미분 - 그래프 모음

※ 다음 각 방정식을 만족하는 점 $(x,\ y)$의 자취의 개형을 그리시오.

1. $y = x^4 - 4x^3 + 3$

2. $y = x^3(x-5)^2$

3. $y = x^4(x-3)^2 + 2$

4. $y = x^4(x-7)^3 + 5$

5. $y = x^3(x-8)^5 + 4$

6. $y = \dfrac{1}{x-1}$

7. $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$

8. $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-5}$

9. $y = 3 + \dfrac{1}{x-1}$

10. $y = 2 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$

11. $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

12. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

13. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

14. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-3)^2}$

15. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{2x-10}{(x-5)^2+1}$

17. $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

18. $y = x + \dfrac{1}{x}$

19. $y = x - \dfrac{1}{x}$

20. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

21. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$

22. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-4}$

23. $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$

24. $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$

25. $y = 2\sqrt{x} - x$

26. $y = x\sqrt{4-x^2}$

27. $y = x + \sqrt{1-x^2}$

28. $y = x - \sqrt{1-x^2}$

29. $y = x + \sin x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$

30. $y = x + 2\sin x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$

31. $y=(1+\cos x)\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

32. $y=e^{-x^2}$

33. $y=e^{\frac{1}{x}}$

34. $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

35. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

36. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

37. $y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

38. $y = \dfrac{e^x}{x}$

39. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

40. $y = \dfrac{e^x}{x^3}$

41. $y=\frac{e^{x}}{x^{4}}$

42. $y=\frac{e^{x}}{x^{n}}$ (단, n은 홀수인 자연수)

43. $y=\frac{e^{x}}{x^{n}}$ (단, n은 짝수인 자연수)

44. $y=2xe^{x^{2}}$

45. $y=-2xe^{-x^{2}}$

46. $y=\ln(x^2+1)$

47. $y=x\ln x$

48. $y=x\ln x-x$

49. $y=x\ln x-2x+1$

50. $y=x^2\ln x$

51. $y=x^3\ln x$

52. $y=x^n\ln x$ (n은 2이상의 자연수)

53. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

54. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

55. $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$ (단, n은 자연수)

56. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

57. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

58. $y = \dfrac{x^n}{\ln x}$ (단, n은 2이상의 자연수)

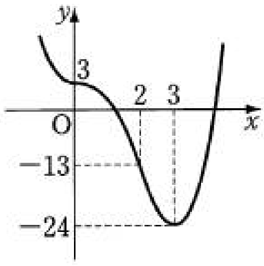
59. $y = e^x \sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$

60. $y = x^x \ (x > 0)$

61. $y = x^{\frac{1}{x}} \ (x > 0)$

미분 - 그래프 모음 -해답-

1. $y=x^4-4x^3+3=x^3(x-4)+3$ ⇨ 3 : 1



$y'=4x^2(x-3)$, $y''=12x(x-2)$

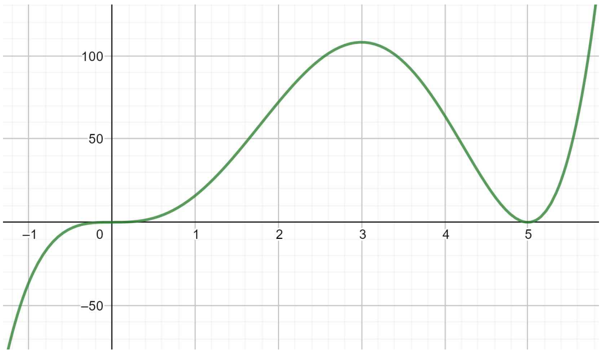
$y'=0$에서 $x=0,\ 3$

$y''=0$에서 $x=0,\ 2$

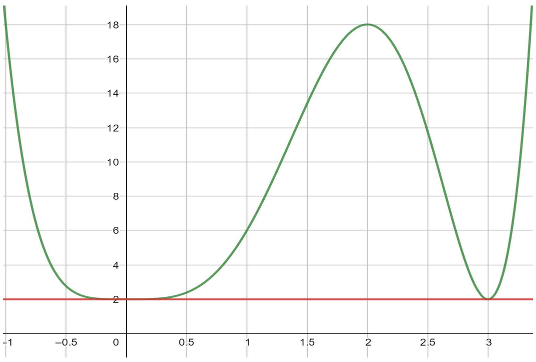
증감을 조사하면

극소점 : $(3,\ -24)$, 변곡점 : $(0,\ 3)$, $(2,\ -13)$

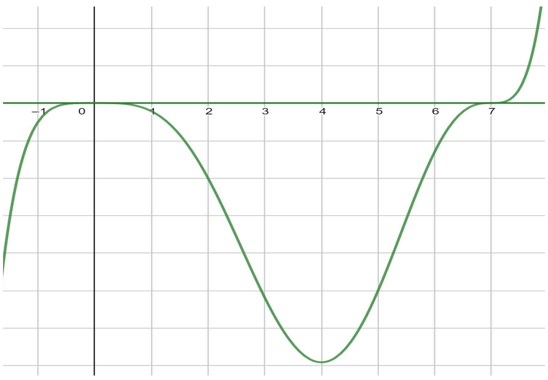
2. $y=x^3(x-5)^2$ ⇨ 3 : 2를 이용한다.



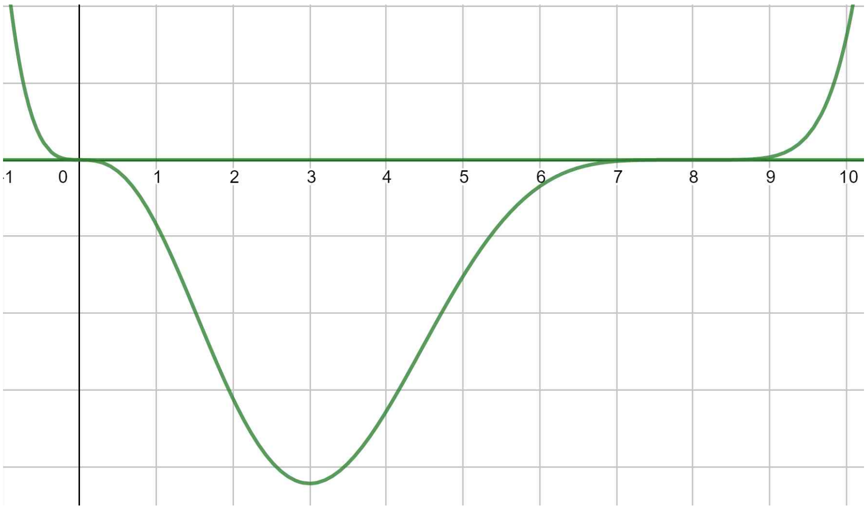
3. $y=x^4(x-3)^2+2$ ⇨ 4 : 2 = 2 : 1과 평행이동을 이용한다.



4. $y=x^4(x-7)^3+5$ ⇨ 4 : 3과 평행이동을 이용한다.



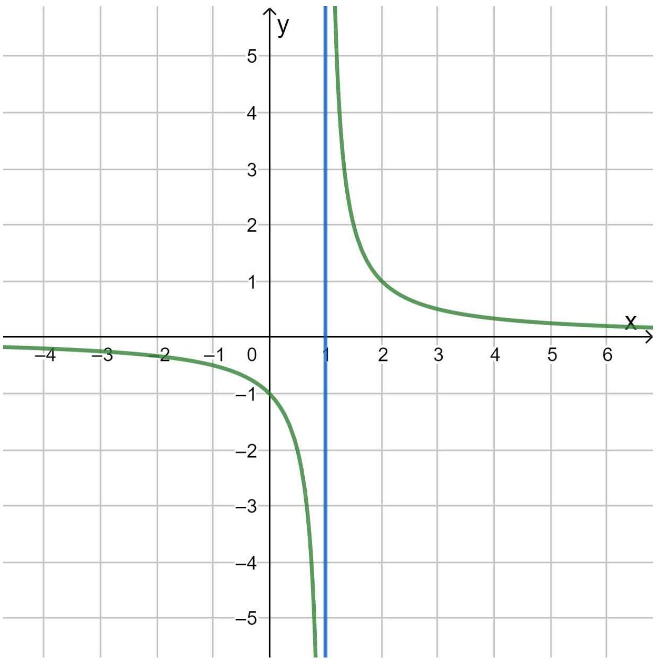
5. $y = x^3(x-8)^5 + 4$ ⇨ 3 : 5와 평행이동을 이용한다.



