제3교시

2023학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 공통

성명	

수험번호							

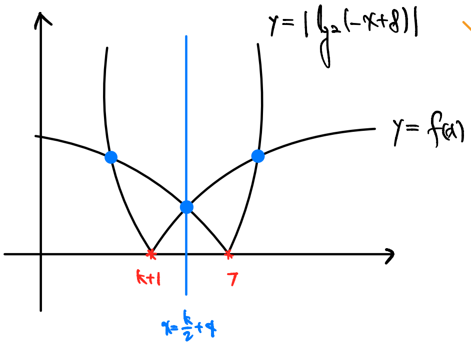
○ <u>문제지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
○ <u>답안지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.
○ 23번부터는 선택과목이니 자신이 선택한 과목(확률과 통계, 미적분, 기하)의 문제지인지 확인하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

9. 곡선 $y=\left|\log_2(-x)\right|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

i)

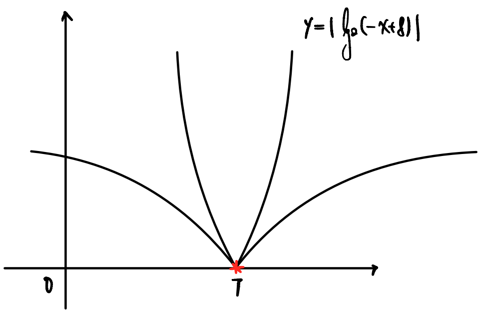


$x=\frac{k}{2}+4$ 대칭

$\therefore 3\left(\frac{k}{2}+4\right)=18$

$\rightarrow \boxed{k=4}$

+) $k=6$이라면?



→ 두그래프가 $x=7$에서 접한다.
세 교점 x

+ 방정식으로도 확인 가능

$\rightarrow \left|\log_2(-x+8)\right| = \left|\log_2(x-6)\right|$

$\rightarrow -x+8 = x-6$ or $-x+8=\frac{1}{x-6}$

$x=7$

$\therefore x^2-14x+49=0$

$\rightarrow (x-7)^2=0$

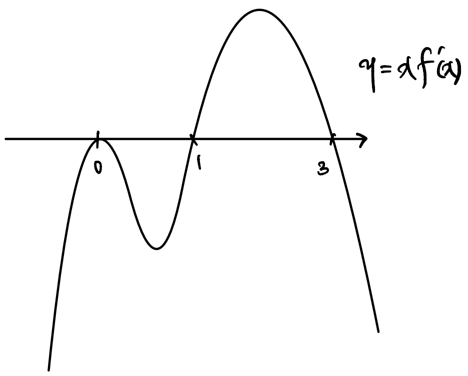
$\therefore x=7$

10. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=2$ 이고 $f'(4)=-24$ 이다.
(나) 부등식 $xf'(x)>0$ 을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$ 이다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

$xf'(x)$: $(0,0)$을 지나는 사차함수



→ $f'(x) = px(x-1)(x-3)$

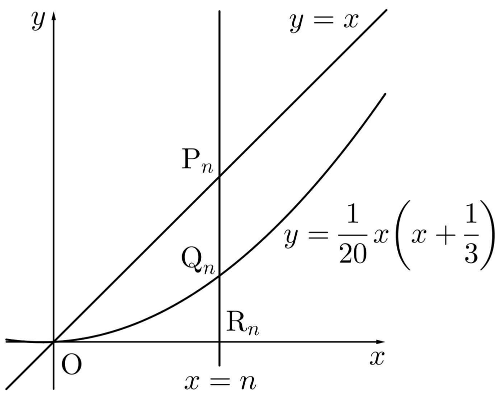
→ (가) 조건에 의해,

$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 2$

$\therefore f(2) = \boxed{\frac{10}{3}}$

11. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 P_n, 곡선 $y=\frac{1}{20}x\left(x+\frac{1}{3}\right)$과 만나는 점을 Q_n, x축과 만나는 점을 R_n이라 하자. 두 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 길이 중 작은 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{115}{6}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ $\frac{39}{2}$ ④ $\frac{59}{3}$ ⑤ $\frac{119}{6}$



