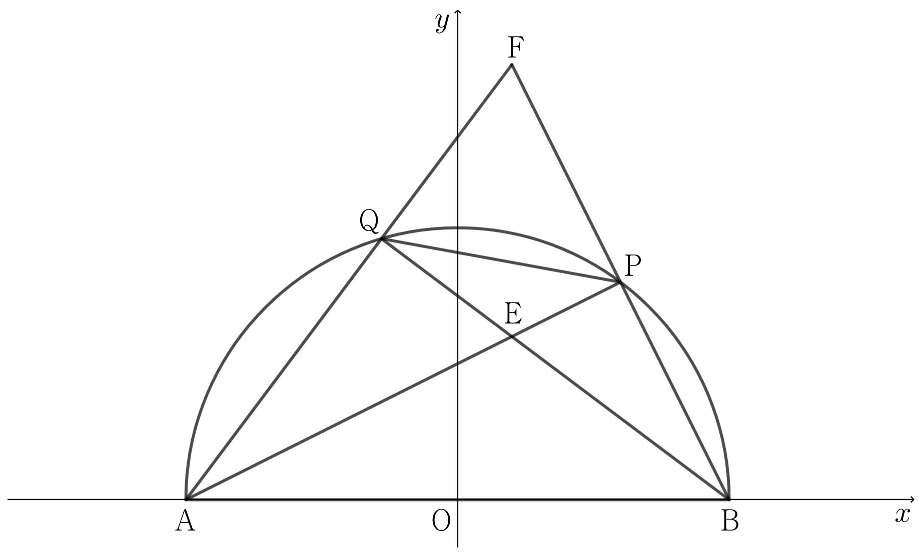


문제 접근

S_1의 값과 S_2의 값을 절대 각각 따로 구할 수 없을 것이다. $S_1 - S_2$의 값이 의미하는 바를 생각해보고, 적절한 보조선을 연결해 선분 CD의 길이를 구하자.

62 +Plus

그림과 같이 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 x축 위의 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 선분 AP, BQ의 교점을 E라 하고, 두 선분 AQ, BP의 연장선의 교점을 F라 하자. $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이고 삼각형 PFQ의 넓이가 8, 삼각형 AEB의 넓이가 15 일 때, 점 F의 좌표는 (a, b)이다.
a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]



문제 접근

도형의 성질을 적절히 사용해야 풀 수 있을 것이다. 두 삼각형의 넓이를 통해 도형을 해석해보자.

63 **+Plus**

상수항을 포함한 계수가 모두 실수이고 최고차항의 계수가 1인 삼차 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=1+\sqrt{3}i$ 는 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
(나) $x=1-\sqrt{f(0)}$ 는 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

위 조건을 만족시키는 모든 삼차 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

문제 접근

(나) 조건에서 주어진 근을 경우를 나눠 잘 생각해보자. 다른 플러스 문제들 보다 비교적 쉬운 편이다.

정답 _

문제 번호	정답	문제 번호	정답	문제 번호	정답
1	②	22	26	43	16
2	②	23	③	44	7
3	④	24	7	45	35
4	④	25	⑤	46	166
5	③	26	③	47	12
6	④	27	③	48	①
7	③	28	①	49	756
8	②	29	44	50	30
9	②	30	④	51	④
10	⑤	31	⑤	52	14
11	②	32	③	53	7
12	①	33	③	54	143
13	②	34	⑤	55	68
14	⑤	35	②	56	23
15	⑤	36	①	57	9
16	④	37	①	58	32
17	④	38	③	59	125
18	28	39	②	60	40
19	③	40	⑤	61	8
20	⑤	41	③	62	65
21	150	42	⑤	63	31

2022 Nth STEP [Part I]

N^{th} STEP 2022 Part I

이차함수 · 도형의 방정식 · 집합

창수동

창의적인 수학 동아리