6. $y = \dfrac{1}{x-1}$ ⇨ 극한을 이용하여 개형을 파악한다.

$y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$ ⇨ $x < 1$, $x > 1$일 때, 각각 감소

$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ ⇨ $x < 1$일 때 위로 볼록, $x > 1$일 때 아래로 볼록

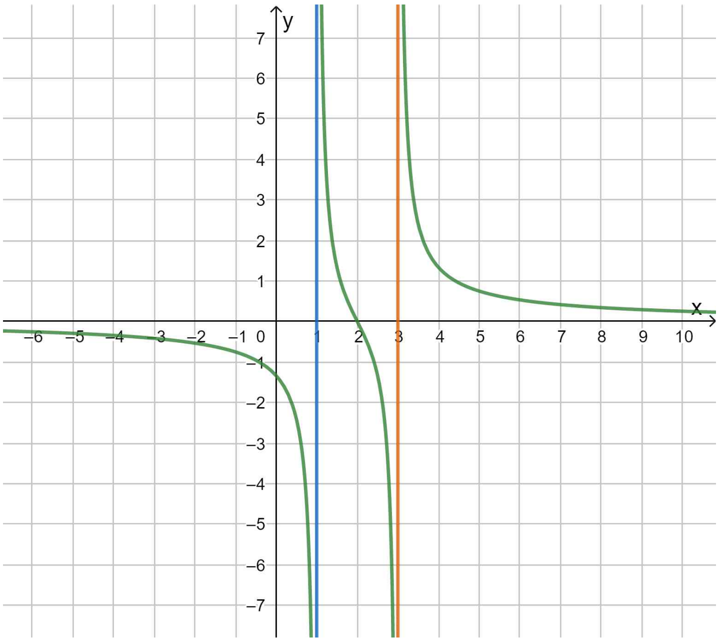


7. $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}$ ⇨ 극한을 이용하여 개형을 파악한다.

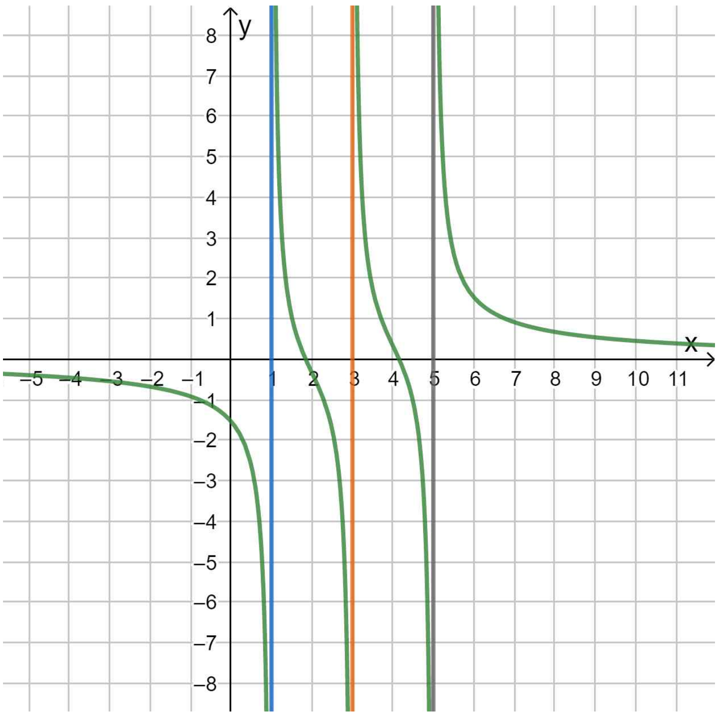
$y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2}<0$

$y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x-3)^3}=\dfrac{2\{(x-1)^3+(x-3)^3\}}{(x-1)^3(x-3)^3}$

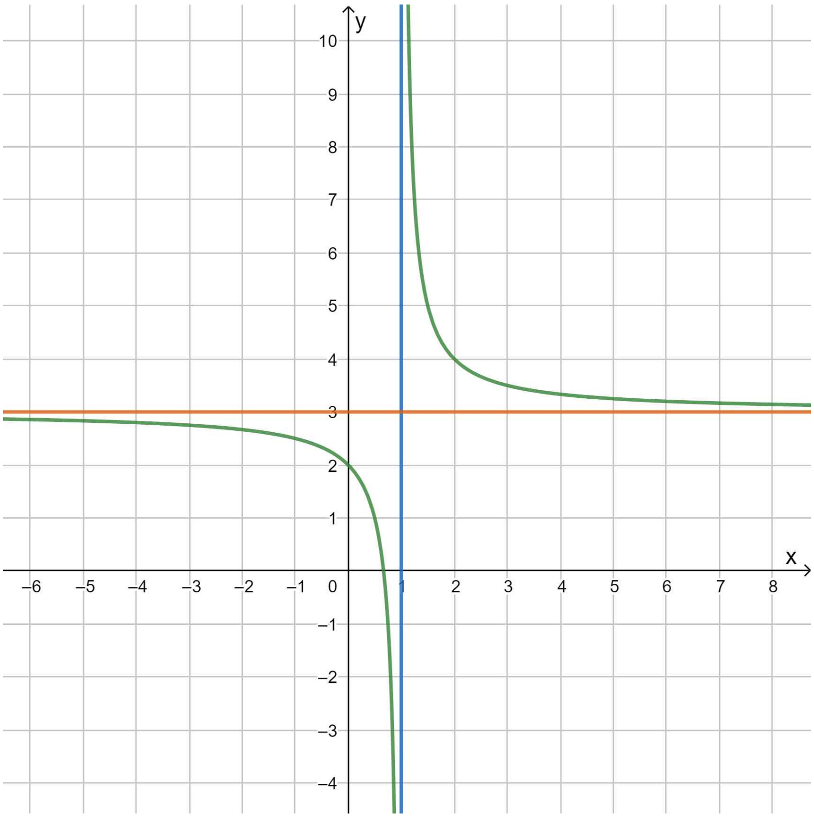
⇨ $x=1,\ 2,\ 3$ 을 경계로 y'' 의 부호가 변한다.



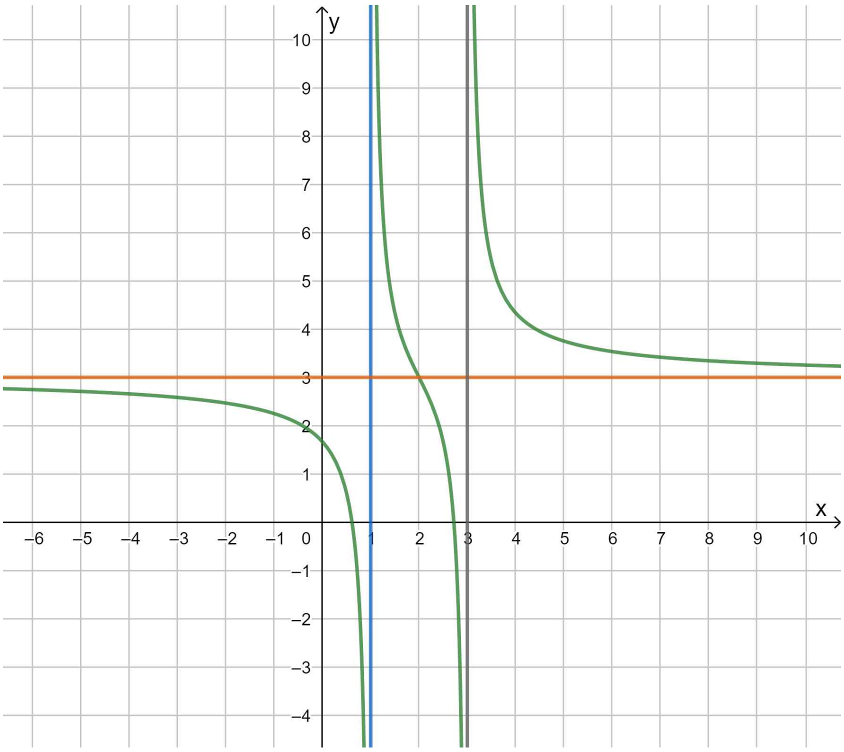
8. $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-5}$ ⇨ 극한을 이용하여 개형을 파악한다.



