$f \circ g(x) = f(g(x))$

* $f(g(x)) = 0$ 의 근은 어디에

① $f(x)=0$ 을 만족하는 x를 찾는다. (α, β, γ 라 치자)

② $g(x)$ 그래프를 그리고 ①의 α, β, γ에 대해 $y=\alpha$, $y=\beta$, $y=\gamma$을 긋고 교점 찾으면 끝

* $f(g(x))$ 그래프 개형이 추론하는 법 (딥T 뉴런과 유사)

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

* $f(g(x))$ 가 극대·극소가 될 후보군은 ① g가 극대·극소 ② f가 극대·극소 (단, 이 때는 g를 정의역으로 가짐)

판단의 순서는 겉함수 $f \to$ 속함수 g 순.

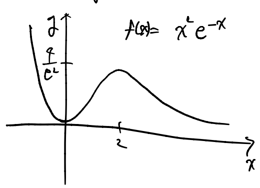
* 겉함수 f가 극대라면 g가 감소하고 있건, 증가하고 있건, 극대건, 극소건 관계 없이 극대, (f가) 극소라면 합성함수도 극소!!!

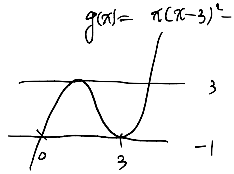
* 속함수 g가 극대 ($g'(x)$가 $+ \to 0 \to -$) 일 때 f가 감소중이면 ($f'(g(x)) < 0$) 전체 $f'(g(x)) \cdot g'(x)$는 ($- \to 0 \to +$)이니 극소를 가짐. f가 증가중이면 그대로 극대! 반대로 g가 극소일 때 f가 증가중이면 그대로 극소, 감소중이면 극대.

→ 속함수의 극대·극소 지점에선 f의 증·감에 따라 전체 함수의 극대·극소 경향성이 유지 / 반대로 됨.

* 우리가 해야할 것?

① $f(x)$, $g(x)$ 그래프를 그린다.





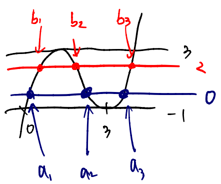
요약: $f(g(x))$의 극값 지점은 (f의 극값지점 ∪ g의 극값지점), f부터 조사

(주의. 정의역이 g로 들어옴) → 그다음 g 조사.

② $f(x)$가 극대·극소를 갖는 지점 찾기.

→ $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대!

③ 그걸 $g(x)$에 긋는다 ($y=0$, $y=2$)



⟹ $f(g(x))$는 $x=a_1, a_2, a_3$에서 극소! (함숫값은 0)

$x=b_1, b_2, b_3$에서 극대! (함숫값은 $\frac{4}{e^2}$)

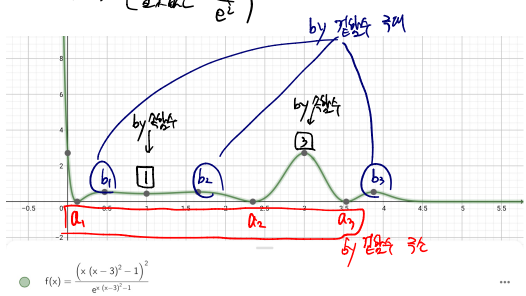
④ $g(x)$가 극대 극소인 지점, 그리고 그 때 함숫값 찾기.

$x=1$에서 극대 ($g(1)=3$) $x=3$에서 극소 ($g(3)=-1$)

⑤ 겉함수에 의한 경향성 파악

→ f는 $x=g(1)=3$에서 감소중 → $f(g(x))$는 $x=1$에서 극소

f는 $x=g(3)=-1$에서 감소중 → $f(g(x))$는 $x=3$에서 극대



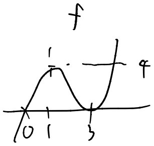
* 그럼, 합성함수는 어떻게 그림?

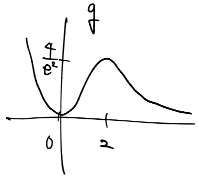
앞장에서처럼 $f\circ g(x)$ 가 극대/극소인 x 지점들을 다 추려놓고, 그 때의 $f(g(x))$ 값을 함숫값으로 갖도록 그림.