$\overline{P_nQ_n} = n - \frac{1}{20}n(n+\frac{1}{3})$, $\overline{Q_nR_n} = \frac{1}{20}n(n+\frac{1}{3})$

$1 \le n \le 9$ 에서는 $\overline{P_nQ_n} > \overline{Q_nR_n}$

$n=10$ 일때는 $\overline{P_nQ_n} < \overline{Q_nR_n}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{20}n(n+\frac{1}{3}) + 10 - \frac{1}{20} \times 10 \times \frac{31}{3}$

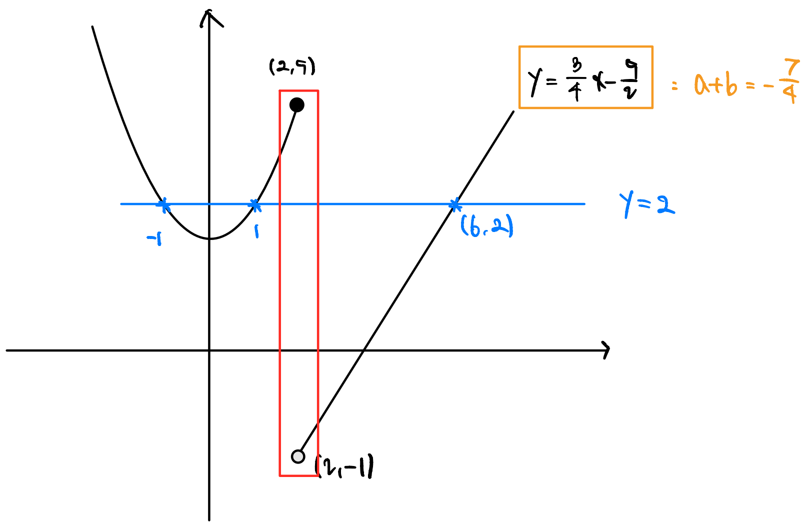
$= \boxed{\frac{119}{6}}$

12. 함수

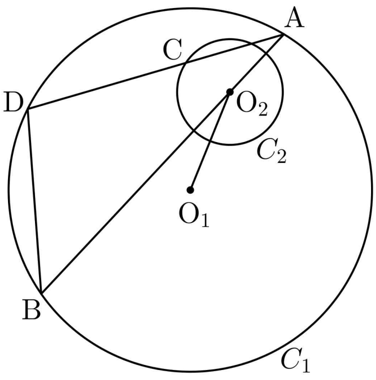
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$



13. 그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 $r\,(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = \boxed{\quad(가)\quad}$$ → $2r$

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A = \dfrac{1}{\overline{AO_2}}$ 이므로

$$\overline{BD} = \frac{1}{\overline{AO_2}} \times \boxed{\quad(가)\quad}$$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.

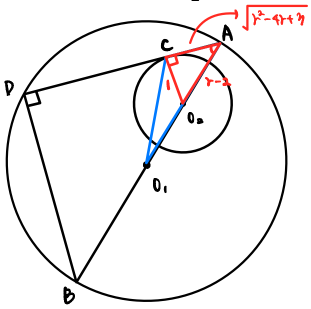
$\overline{AO_2}$의 최솟값은

$$\boxed{\quad(나)\quad}$$ → $r-2$

이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,

$$\overline{O_1C}^2 = \boxed{\quad(다)\quad}$$

이다. → $(2r^2-4r+7) - 2r \times \dfrac{r^2-4r+7}{r-2}$



→ $\cos A = \dfrac{\sqrt{r^2-4r+7}}{r-2}$ 이다.

$\triangle ACO_1$에서 코사인법칙을 쓰면,

$\overline{O_1C}^2 = (2r^2-4r+7) - 2r \times \dfrac{r^2-4r+7}{r-2}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

$\therefore f(4) \times g(5) \times h(6) = \boxed{144}$

14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. $g(-1)=7$ 이고, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\frac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}$

$= g'(-1)-g'(-1)=0$ 이다. $\longrightarrow$ $\underline{a=0}$

$\rightarrow$ $g(1)=1$ 이므로 $g(x)=x^2-x+1$ 이다.