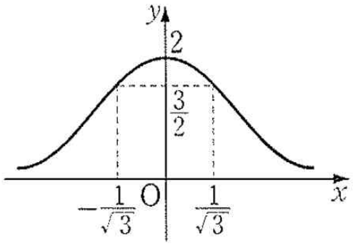
9. $y = 3 + \dfrac{1}{x-1}$ ⇨ 평행이동을 이용한다.



10. $y = 2 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$ ⇨ 평행이동을 이용한다.



11. $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ ⇨ 우함수



$y'=\dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}$

$y'=0$에서 $x=0$

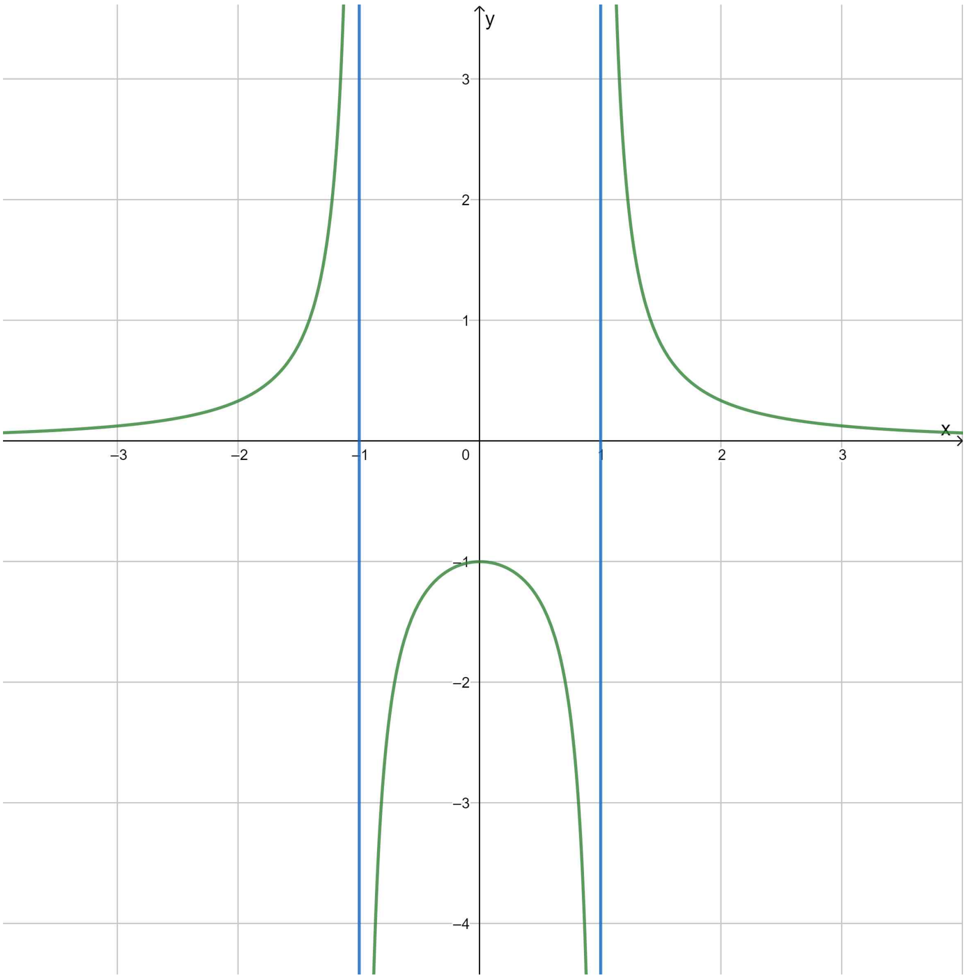
$y''=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

증감과 요철을 조사하면

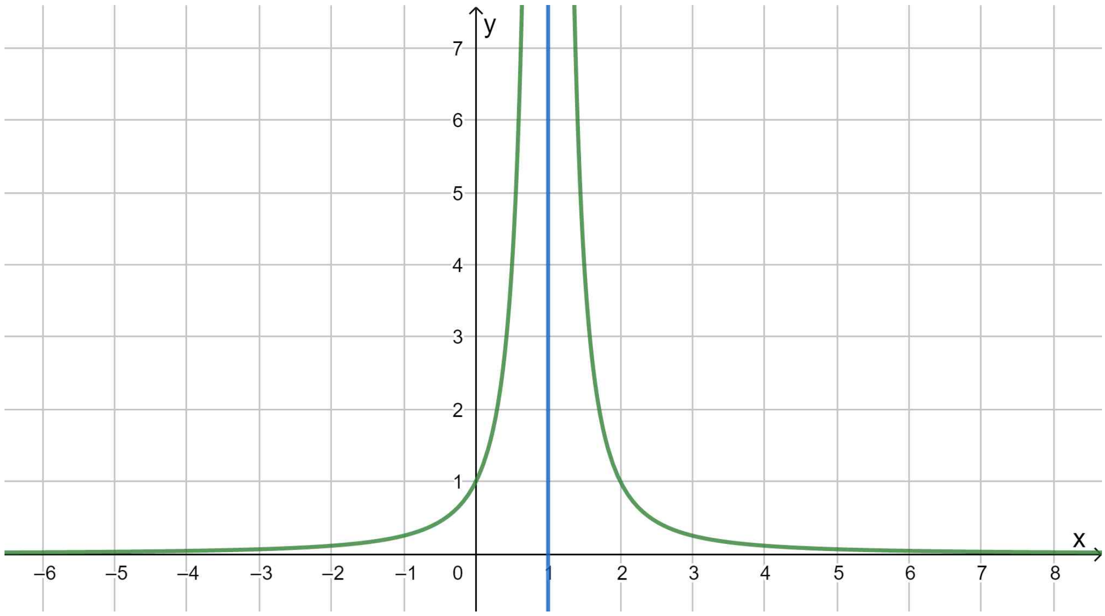
극대점 : $(0,\ 2)$, 변곡점 : $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3}{2}\right)$

12. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ ⇨ 우함수

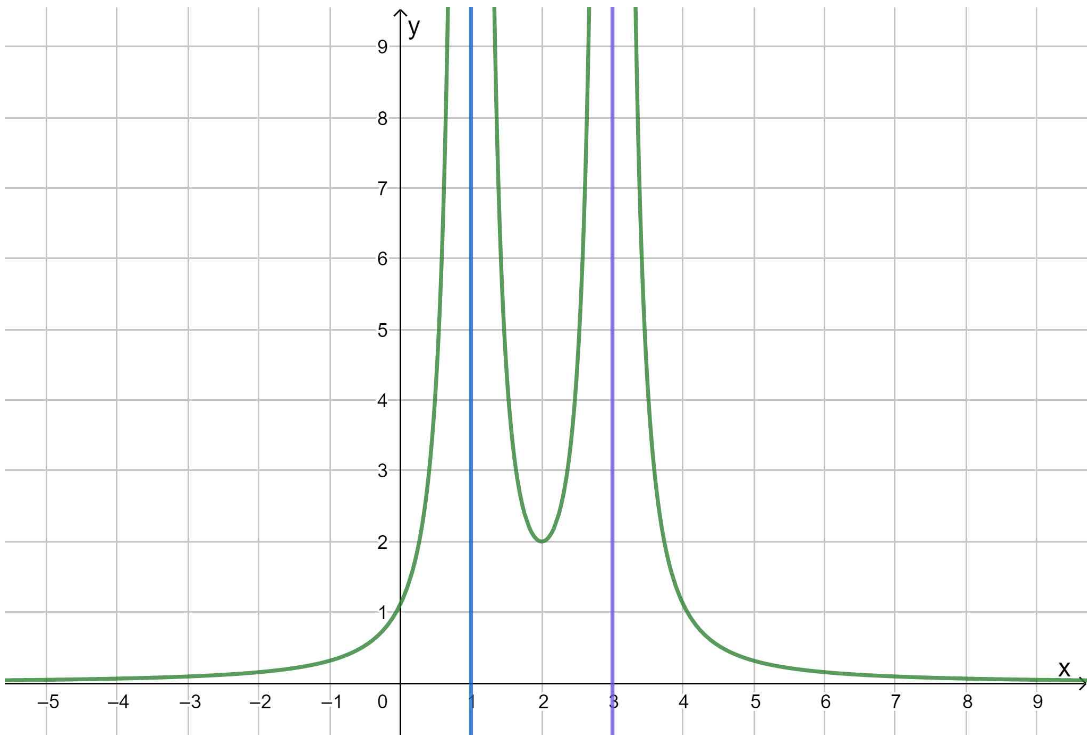
$y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}=0$에서 $x=0$ (극대)



13. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ⇨ 극한을 이용하여 개형을 파악한다.



14. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2}$ ⇨ 극한을 이용하여 개형을 파악한다.



15. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ⇨ 기함수

$y'=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

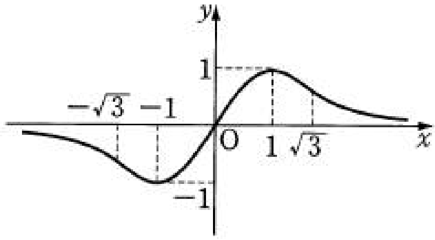
$y'=0$에서 $x=-1,\ 1$

$y''=0$에서 $x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

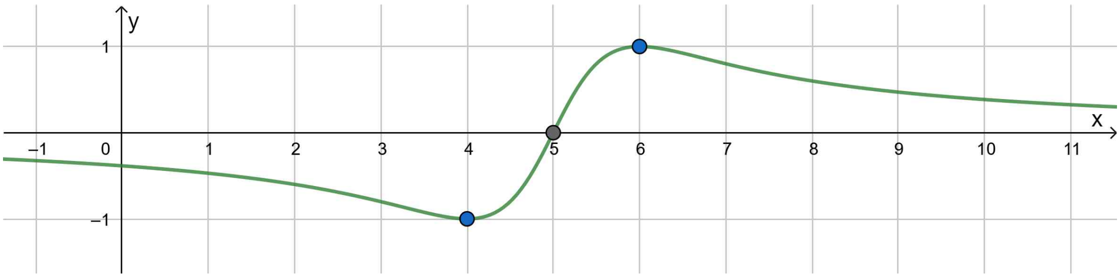
극대점 : $(1,\ 1)$, 극소점 : $(-1,\ -1)$

변곡점 : $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\lim_{x\to\infty} y=0$, $\lim_{x\to-\infty} y=0$



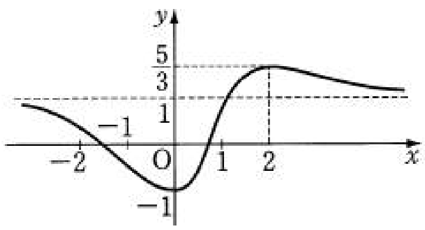
16. $y=\dfrac{2x-10}{(x-5)^2+1}$ ⇨ $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$를 x축으로 5만큼 평행이동



17. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ ⇨ 판별식을 이용하여 치역을 구할 수 있다.

$y'=\dfrac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\dfrac{2x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↘	-1	↗	$\frac{5}{3}$	↘	1



※ $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$에서 $yx^2-yx+y=x^2+x-1$

$(y-1)x^2-(y+1)x+(y+1)=0$

$D=(y+1)^2-4(y-1)(y+1)=(y+1)(5-3y)\ge 0$이므로 $-1\le y\le \dfrac{5}{3}$

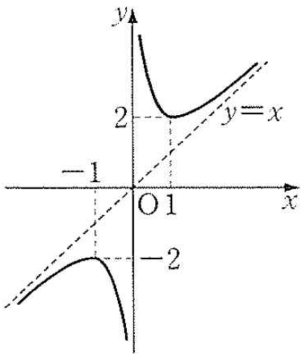
18. $y = x + \frac{1}{x}$ ⇨ 기함수

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$

$y' = 0$에서 $x = -1,\ 1$

극대점 : $(-1,\ -2)$, 극소점 : $(1,\ 2)$

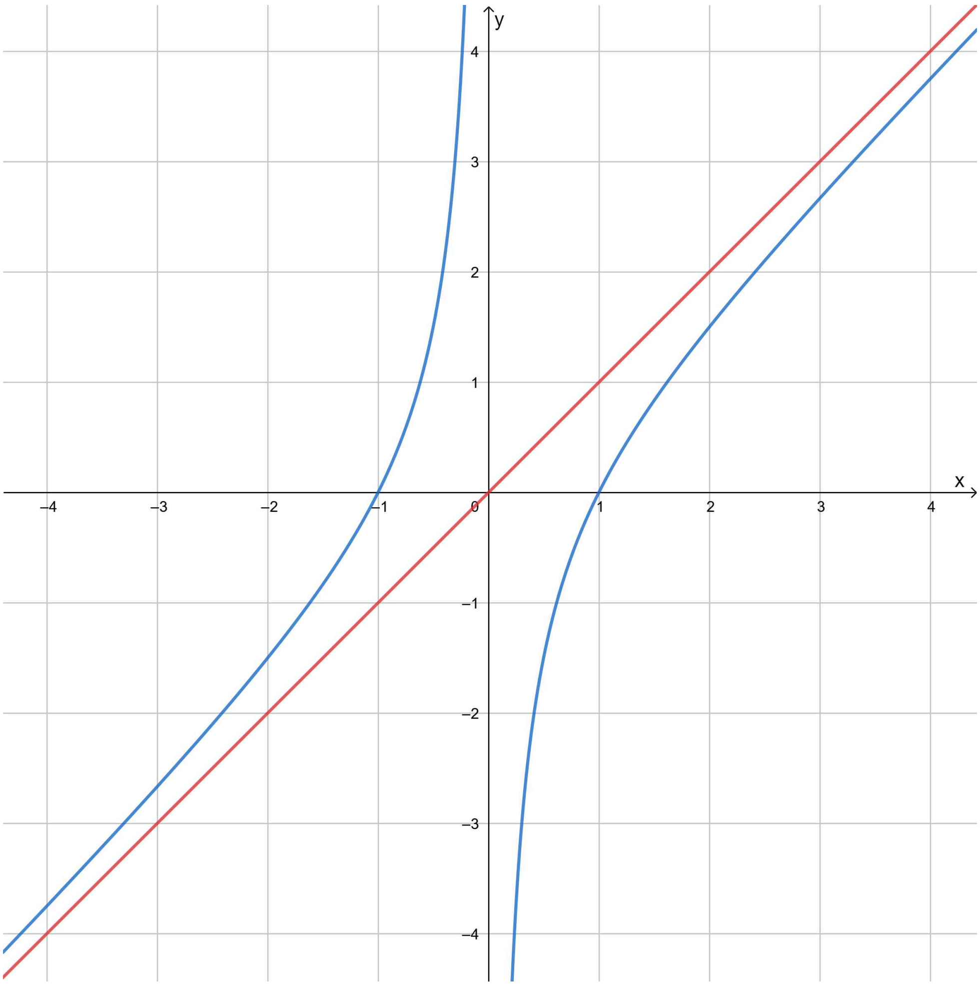
점근선 : $x = 0$, $y = x$



19. $y = x - \frac{1}{x}$ ⇨ 기함수

$y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$, $y'' = -\frac{2}{x^3}$

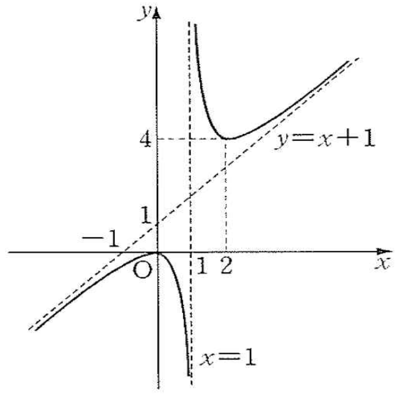
점근선 : $x = 0$, $y = x$



20. $y=\dfrac{x^2}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$ ⇨ $y=x+\dfrac{1}{x}$를 x축으로 1, y축으로 2만큼 평행이동

$y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$에서 $y'=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	−	없음	−	0	+
y''	−	−	−	없음	+	+	+
y	↗	0	↘	없음	↘	4	↗



$\lim_{x\to1-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1+}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty$이므로

직선 $x=1$은 점근선이다.

