UR dokzon

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}} = 9$

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ 일 때, a_5 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$r=2$

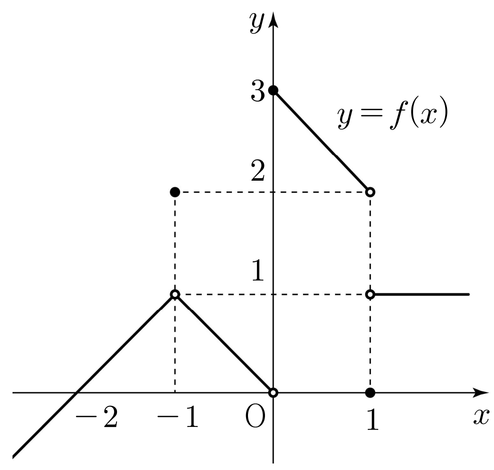
$a_5 = 4$

3. 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 7$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$3+2 = 5$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$1+1 = 2$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$1=4-2a+3$

$a=3$

$+$

6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② 1 ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{13}{10}$

$\cos\theta+\cos\theta=\frac{6}{5}$

7. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n<0) \\ -2a_n+1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10}+a_{20}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\frac{1}{2}$ $\underline{0 \quad 1 \quad -1}$ $\underline{0 \quad 1 \quad -1}$

$a_{10}=-1$

$a_{20}=0$

8. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f(x)=2x^2+\sim$　　$f(1)=0,\ f'(1)=3$

$f(x)=2(x-1)^2+3(x-1)$

$f(3)=8+6=14$

9. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은? [4점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

$f(x)=x^3+\sim$

$f(1)=f(2)=f(0)$

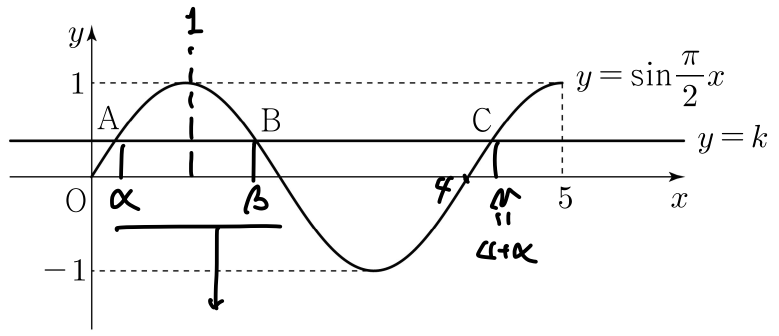
$f(x)=(x-1)(x-2)x+k$

$=(x-1)(x^2-2x+1-1)+k=(x-1)^3-(x-1)+k$

$f'(x)=3(x-1)^2-1$　　$\therefore -1$

10. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\ (0\le x\le 5)$ 가 직선 $y=k\ (0<k<1)$ 과 만나는 서로 다른 세 점을 y 축에서 가까운 순서대로 A, B, C 라 하자. 세 점 A, B, C 의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$



$\alpha+\beta=2$

$\beta=2-\alpha$

$\gamma=4+\alpha$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=\alpha+6=\frac{25}{4}$

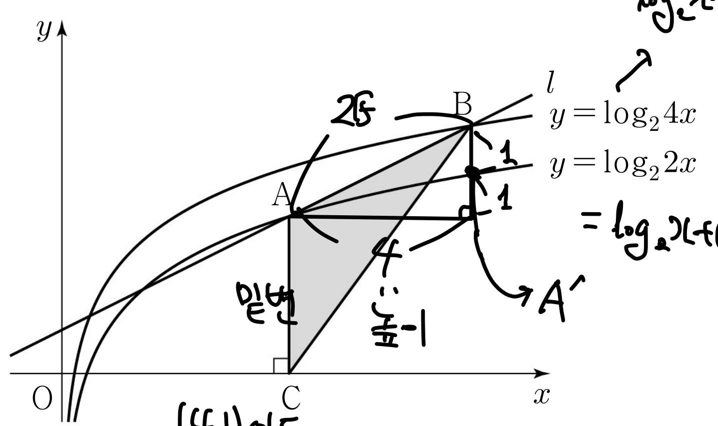
$\therefore \alpha=\frac{1}{4}$

$\beta-\alpha=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

11. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

$\log_2 x+2$



$2\sqrt{5}$
1
1
$=\log_2 x+1$
A′
4
밑변
높이
(4,1)이동

A, A′ on $\log_2 x+1$

x좌표 α

$A_y=\log_2\alpha+1 \rightarrow A'(\alpha+4, \log_2\alpha+2)$

$\log_2(\alpha+4)+1=\log_2\alpha+2$

$\therefore \frac{\alpha+4}{\alpha}=2 \rightarrow \alpha=4$

$A(4, 3)$

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

12. 첫째항이 2 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

$\rightarrow a_1=2$

이 성립할 때, a_{10} 의 값을 구하는 과정이다.

$n\geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$$

$\rightarrow a_n=\frac{3S_n}{n+2}$

이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n \ (n\geq 2)$

$\therefore 3S_n=(n+2)a_n$

이다.

$S_1=a_1$ 에서 $3S_1=3a_1$ 이므로

$3S_n=(n+2)\times a_n \ (n\geq 1)$

이다.

$$3a_n=3(S_n-S_{n-1})$$

$$=(n+2)\times a_n-(\boxed{(가)})\times a_{n-1} \ (n\geq 2)$$

$(n+1)$

정리: $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{(나)} \ (n\geq 2)$$

$\frac{n+1}{n-1}$

따라서

$$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$$

$$=\boxed{(다)}$$

$\rightarrow 2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{10}{8}\times\frac{11}{9}=\boxed{110}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$ 의 값은? [4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

$\frac{f}{g}=n-1 \Rightarrow p-1=\boxed{109}$

13. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x \geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2 뿐일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

only 1개

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$f(x)=x^3+\sim+\frac{1}{2}$

$=f(-2)$의 근.