$\therefore$ $g(a)=g(0)=1$

~~ㄷ~~. $g(b)=7$ 이고, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}-\frac{g(b-h)-g(b)}{-h}$

$=\underline{g'(b^+)-g'(b^-)=4}$ $\longrightarrow$ $b=1$ 이다.

$\rightarrow$ $\underline{g(1)=7}$ 이고, $\underline{g'(1^+)=-f'(1),\ g'(b^-)=f'(1)}$ 이다.

$\rightarrow$ $f(1)=7$　　$\rightarrow$ $f'(1)=-2$

$\rightarrow$ $f(x)-\boxed{(-2x+9)}=(x-1)^2$

: $x=1$ 에서의 접선

$\therefore$ $g(4)=2f(1)-f(4)=0$

15. 함수

$$f(x) = \left| \boxed{2a\cos\frac{b}{2}x} - (a-2)(b-2) \right|$$

: 주기 $\frac{4}{b}\pi$

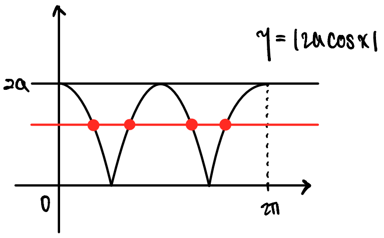
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다. (나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

(가) $f(x)$의 주기 $=\pi$ 이려면 $b=2$ 이거나 $b=4$ 이다.

case1) $b=2$



→ $a=1, 2, \cdots, 10$

∴ 10개

case2) $b=4$

i) $\underline{(a-2)(b-2) \ge 2a}$ or $\underline{(a-2)(b-2) \le -2a}$

: $a-2 \ge a$ (x)

: $a \le 1$

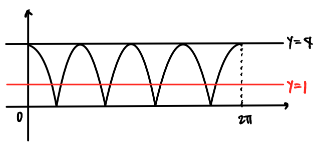
→ 1개

ii) $\underline{-2a < (a-2)(b-2) < 2a}$

: $a > 1$

① $a=2$ (x)

→ $f(x)=|4\cos 2x|$

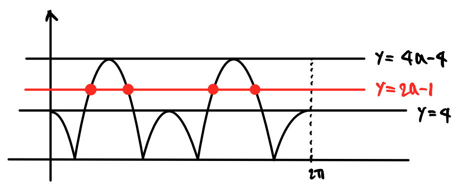


: 교점 8개 생김.

② $a \ge 3$

→ $f(x)=|2a\cos 2x - 2(a-2)|$

$= |2a(\cos 2x - 1) + 4|$



→ $4 < 2a-1 < 4a-4$

: $\boxed{\frac{5}{2} < a}$

→ $a=3, 4, \cdots, 10$

∴ 8개

∴ 총 19개

20. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도는

$$v(t) = |at-b|-4 \quad (a>0,\ b>4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이다.
> (나) $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이다.

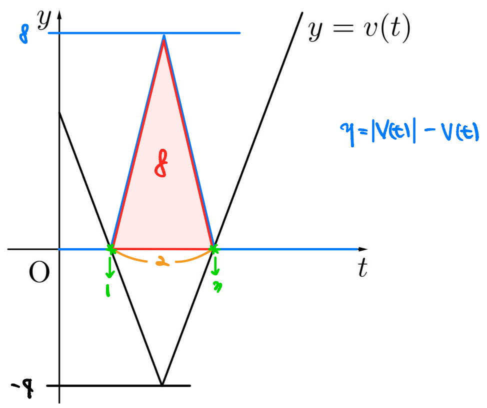
시각 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

14

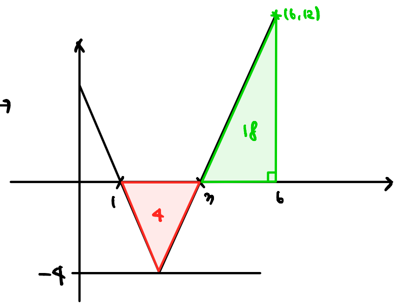
$S(k) = \int_0^k |v(t)|\,dt$

$x(k) = \int_0^k v(t)\,dt$

$\rightarrow S(k) - T(k) = \int_0^k \{ |v(t)| - v(t) \}\,dt$



$\rightarrow$



$\therefore \int_1^6 v(t)\,dt = \boxed{14}$

21. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6+a_7=-\frac{1}{2}$

(나) $a_l+a_m=1$이 되도록 하는 두 자연수 l, m $(l<m)$의 모든 순서쌍 (l, m)의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_{\frac{13}{2}}=-\frac{1}{4}$