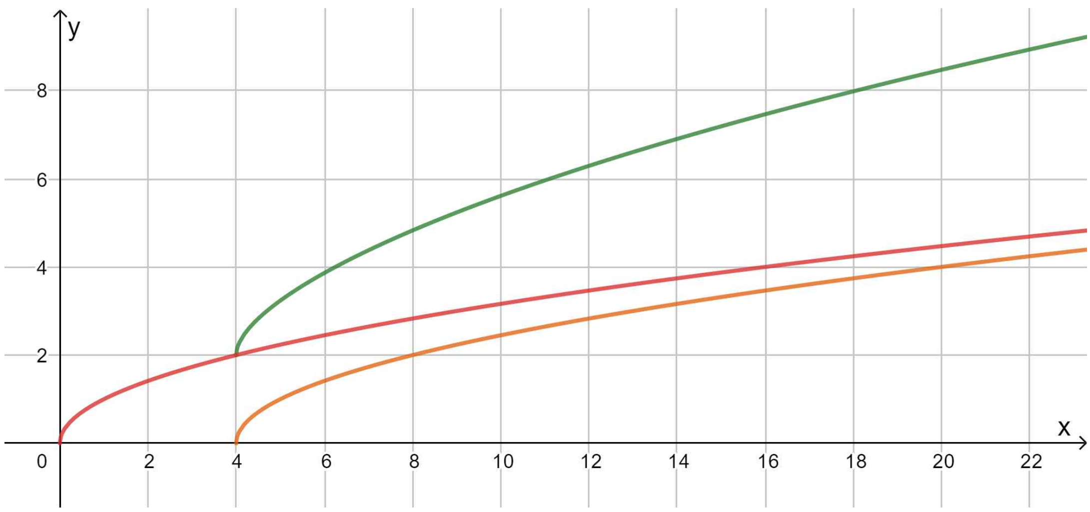
또, $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$에서 $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$이므로 직선 $y=x+1$도 점근선이다.

21. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$ $(x\ge4)$ ⇨ $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x-4}$의 그래프를 이용한다.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-4}}>0$ ⇨ 증가함수, $y\ge2$

$y''=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{(x-4)\sqrt{x-4}}\right)<0$ ⇨ 위로 볼록

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})=\infty$

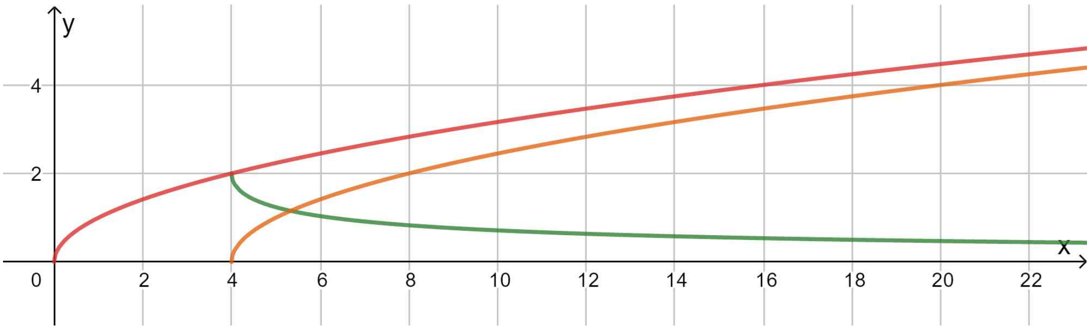


22. $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-4}$ $(x\ge 4)$ ⇨ $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x-4}$ 의 그래프를 이용한다.

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-4}}<0$ ⇨ 감소함수, $0<y\le 2$

$y''=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{(x-4)\sqrt{x-4}}\right)>0$ ⇨ 아래로 볼록

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}=0$



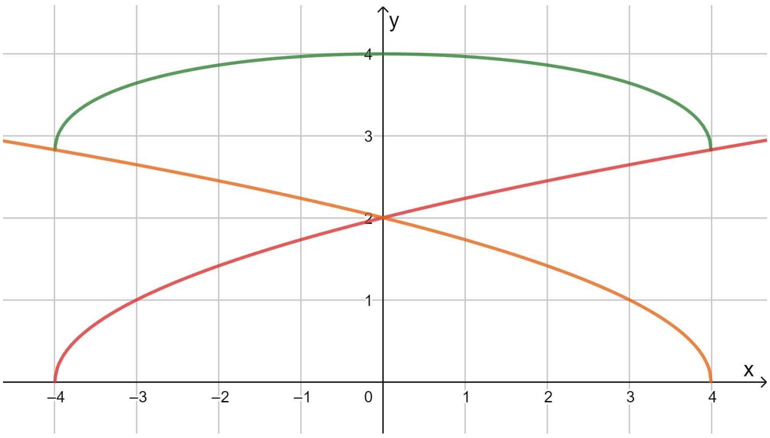
23. $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ $(-4\le x\le 4$, 우함수$)$

⇨ $y=\sqrt{4+x}$, $y=\sqrt{4-x}$ 의 그래프를 이용한다.

$y'=\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2\sqrt{16-x^2}}$

⇨ $x=0$에서 극대(최대), $2\sqrt{2}\le y\le 4$

$y''=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4+x)\sqrt{4+x}}+\frac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}}\right)<0$ ⇨ 위로 볼록



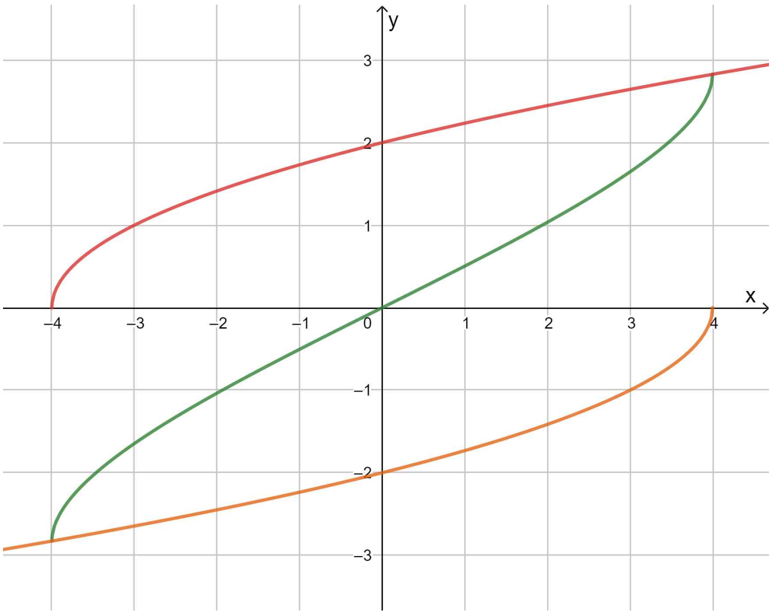
24. $y=\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}$ $(-4\leq x\leq 4$, 기함수)

⇨ $y=\sqrt{4+x}$, $y=-\sqrt{4-x}$ 의 그래프를 이용한다.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0$ ⇨ 증가함수, $-2\sqrt{2}\leq y\leq 2\sqrt{2}$

$y''=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(4+x)\sqrt{4+x}}-\dfrac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}}\right)=\dfrac{(\sqrt{4+x})^3-(\sqrt{4-x})^3}{4(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$

⇨ $x<0$일 때 위로 볼록, $x>0$일 때 아래로 볼록



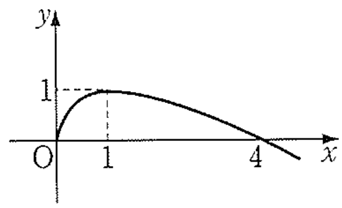
25. $y=2\sqrt{x}-x$ ⇨ $y=\sqrt{x}(2-\sqrt{x})$

$y'=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $y''=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}<0$

$y'=0$에서 $x=1$ ⇨ 극대점 : $(1,\ 1)$

따라서 증감 및 곡선의 오목, 볼록을 조사하면 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↱	1	↴	$-\infty$



※ $\lim_{x\to 0+} y'=\infty$ 이므로 그래프는 원점에서 y축에 접한다.