근이 1개 $f(x) \to$ 0개 / 1개

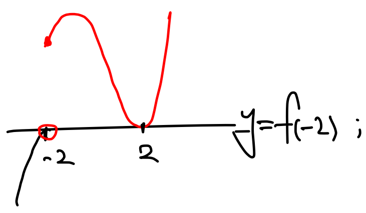
$f(x)+8 \to$ 1개 / 0개

Case1 Case2

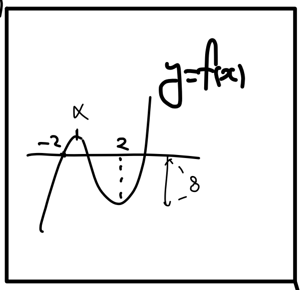
Case 1 $f(x)$ $(x<-2)$ 근 X.

$\downarrow$

$f' \geq 0$ $(x<-2)$



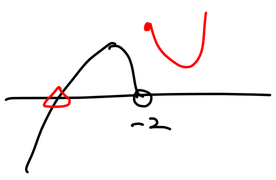
$y=f(-2)$;



case2. $f(x)$ $(x<-2)$ has 근.

$\downarrow$

$f'<0$ 존재.



실근 <-2 $\to$ 2일수 없음.

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$

$=3x^2-3(\alpha+2)x+6\alpha$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+2)x^2+6\alpha x+\frac{1}{2}$

$f(-2)-f(2)=8=-16-24\alpha$

$\therefore \alpha=-1$

$f(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^3+3\alpha^2+\frac{1}{2}=\boxed{4}$

14. 길이가 14 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C 를 $\overline{BC}=6$ 이 되도록 잡는다. 점 D 가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D 는 점 A 와 점 C 가 아닌 점이다.) [4점]

https://orbi.kr/00054613086 _ 수1 도형 특강 _ 테마 특강 (1) 틀렸으면 꼭 보기!

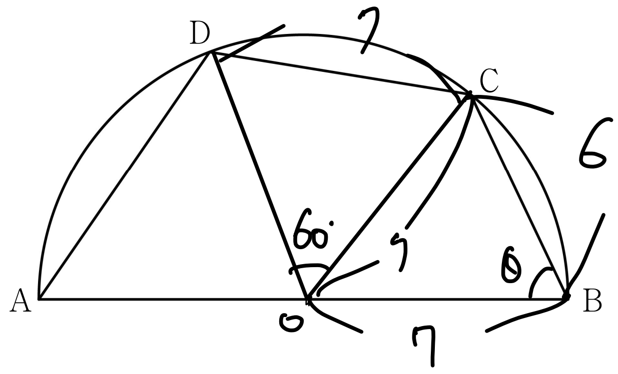
<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

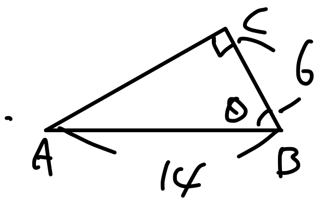
ㄴ. $\overline{CD}=7$ 일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

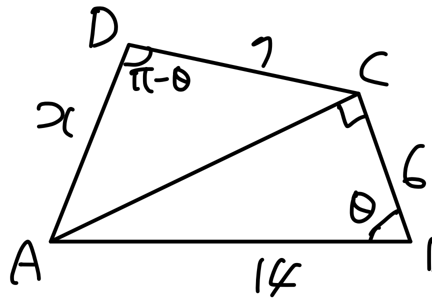


ㄱ.



$\cos\theta=\frac{3}{7}$

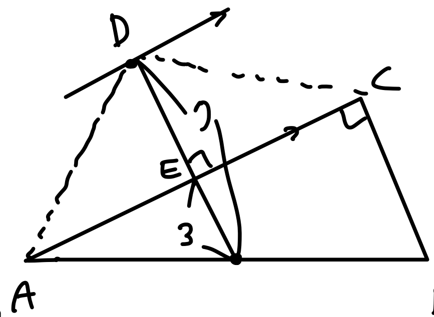
ㄴ. $\overline{CD}=7 \to \triangle OCD$: 정삼각형



$\overline{AC}=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\triangle ADC$ cos법칙 : $x^2+49-14x\times\cos(\pi-\theta)=160$

$\therefore x^2+6x-111=0 \to -3+2\sqrt{30}=x$ ㄴ.(o)



A,B,C는 확정.

$\therefore \square=\triangle ABC+\triangle DAC$

$\downarrow$

$12\sqrt{10}$

$\overline{ED}=7-3=4$ $\therefore \triangle DAC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{10}\cdot4=8\sqrt{10}$

$\therefore \boxed{20\sqrt{10}}$ ㄷ.(o)

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$f(x)=x^2+\sim$

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

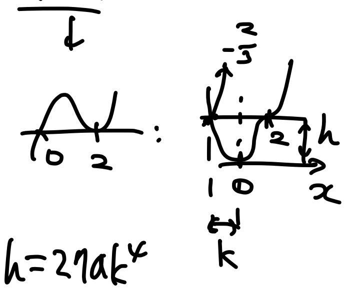
$\begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \rightarrow f(x)=(x-2)^2$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