$\boxed{\text{practice}}$

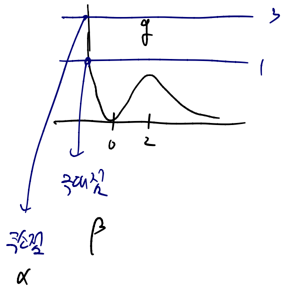
$f(x) = x(x-3)^2$ $\quad g(x) = x^2 e^{-x}$.

$f\circ g(x)$ 그래프?





일단 겉함수가 $x=1$ 극대. $x=3$ 극소.



속함수 $x=0$ 극소,

$f(x)$는 $x=g(0)$에서 증가중 → 극소

$x=2$ 극대

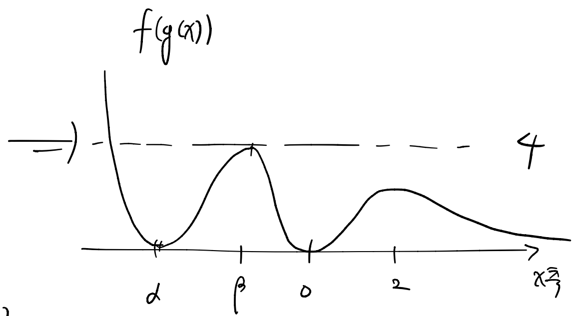
$f(x)$는 $x=g(2)$에서 증가중 → 극대

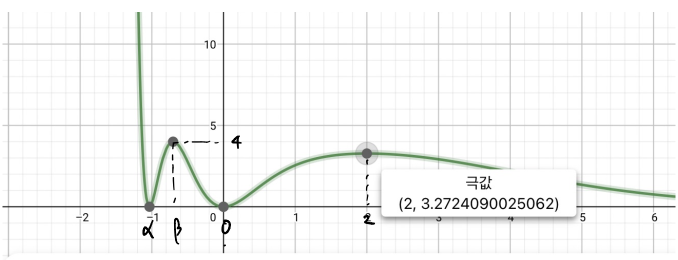
대충 $f(g(\alpha)) = f(3) = 0.$ (극소)

$f(g(\beta)) = f(1) = 4$ (극대)

$f(g(0)) = f(0) = 0$ (극소)

$f(g(2)) = f(\frac{4}{e^2})$는 대충 $0 \sim 4$ 사이 (극대)





$f(x) = x^2 e^{-x} (x^2 e^{-x} - 3)^2$

대충 비슷하네

(규격은 박살났지만 α, β가 어딘지가 중요하지 않으니)

220929 (이재)

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

21 사관 30 (가)

30. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고,
> 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

[2019학년도 9월 30번]

25. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하여라.25) (단, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$)

190430 (가)

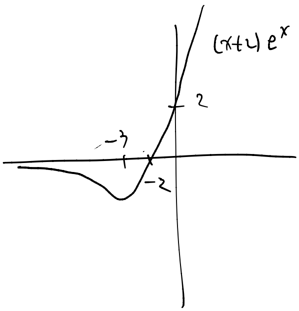
30. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 정수)에 대하여
함수 $g(x)=e^{f(x)}-f(x)$는
$x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$ $(\alpha<-1<\beta)$에서만 극값을 갖는다.
함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때,
$\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

$g(x) = \underbrace{(x+2)e^x}_{\text{겉}} \circ \underbrace{f(x)}_{\text{속}}$

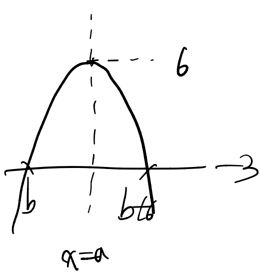


* 아, $g(x)$는 $f(x)=-3$인 지점에서 $\boxed{\text{극소}}$ 이자 최소 겠구나.

(속함수의 함숫값이 겉함수의 극소 지점 x값)

(가). $f(a)=6$? 2 때 $(x+2)e^x$ 극대, 극소도 아닌데?