26. $y = x\sqrt{4-x^2}$ ⇨ 기함수

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ 에서 $-2 \le x \le 2$ 이고

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{4-x^2} - (4-2x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

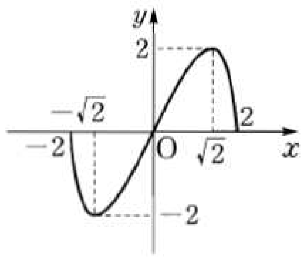
$$= \frac{-4x(4-x^2) + x(4-2x^2)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x^3-12x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x) = 0$에서 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$ ⇨ 극대점 : $(\sqrt{2},\ 2)$, 극소점 : $(-\sqrt{2},\ -2)$

$f''(x) = 0$에서 $x = 0$ ($\because\ -2 \le x \le 2$) ⇨ 변곡점 : $(0,\ 0)$

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0



따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

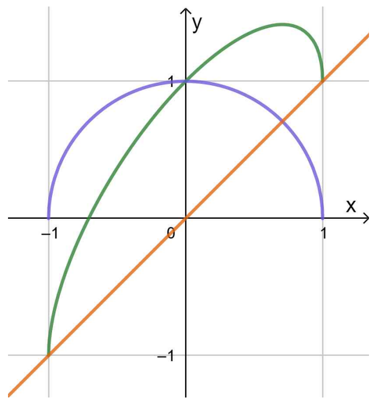
27. $y = x + \sqrt{1-x^2}$ ⇨ $y = x$, $y = \sqrt{1-x^2}$ 을 이용하여 그릴 수 있다.

$y = x + \sqrt{1-x^2}$ 에서

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

이므로 주어진 함수의 증감을 표로 나타내면

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	-1	↗	극대	↘	1

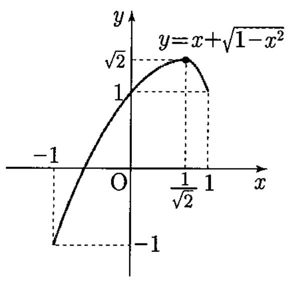


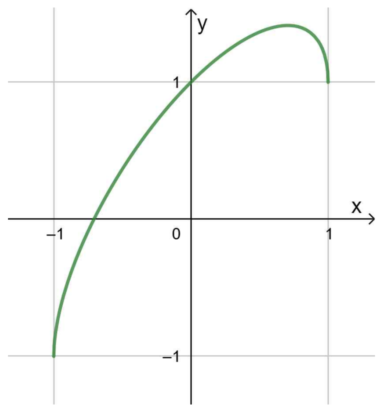
위의 증감표로부터

극대점은 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right)$,

극소점, 변곡점은 없다.

따라서, $y = x + \sqrt{1-x^2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



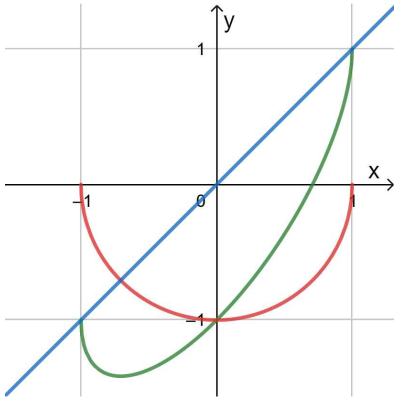


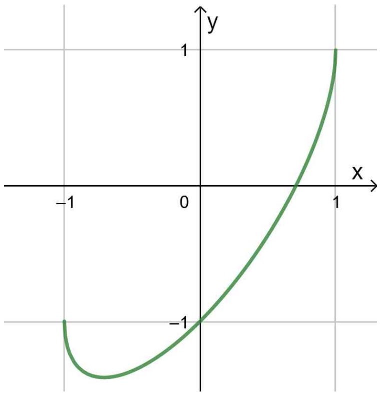
28. $y = x - \sqrt{1-x^2}$ ⇨ $y = x$, $y = -\sqrt{1-x^2}$ 을 이용하여 그릴 수 있다.

$y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$에서 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (극소)

$y'' = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$이므로 아래로 볼록

※ $y = x + \sqrt{1-x^2}$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 함수이다.





29. $y = x + \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$

$f'(x) = 1 + \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0$에서 $\cos x = -1$

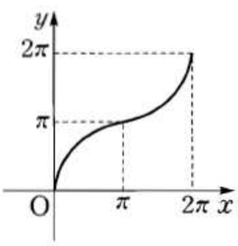
$\therefore$ $x = \pi$ ($\because$ $0 \le x \le 2\pi$)

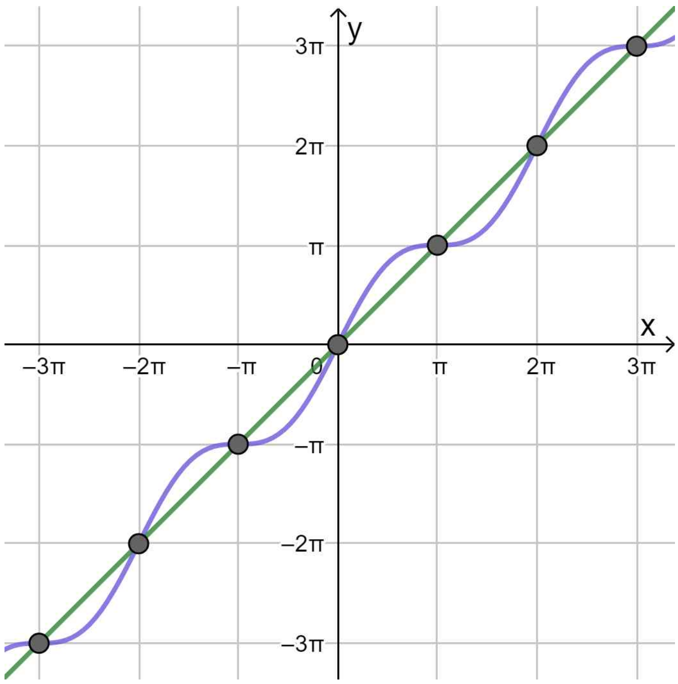
$f''(x) = 0$에서 $\sin x = 0$

$\therefore$ $x = 0, \pi, 2\pi$ ($\because$ $0 \le x \le 2\pi$)

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	π	↗	2π





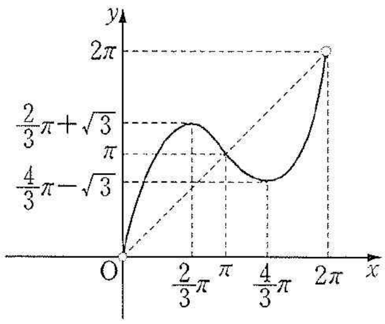
30. $y = x + 2\sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$

$y' = 1 + 2\cos x = 2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right), \ y'' = -2\sin x$

$0 < x < 2\pi$일 때, $y' = 0$에서 $x = \frac{2}{3}\pi, \ \frac{4}{3}\pi$이고 $y'' = 0$에서 $x = \pi$

따라서 증감과 요철을 조사하면 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	(0)	↗	극대	↘	변곡	↘	극소	↗	(2π)



극대점 : $\left(\frac{2}{3}\pi, \ \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$, 극소점 : $\left(\frac{4}{3}\pi, \ \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

변곡점 : $(\pi, \ \pi)$

31. $y = (1 + \cos x)\sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$

$y' = -\sin^2 x + (1 + \cos x)\cos x = \cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

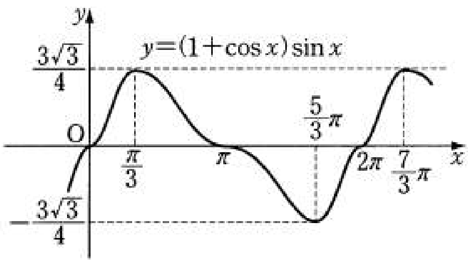
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	극대	↘	0	↘	극소	↗	0

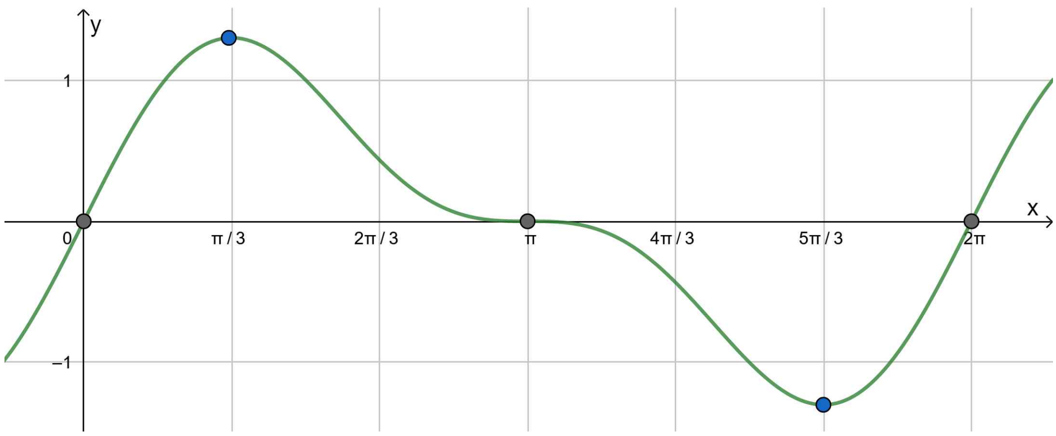
$y' = 0$에서 $\cos x = -1, \ \frac{1}{2}$

$0 \le x \le 2\pi$에서 $x = \pi, \ \frac{\pi}{3}, \ \frac{5}{3}\pi$

$$\left.\begin{aligned} &\text{극댓값} : y_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &\text{극솟값} : y_{x=\frac{5}{3}\pi} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}\right\}$$

따라서 함수의 그래프는 그림과 같다.