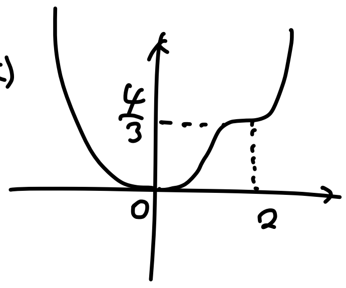
$\int_0^x \underbrace{t(t-2)^2}_{\downarrow} dt$



높이 $h=27ak^4$

$=27\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$

$=\frac{4}{3}$ ⟶



한곳 미분X → $g(a)=\frac{4}{3}$

$a=2,\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

단답형

16. $\log_3 7 \times \log_7 9$의 값을 구하시오. [3점]

②

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_1^2 f'(x)dx = \left[2x^3-x^2-x\right]_1^2$

$=16-4-2-2+1+1$

$=10=$ 답-3

$\therefore 13$

https://orbi.kr/00056695709 _ 수2 다항함수의 성질 _ 테마 특강 (4)

높이공식 그대로 쓰임

18. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

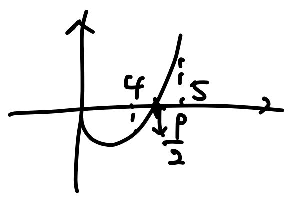
$x(t)= t^3+3t^2-at$

$x(3)=54-3a=6$

$a=\boxed{8}$

19. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sqrt[n]{2n^2-9n}$



$n \leq 4$: n 홀수여야 $f(n)=1$

나머진 $f(n)=0$

$n \geq 5$: 홀 → $f(n)=1$, 짝 → $f(n)=2$

$\therefore 1+0+1+2=\boxed{4}$

20. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$g(0)=0$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

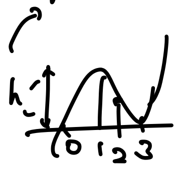
$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

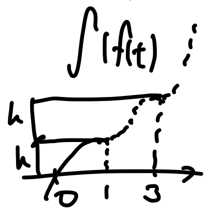
$f(x)=3x^2+\sim$

(가) $g'(x)=\underbrace{2x}_{\text{한근}}\underbrace{\int_0^x f(t)dt}_{\text{3근.}}$ → 중근만 존재.

$\therefore \int_0^x f(t)dt = x(x-3)^2$ ($\because$ (나))

$h=4\times1\times1^3=4$





$\therefore 2h=\boxed{8}$

4. 적분에서 통용되는 중요 표현을 알아보자.

$|f'(x)|dx$ -> f가 감소할 부분도 강제로 증가하게 끌어올린 형태

보다 자세한 내용은 https://orbi.kr/00057435046

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
> (나) $|a_{n+1}-a_n| = 2n-1$

$a_2=9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $\quad a_2=p.$

(가) $S_{2n}=17n \rightarrow a_{2n}+a_{2n-1}=17$

$8/p/x/17-x/\cdots$

(나) $|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1 = 4n-3$

$|a_{2n}+a_{2n}-17|=4n-3$

$a_{2n}=b_n \quad b_1=p$

$b_2=11$

$b_3=13$

$\vdots$

$b_n=2n+7$

$\therefore\ 10\times11+70=\boxed{180}$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

$f-g=x^2(ax+b)$

$f(0)=0 \rightarrow g(0)=0$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)\ (k\neq0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

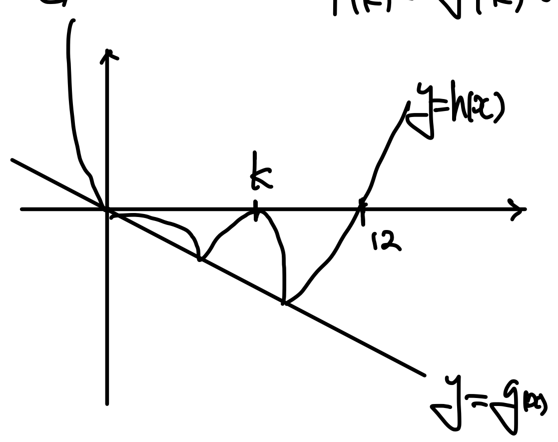
$h(3)=-\frac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

$|f(x)|+g(x) \rightarrow y=g(x)$ 위에 $|f(x)|$을 얹자.

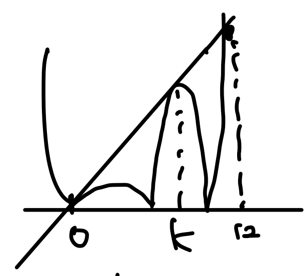
즉, $y=g(x)$을 x축으로 생각하고 $y=|f(x)|$을 그리면 됨.

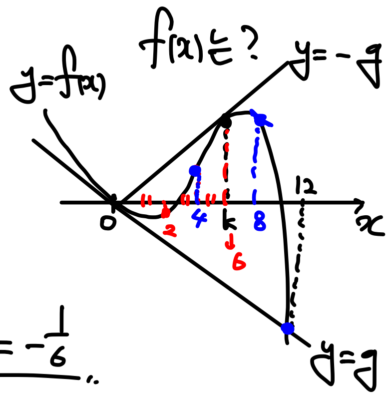
(가) $h(k)=0,\ h'(k)=0 \rightarrow x=k$에서 이봉미.

① $\quad f'(k)=g'(k)$ or $-g'(k)$ $\quad h(3)<0$ 고려.