$\rightarrow a_n=d\left(n-\frac{13}{2}\right)-\frac{1}{4}$

35

(나) $a_{\frac{l+m}{2}}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow a_{\frac{l+m}{2}}=d\times\frac{l+m-13}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow l+m=\frac{3}{2d}+13$

$\rightarrow (l,m)=(1,13), \cdots (6,7)$

$\rightarrow \frac{3}{2d}+13=14$

$\rightarrow d=\frac{3}{2}$

$\rightarrow a_n=\frac{3}{2}\left(n-\frac{13}{2}\right)-\frac{1}{4}$

$\therefore 2S=2\times 14\times a_{\frac{15}{2}}$

$=28\times\frac{5}{4}$

$=\boxed{35}$

22. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1| = \begin{cases} 2f(x)-1 & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1) \end{cases}$$

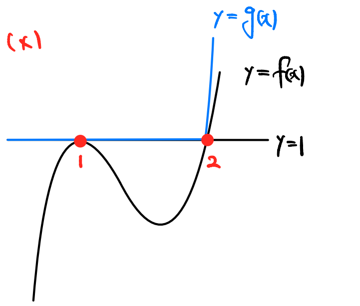
이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

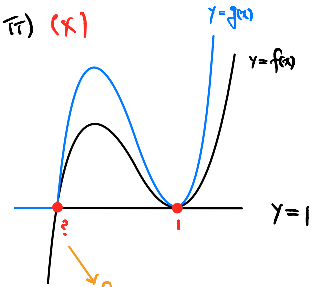
case1) 최고차항 계수 > 0

ⅰ) (x)



→ 이 경우, $n=1$ 일때부터 (나) 조건 위배

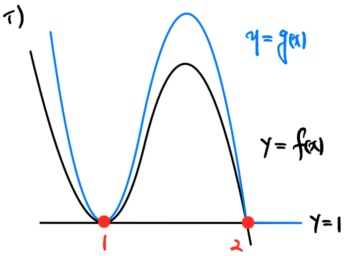
ⅱ) (x)



$f(x)=g(x)$ 실근합 $\neq 3$

case2) 최고차항 계수 < 0

ⅰ)



: $f(x)-1 = p(x-1)^2(x-2)$

$\int_0^x f(t)dt = \frac{p}{4}x^4 - \frac{4p}{3}x^3 + \frac{9p}{2}x^2 + (1-2p)x$

ⅰ) $n=1 \to 1 < \int_0^1 \{2f(x)-1\}dx < 17$

$\to 0 < \int_0^1 f(x)dx < 9$

: $0 < 1 - \frac{7p}{12} < 9$

$\to -\frac{96}{7} < p < 0$

ⅱ) $n=2 \to 2 < \int_0^2 \{2f(x)-1\}dx < 18$

$\to 0 < \int_0^2 f(x)dx < 10$

: $0 < -\frac{2}{3}p + 2 < 10$

$\to -12 < p < 0$

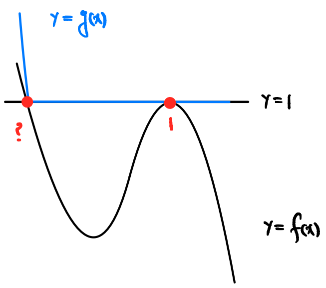
p는 정수이므로, $p=-1, \cdots, -11$

∴ 11개

ⅲ) $n\geq 3 \to n < \int_0^2 \{2f(x)-1\}dx + (n-2) < n+16$

$\to 0 < \int_0^2 f(x)dx < 10$ (n=2 일때와 동일)

ⅱ) (x)



$f(x)=g(x)$ 실근합 $\neq 3$