32. $y=e^{-x^2}$ ⇨ 우함수

$y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

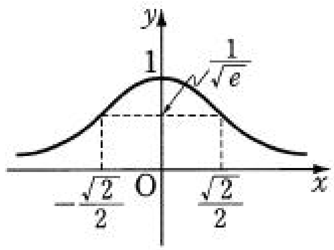
극대점 : $(0,\ 1)$

변곡점 : $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{x^2}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{x^2}} = 0$

따라서 그래프의 개형은 그림과 같다.

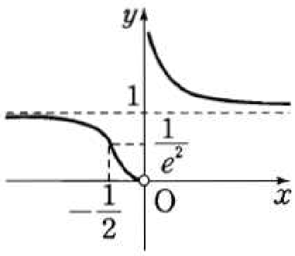


33. $y=e^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$

$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$에서 $f'(x)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}<0$

$$f''(x)=-\frac{-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cdot x^2-e^{\frac{1}{x}}\cdot 2x}{x^4}=\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

x	⋯	$-\frac{1}{2}$	⋯	0	⋯
$f'(x)$	−	−	−		−
$f''(x)$	−	0	+		+
$f(x)$	⤵	$\frac{1}{e^2}$	⤷		⤷

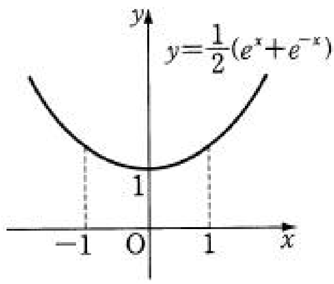


$\lim_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$

34. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ⇨ 우함수

$y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=0$에서 $x=0$ (극소)

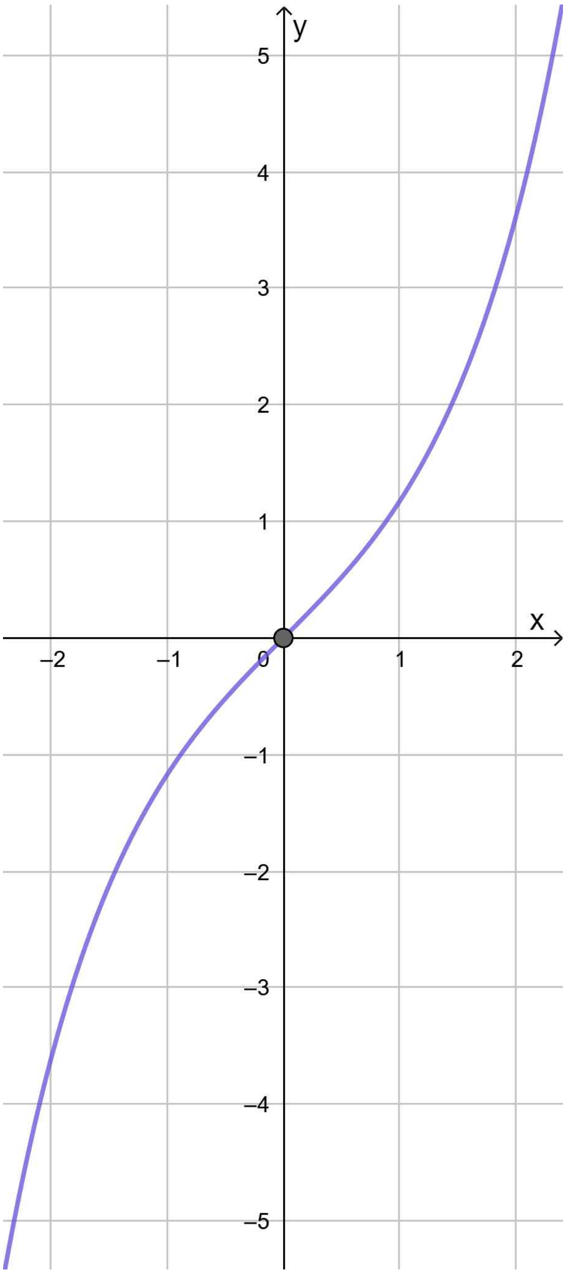
$y''=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$이므로 아래로 볼록



35. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ ⇨ 기함수

$y'=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}>0$이므로 증가함수

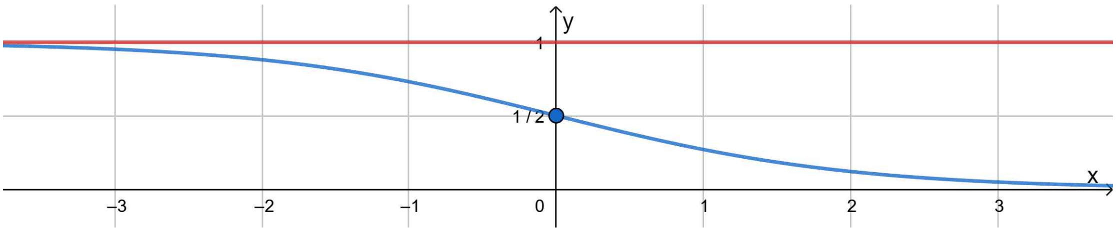
$y''=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0$에서 $x=0$ (변곡점)



36. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ ⇨ 점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대칭이고 점근선은 $y=0,\ y=1$이다.

$y' = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$이므로 감소함수

$y'' = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} = 0$에서 $x=0$ (변곡점)

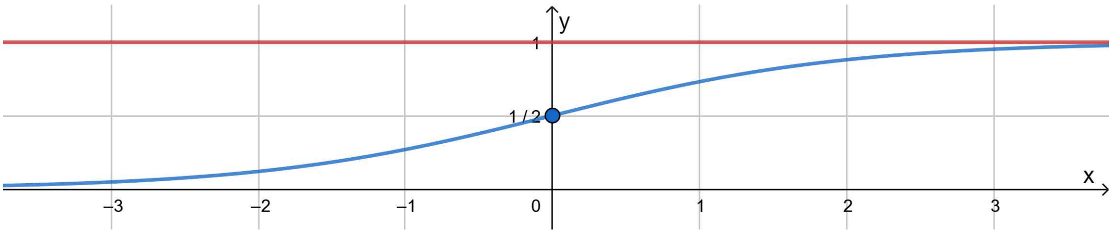


37. $y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ ⇨ 점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대칭이고 점근선은 $y=0,\ y=1$이다.

$y' = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$이므로 증가함수

$y'' = -\dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} = 0$에서 $x=0$ (변곡점)

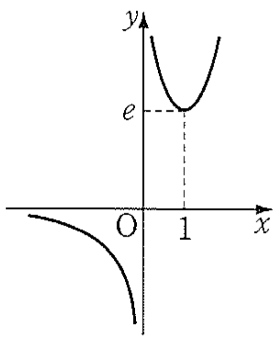
※ $y = \dfrac{1}{e^x+1}$을 y축에 대하여 대칭이동한 함수이다.