$h-g=|f|$:





$h(3)=-|f(3)|+g(3)=f(3)+g(3)=-\frac{9}{2}$

$f+g=px(x-6)^2 \rightarrow +27p=-\frac{9}{2} \quad \therefore p=-\frac{1}{6}$

$h(6)=f(6)+g(6)=0$

$h(11)=-f(11)+g(11)$

$f-g=-\frac{1}{6}x^2(x-12) \rightarrow h(11)=-\frac{121}{6}$

$\therefore\ \boxed{121}$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

높이공식 그대로 쓰임 뿐만 아니라 직선과의 위치 관계로 식 세우는 것도 그대로 이용됨.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(4x+1)^6$ 의 전개식에서 x 의 계수는? [2점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$_6C_1 (4x)^1 \cdot (1)^5 = 24$

꼭 외워 놓자.

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(3X-1)=17$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

$B(n, p)$ 에서 평균: np

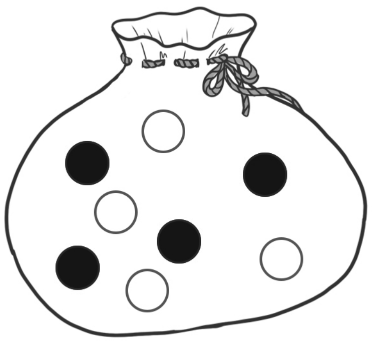
분산: npq

$E(3x-1) = 3E(x) - 1 \Rightarrow E(x) = 6, \; n = 18$

$npq = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$

25. 흰 공 4 개, 검은 공 4 개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2 개 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{51}{70}$ ③ $\frac{53}{70}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{57}{70}$



전체 가짓수: $_8C_4 = 70$

검은공 2개 → $_4C_2 \times {}_4C_2$ 36
검은공 3개 → $_4C_3 \times {}_4C_1$ + 16
검은공 4개 → $_4C_4$ + 1

53

$\frac{53}{70}$

26. 세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5 개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 135 ② 140 ③ 145 ④ 150 ⑤ 155

왜 하필 a가 3개?

aaabc → $\frac{5!}{3!} \times 3 = 60$

(+) = 150

aabbc → $\frac{5!}{2!2!} \times 3 = 90$

왜 하필 c가 1개?

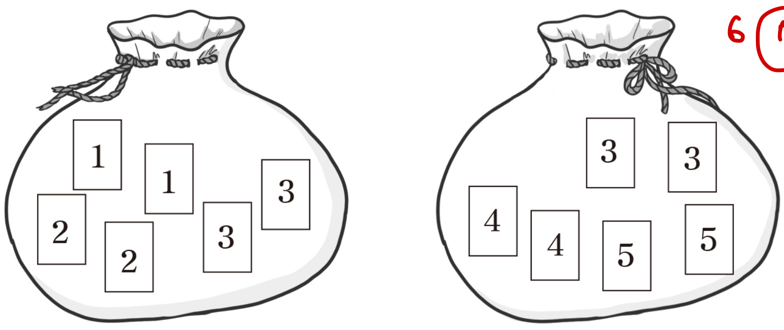
27. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 3개의 동전을 동시에 던져
> 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면
> 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고,
> 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{31}{120}$ ④ $\frac{17}{60}$ ⑤ $\frac{37}{120}$

6 7 8 9 10



A B

A주머니 선택 확률: $\frac{1}{8}$ → 두수 소수 $\boxed{\frac{9}{15}}$

2 → 1개. 3 → 4개 5 → 4개

B주머니 선택 확률: $\frac{7}{8}$ → 두수 소수 $\boxed{\frac{4}{15}}$

7 → 4개

$\frac{9}{15}$가 적용될 확률: $\frac{1}{8}$

$\frac{4}{15}$가 적용될 확률: $\frac{7}{8}$

$\frac{9}{15}\times\frac{1}{8}+\frac{4}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{37}{120}$ //

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

5.4

3.3.4

> (가) $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$ 의 값은 자연수이다.
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

64

444

① 84 ② 87 ③ 90 ④ 93 ⑤ 96

f(3)이 무엇인지에 따라 (★H3) ★이 결정됨

1 → ★=5, 2 → ★=4, 3 → ★=3, 4 → ★=2, 5 → ★=1

(1,1,1) (1,1,4) (1,2,2). (1,3,3)

(1,4,4) (1,5,5) (2,2,4)

(3,3,4) (4,4,4) (4,5,5)

$_5H_3 + {_2H_3} + {_4H_3} + {_1H_3}$

$_2H_3 + {_1H_3}$ $_2H_3 + {_2H_3}$

$_2H_3 + {_1H_3} \Rightarrow \boxed{84}$

$_7C_3 + {_4C_3} + {_6C_3} + {_5C_3}$

$+ {_4C_3} + 2 + {_4C_3} + {_4C_3} + {_4C_3}$

+4+4

$\Rightarrow 35+4+20+10+4+2+4$

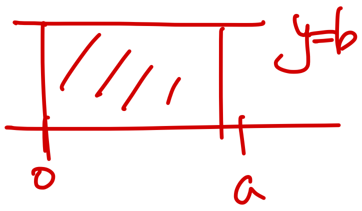
$69+18 \Rightarrow 87$ //

단답형

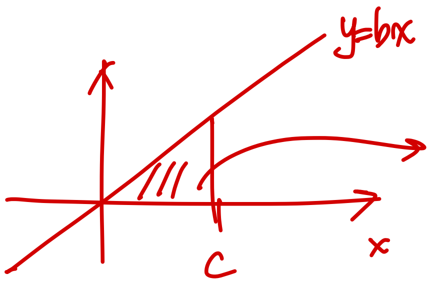
29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \leq X \leq a$, $0 \leq Y \leq a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $0 \leq x \leq a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x) = b,\quad g(x) = \mathrm{P}(0 \leq X \leq x)$$ $g(x)=bx$

이다. $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq c) = \frac{1}{2}$일 때, $(a+b) \times c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점] $\boxed{5}$