근데 6에서 겉함수 $(x+2)e^x$가 증가중이네? 그럼 속함수 f가 $x=a$에서 극대 6을 갖는구나.



(나) f는 $x=b$. $x=b+6$에서 -3이구나. 대칭이겠지?

$$\boxed{f(x) = -(x-a)^2+6}$$

$\alpha-\beta = 2\sqrt{6}$

$\boxed{24}$.

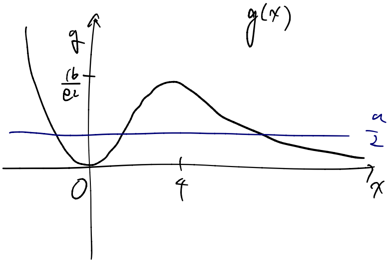
21 사관 30 (가)

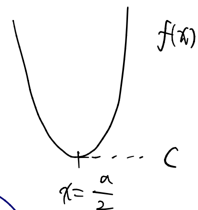
30. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
>
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이고, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$이다.) [4점]

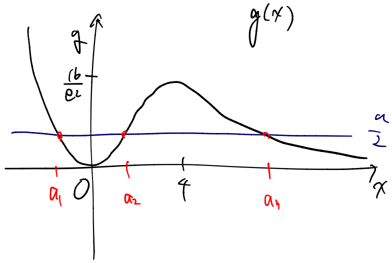




$f(g(x))$의 극대·극소 지점 → $g(x)=\frac{a}{2}$ ($\frac{a}{2}<\frac{8}{e^2}$이니 3군데 나옴)

→ $x=0$, $x=4$

(가) $f(0)<f(\frac{16}{e^2})$ ∴ 0이 $\frac{16}{e^2}$보다 $\frac{a}{2}$에 가깝다 → $\frac{a}{2}<\frac{8}{e^2}$ $\boxed{a<\frac{16}{e^2}}$.

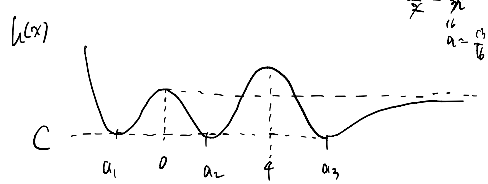


$h(x)$는 $x=a_1, a_2, a_3$에서 극소.

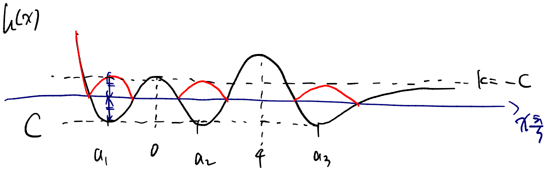
$x=0$. $x=4$에서 극대 →

$\frac{\cancel{8}a}{\cancel{x}}=\frac{\cancel{39}\ 13}{\cancel{32}\ 16}$

$a=\frac{13}{16}$



(나) 만족하려면...



∴ $h(0)=-h(a_1)=-C=\frac{a^2}{4}-b$

∴ $b=\frac{a^2}{8}$

$f(1)=1-a+b=-\frac{7}{32}$

$a=\frac{3}{2}$. $b=\frac{9}{32}$

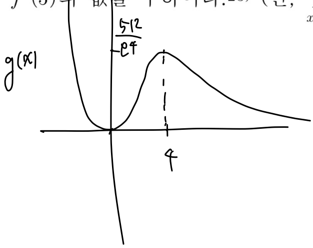
∴ $a+16b=\frac{12}{2}=\boxed{6}$.

[2019학년도 9월 30번]

25. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

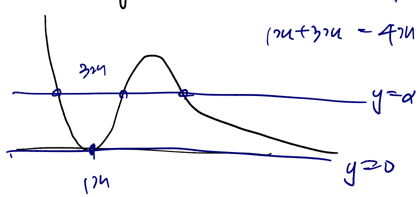
$f'(5)$의 값을 구하여라.[25] (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$)



$f(g(x))=0$ 근개수

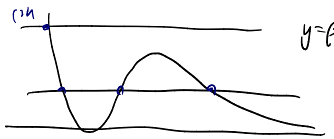
↓

1개+3개 = 4개



(가). $f(x)=0$의 근은 0과 α $\left(0<\alpha<\frac{512}{e^4}\right)$

or α $\left(0<\alpha<\frac{512}{e^4}\right)$와 β $\left(\beta>\frac{512}{e^4}\right)$