$ab=1$



$\frac{1}{2}bc^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}a^2b = 1$

$a=2,\ b=\frac{1}{2}$

$c^2 = 2$

$(a+b)c^2 = \frac{5}{2} \times 2 = 5$

30. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n\,(1 \leq n \leq 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{27}$

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

조건부확률:

$a_1=a_4=1$

합 4 > 3 … 1.1.2 / 1.1.1 … 3가지

5 > 3 … 1.2.2. / 1.1.1 … 3가지

6 > 3 … 2.2.2 / 1.1.1 … 1가지

5 > 4 … 1.2.2. / 1.1.2 … 9가지

6 > 4 … 2.2.2. / 1.1.2 … 3가지

6 > 5 … 2.2.2. / 1.2.2 … 3가지

1.□□, □□ → 2

1. 2.2. 1.1.1 → 1, 0

1.2.2, 1.□□ → 2

$$\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2}{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 9\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5}$$

$$\Rightarrow \frac{4+4+16}{6+12+8+72+48+96} = \frac{24}{242} = \frac{12}{121}$$

$p+q=133$

* 확인 사항
  - ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$\frac{5n^2+5}{\sqrt{\ }+n^2} = \frac{5}{2}$

24. $\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\int_1^e 3\cdot\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\frac{3}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$

$=\boxed{\frac{3}{2}}$

25. 매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t\ ,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\left.\frac{6(t+1)e^{t-1}}{2t\ln t+t+3}\right|_{t=1}=\frac{6\times 2}{4}=3$$

26. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$f(g(x))=x$

$f(2)=2$ $f'(2)=\frac{1}{3}\rightarrow g'(2)=3$

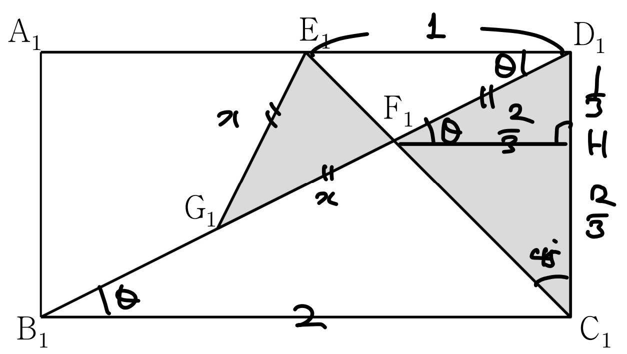
$$h'(2)=\frac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{f(2)^2}=\frac{6-\frac{2}{3}}{4}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

https://orbi.kr/00056412110 _ 무한등비급수의 승부처 빼다 박았다....

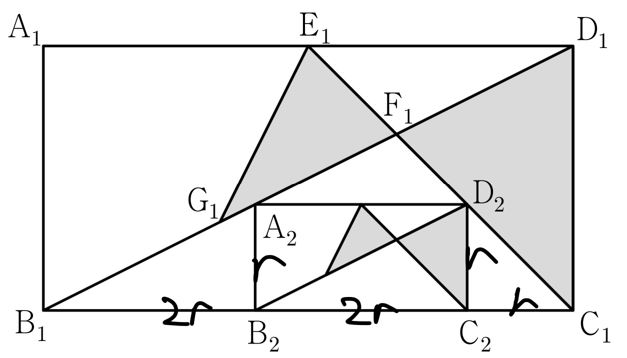
27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

$\triangle D_1F_1C_1 = \frac{1}{3}$



R_2



⋮ ⋮

$5r=2 \to r=\frac{2}{5}$

① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

$\triangle E_1D_1G_1$ cos법칙 → $1^2+\left(x+\frac{\sqrt5}{3}\right)^2-2\times1\times\left(x+\frac{\sqrt5}{3}\right)\cos\theta = x^2$

$\therefore \frac{2\sqrt5}{3}x+\frac{14}{9}-\frac{4\sqrt5}{5}x-\frac{4}{3}=0$

$\frac{2\sqrt5}{15}x=\frac{2}{9} \to x=\frac{\sqrt5}{3}=\overline{F_1D_1}$

$\triangle F_1E_1G_1=\triangle E_1F_1D_1=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore S_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}}=\boxed{\frac{25}{42}}$

28. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$ → $f'(x)$는 기함수.
> (나) $f(x+2)=f(x)$ → 주기가 2 ...?

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_0^1 f(x)dx=2$일 때, $\int_0^1 f'(x)\sin2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$f'(x)$는 연속, (가),(나) → $f'(0)=0$, $f'(-1)=f'(1)=0$

$f(x)$ 주기는 2. $\cos2\pi x$ 주기는 1. → $f(x)\cos2\pi x$ 주기는 2.

$\int_{-1}^{5} f(x)\cos2\pi x\,dx = 3\times\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)\cos2\pi x}_{\text{우함수}}\,dx = 6\int_0^1 f(x)\cos2\pi x\,dx$

$\int_{-1}^{5} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{5}\{(x-2)f(x)+2f(x)\}dx=\int_{-1}^{5}2f(x)dx=12\int_0^1 f(x)dx$
$=24.$

$f(x)$는 주기함수 → f는 $x=2$ 대칭. $\therefore \int_{-1}^{5}(x-2)f(x)dx=0$

$\therefore \int_0^1 f(x)\cos2\pi x\,dx=-\frac{1}{12}$

$\int_0^1 f'(x)\sin2\pi x\,dx=-2\pi\int_0^1 f(x)\cos2\pi x\,dx=\boxed{\frac{\pi}{6}}$ 답.

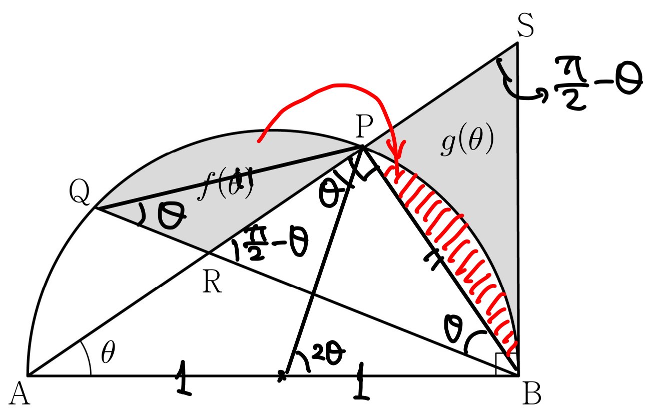
https://orbi.kr/00057435046 _ 적분 총 정리 ex. 19 , 19−1 ...!

재네 봤으면 쉽게 대칭 이용해서 풀 수 있었을 것.

단답형

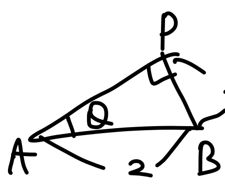
29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP = \theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



$\triangle BRP \equiv \triangle BSP$ $\therefore g(\theta) +$ ⌓ $= \triangle BRP$

$\therefore f(\theta) + g(\theta) = \triangle BPQ$



$2\theta \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\theta \cdot 2\theta \cdot \sin(\pi - 2\theta)$

$= 4\theta^3$

$\therefore \boxed{4}$

https://atom.ac/books/9686/ _ 삼극사기

이젠 안쓰면 혼자 호구 돼여... ㅎㅎ...

https://orbi.kr/00056412110 _ 무한등비급수의 승부처

여기에서 서술했던 활꼴 옮겨 붙이기 역시 출제됨...!

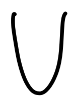
30. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

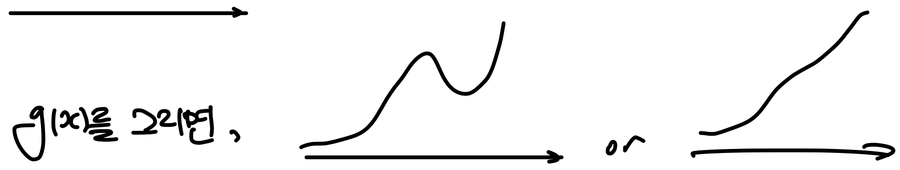
> (가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
> (나) $\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$) [4점]

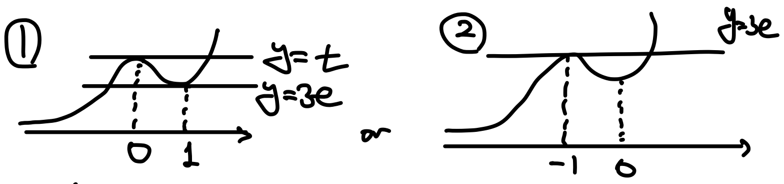


$y = k > 0 \rightsquigarrow$ 근의 합 $= h(k)$

$g(x)$를 그리면,



(가)를 생각해보면,



① $f(1)e = 3e$ $f(1) = 3$

$g'(x) = px(x-1)e^x$

$g(x) = p(x^2 - 3x + 3)e^x$

$f(1) = pe = 3e$ $p = 3$ (X)

② $f(-1) \times \frac{1}{e} = 3e$

$g'(x) = px(x+1)e^x$

$g(x) = p(x^2 - x + 1)e^x$

$f(-1) = 3e^2 = 3p$

$p = e^2$

$g(x) = e^{x+2}(x^2 - x + 1)$

$g(-6) \times g(2) = 43 \times 3 = \boxed{129}$

* 확인 사항
  - ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2m-1,\ 3m+1)$, $\vec{b}=(3,\ 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4(2m-1)=3m+1$

$\underline{m=1}$

24. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$y_1 y = \frac{4}{2}(x+x_1)$

$\downarrow$

$6y = 2x+18$ $\underline{x_{준선}=-1}$

$x=-1 \rightarrow \underline{y=\frac{8}{3}}$

25. 좌표평면에서 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(3,\ 3)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\bullet(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

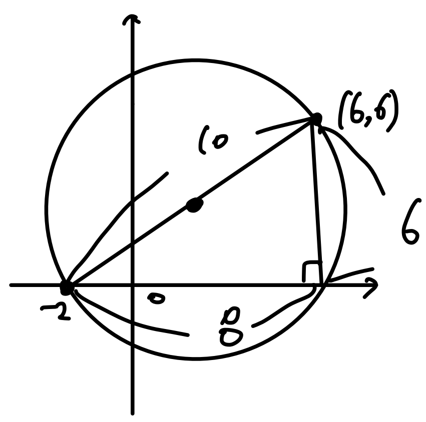
을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