$f(g(x))=0$ 근개수

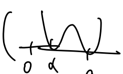
↓

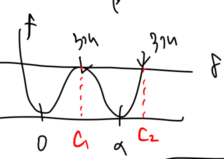
1개+3개= 4개

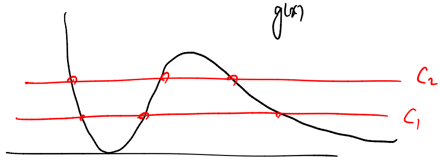
(나). f는 0에서 증가중 or $f(g(0))=f(0)$이 극소.

$f'(0)>0$

(나)에 의해 (가)에서 0과 α를 근으로 가져야함

( 는 안됨) (f(0)이 극소도, $f'(0)>0$도 아니기 때문)





∴ $\alpha=4$

$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2}$

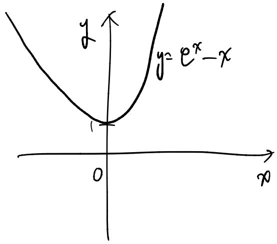
총근 $\boxed{6개}$

$f'(5)=5\cdot1+1\cdot5^2$

$=30$

190430 (가)

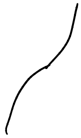
30. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 정수)에 대하여 함수 $g(x)=e^{f(x)}-f(x)$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$ ($\alpha<-1<\beta$)에서만 극값을 갖는다. 함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때, $\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



$g(x)=\underbrace{(e^x-x)}_{겉}\circ\underbrace{f(x)}_{속}$ ⇒ g(x)가 극대 or 극소인 x지점 $\{x \mid f(x)=0\}\cup\{x \mid f'(x)=0\}$

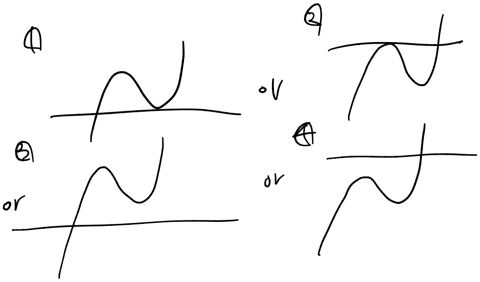
겉: $x=0$에서 극소.

만약 f가



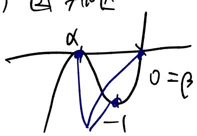
이런 모양이면 g(x)가 극대·극소 지점 1개. ($\because \{x \mid f'(x)=0\}=\phi$, $n(\{x \mid f(x)=0\})=1$)

고로 f는



근데 $f(0)=0$이니 ② or ④

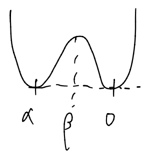
i) ② 케이스



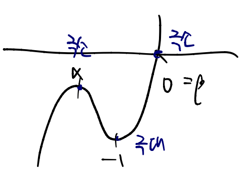
$g(x)=(e^x-x)\circ f(x)$가 극값을 갖는 지점

⇒ 대충 g(x)는 $x=\alpha$, $x=0$에서 동등 극소이자 최솟값

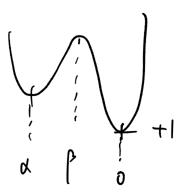
→ $|g(x)-g(\alpha)|$ 실·전·미·가 (X)



ii) ④ 케이스



⇒ g(x)는 대충



$|g(x)-g(\alpha)|$ 미분 2군데 (O)

결론: f(x)는 $x=0$ 이외 근 X ⇒ $x(\underbrace{x^2+ax+b}_{허근})=0$ → $D=a^2-4b<0$

$f'(-1)=0$ ⇒ $3-2a+b=0$ ∴ $b=2a-3$ $a^2-8a+12<0$ $2<a<6$

$f(-1)=-1+a-b=2-a$ (a는 정수) $-4<f(-1)<0$ $\{f(-1)\}^2$ 최대는 $\{-3\}^2=\boxed{9}$.