$C(6,6)$ $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

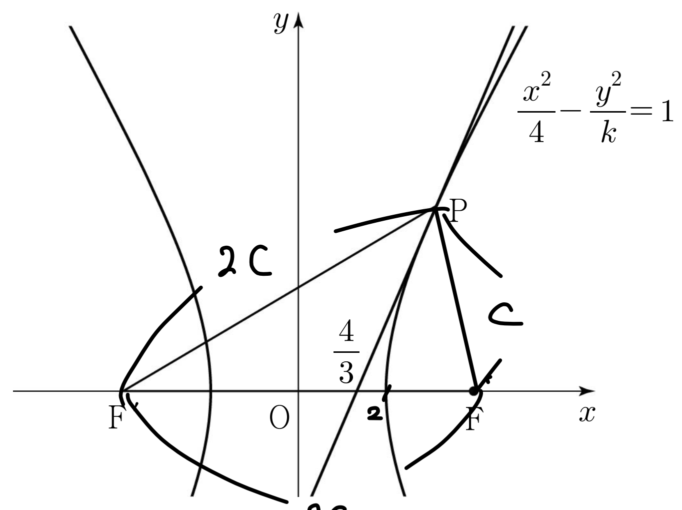
직교



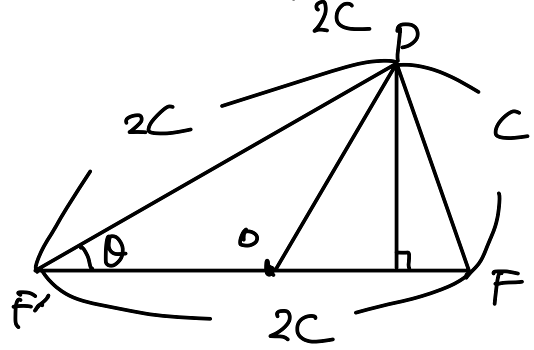
$\therefore \boxed{10\pi}$

26. 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\dfrac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



$c^2=k+4$



$\cos\theta=\dfrac{2^2+2^2-1}{2\cdot2\cdot2}=\dfrac{7}{8}$ $\therefore P_x=\dfrac{3}{4}c,\ P_y=\dfrac{\sqrt{15}}{4}c$

$\dfrac{xx_1}{4}-\dfrac{yy_1}{k}\Rightarrow\dfrac{3c}{16}x-\dfrac{\sqrt{15}}{4k}y=1$

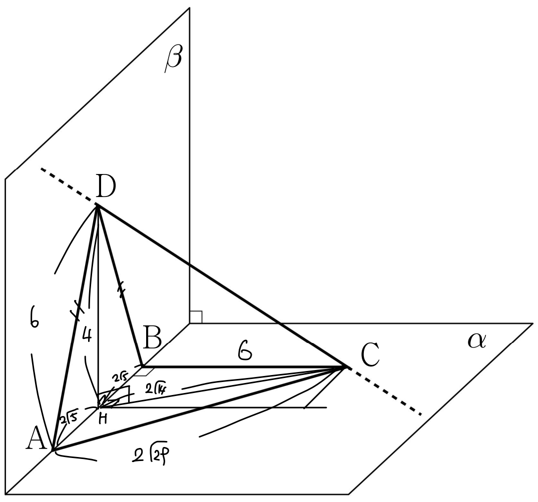
$(\frac{4}{3},0)$ 대입: $c=4$

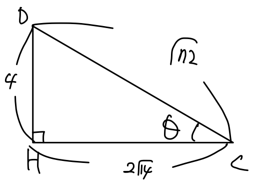
$k=\boxed{12}$

feat. 종이접기
#2021년 10월 21번 !!

27. 공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6$인 점 C와 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=6$인 점 D가 있다. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

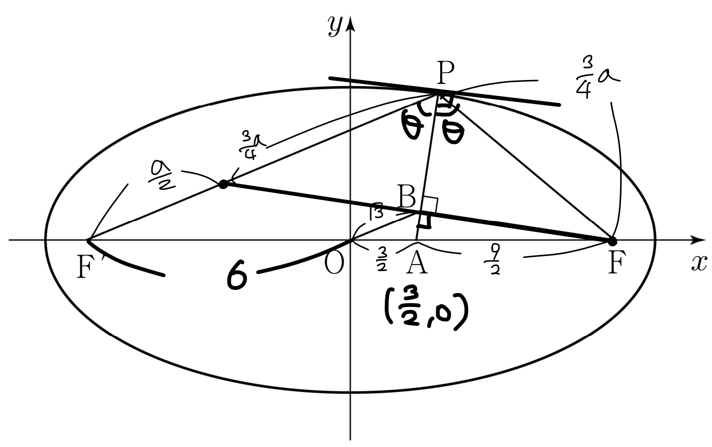
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{31}}{6}$





$\cos\theta = \frac{2\sqrt{7}\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{3}}$

28. 그림과 같이 F(6, 0), F′(−6, 0)을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 $\angle FPA=\angle F'PA$를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{OB}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.) [4점]



① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$a^2=b^2+36$

$6+\frac{3}{2} : 6-\frac{3}{2} = 5:3 = \overline{PF'} : \overline{PF}$

$\frac{5}{4}a$ $\quad$ $\frac{3}{4}a$

$= 5\sqrt{3}$

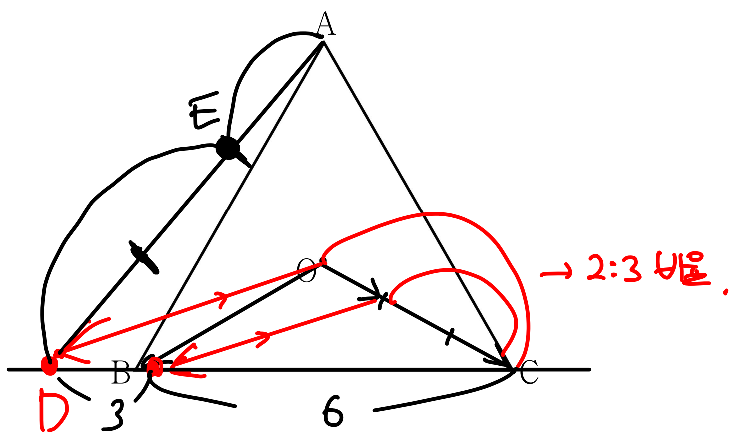
$\therefore a=4\sqrt{3}$

$b=2\sqrt{3}$

$\boxed{24}$

단답형

29. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ 를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{OA}|$ 를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR}$ 의 최댓값이 $p + q\sqrt{93}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

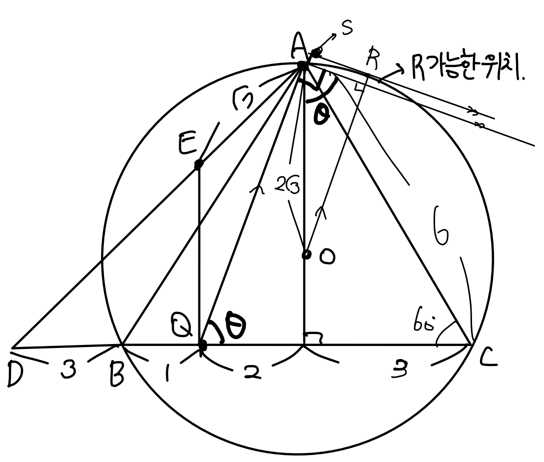


$2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{3}$

$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = 3 \times \frac{2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}}{3}$ → $\overline{DA}$ 의 3등분점. ↓ E라하자.

최소일려면

E → $\overline{CD}$ 수선의 발이 P.



Q(0, 0)

A(2, 3√3)

Cos법칙 at △CAQ

$\overline{QA}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{QA} = \sqrt{31}$

$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR} = \overline{QA} \times (\overline{QA} + \overline{AS})$

$\overline{AS} = \overline{OR} - \overline{OA}\sin\theta = 2\sqrt{3} - \frac{18}{\sqrt{31}}$

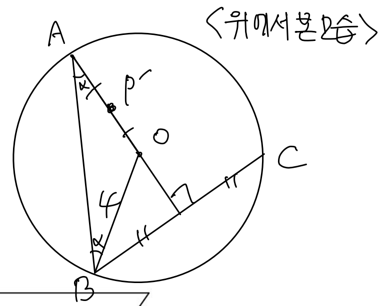
$\therefore 31 + 2\sqrt{93} - 18 = 13 + 2\sqrt{93}$

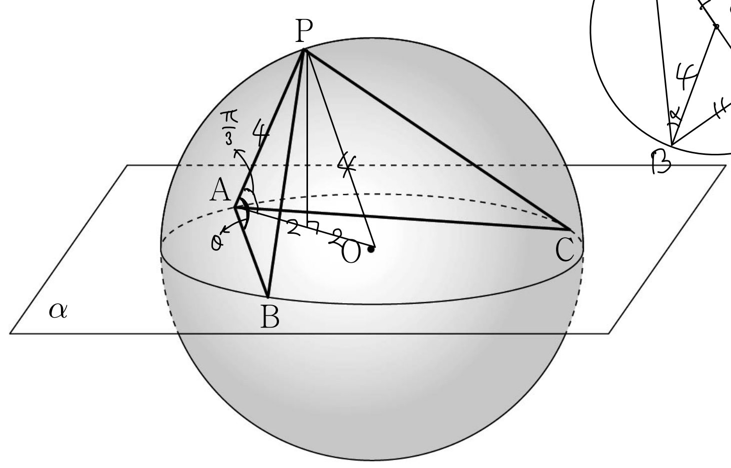
$\boxed{15}$

30. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

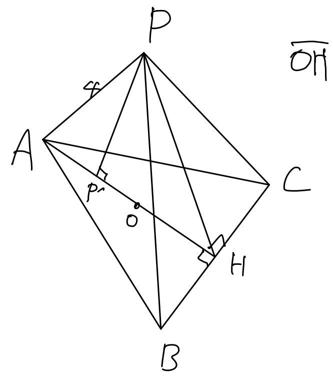
> (가) $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$
>
> (나) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB) = \frac{\sqrt{10}}{8}$ 일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30 \times S^2$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}$) [4점]





$\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{8}$

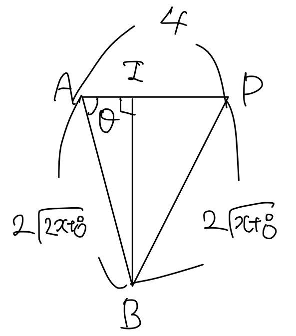


△PAB와 △PAC는 합동.

$\overline{OH} = x$ → $\overline{BH} = \sqrt{16 - x^2}$, $\overline{AH} = x + 4$

$\overline{AB} = \sqrt{8x + 32} = 2\sqrt{2x + 8}$, $\overline{PH} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$

$\overline{PB} = 2\sqrt{2x + 8}$



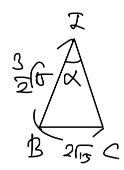
$\frac{\sqrt{10}}{8} = \frac{8x + 32 + 16 - 4x - 32}{2 \times 4 \times \sqrt{8x + 32}}$

$\sqrt{10} \times \sqrt{8x + 32} = 4x + 16$

$\sqrt{5} \times \sqrt{x + 4} = x + 4$

$\therefore \sqrt{x + 4} = \sqrt{5}$ $x = 1$.

$\overline{BI} = 2\sqrt{10}\sin\theta = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$



$\cos\alpha = \frac{\frac{p}{4} \times 15 \times 2 - 4 \times 15}{2 \times \frac{p}{4} \times 15}$

$= \boxed{\frac{1}{p}}$

* 확인 사항 $\triangle PAB = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$ $\therefore P \times 15 \times \frac{1}{p^2} \times 30 = 150$ 답.

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.