38. $y = \dfrac{e^x}{x}$ $(x \neq 0)$ ⇨ $y<0,\ y \geq e$

$y' = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$, $y'' = \dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$

x	$-\infty$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	없다	$-$	0	$+$	
y''		$-$	없다	$+$	$+$	$+$	
y	0	↘	없다	⤷	e	⤴	$+\infty$

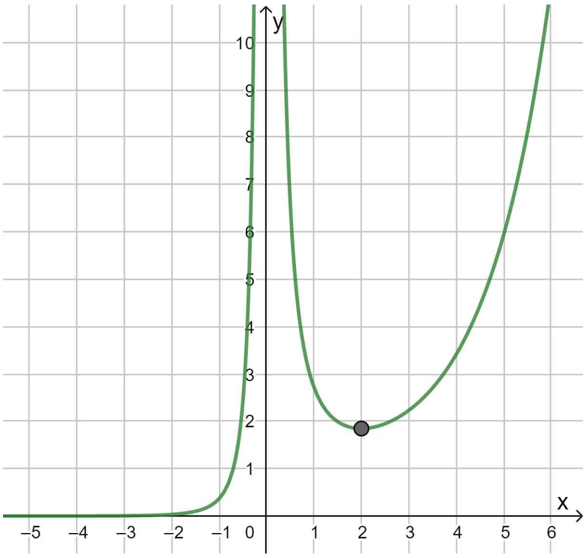


39. $y=\dfrac{e^x}{x^2}$ $(x\neq 0)$ ⇨ $y>0$

$y'=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$ ⇨ $x<0,\ x>2$일 때 각각 증가, $0<x<2$일 때 감소, $x=2$에서 극소

$y''=\dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}=\dfrac{e^x\{(x-2)^2+2\}}{x^4}>0$ ⇨ $x<0,\ x>0$일 때 각각 아래로 볼록

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^x}{x^2}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{e^x}{x^2}=\infty$



40. $y=\dfrac{e^x}{x^3}$ $(x\neq 0)$ ⇨ $y<0,\ y\geq\dfrac{e^3}{27}$

$y'=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}$ ⇨ $x<0,\ 0<x<3$일 때 각각 감소,

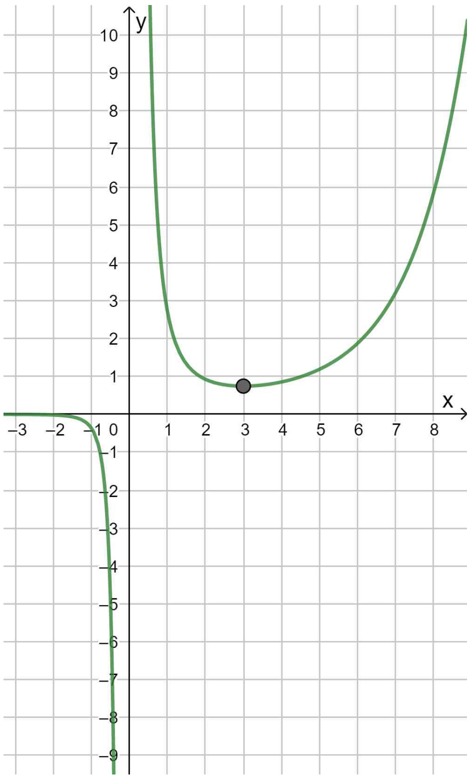
$x>3$일 때 증가, $x=3$에서 극소

$y''=\dfrac{e^x(x^2-6x+12)}{x^5}=\dfrac{e^x\{(x-3)^2+3\}}{x^5}$

⇨ $x<0$일 때 위로 볼록, $x>0$일 때 아래로 볼록

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^x}{x^3}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{e^x}{x^3}=-\infty$

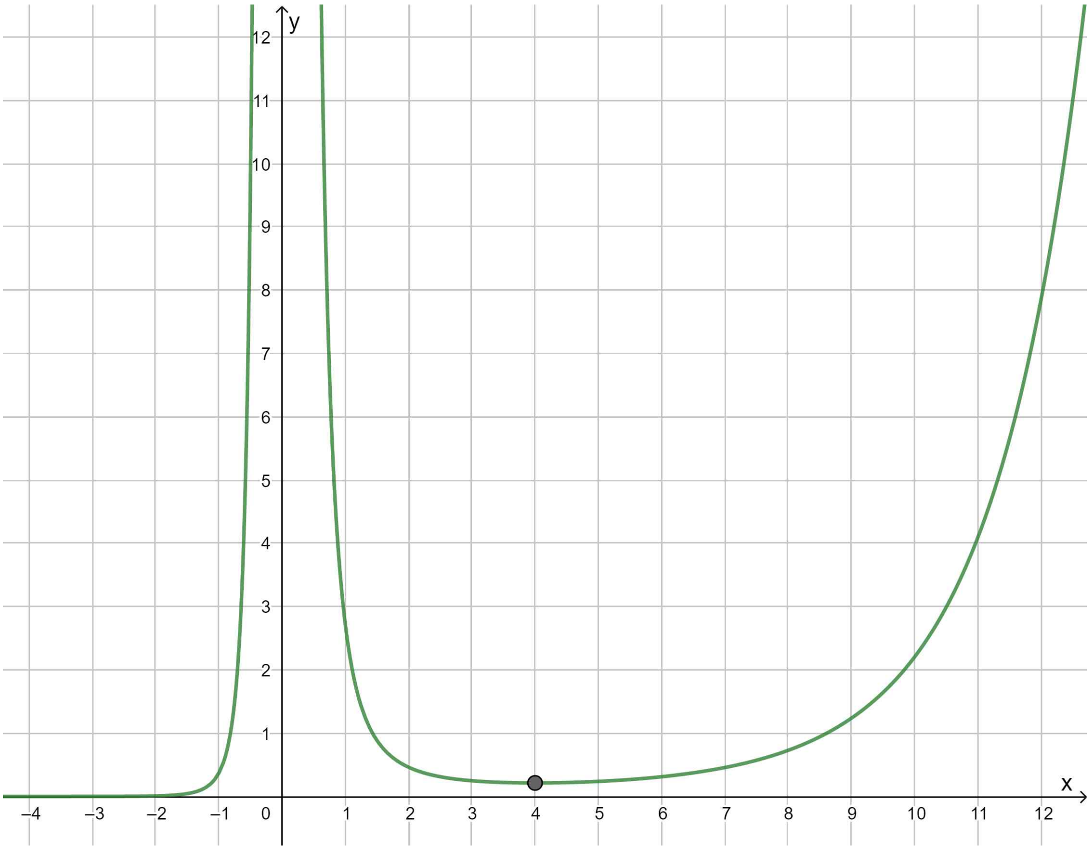


41. $y = \dfrac{e^x}{x^4}$ $(x \neq 0)$ ⇨ $y > 0$

$y' = \dfrac{e^x(x-4)}{x^5}$ ⇨ $x < 0,\ x > 4$ 일 때 각각 증가, $0 < x < 4$ 일 때 감소, $x = 4$ 에서 극소

$y'' = \dfrac{e^x(x^2 - 8x + 20)}{x^6} = \dfrac{e^x\{(x-4)^2 + 4\}}{x^6} > 0$ ⇨ $x < 0,\ x > 0$ 일 때 각각 아래로 볼록

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^4} = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = 0$, $\lim_{x \to 0+} \dfrac{e^x}{x^4} = \infty$, $\lim_{x \to 0-} \dfrac{e^x}{x^4} = \infty$



42. $y=\dfrac{e^x}{x^n}$ $(x \neq 0)$ (단, n은 **홀수**인 자연수) ⇨ $y<0$, $y \geq \dfrac{e^n}{n^n}$

$y'=\dfrac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$ ⇨ $x<0$, $0<x<n$일 때 각각 감소, $x>n$일 때 증가, $x=n$에서 극소

$y''=\dfrac{e^x\left(x^2-2nx+n^2+n\right)}{x^{n+2}}=\dfrac{e^x\left\{(x-n)^2+n\right\}}{x^{n+2}}$

⇨ $x<0$일 때 위로 볼록, $x>0$일 때 아래로 볼록

$\lim_{x \to \infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$, $\lim_{x \to -\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=0$, $\lim_{x \to 0+}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$, $\lim_{x \to 0-}\dfrac{e^x}{x^n}=-\infty$

43. $y=\dfrac{e^x}{x^n}$ $(x \neq 0)$ (단, n은 **짝수**인 자연수) ⇨ $y>0$

$y'=\dfrac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$ ⇨ $x<0$, $x>n$일 때 각각 증가, $0<x<n$일 때 감소, $x=n$에서 극소

$y''=\dfrac{e^x\left(x^2-2nx+n^2+n\right)}{x^{n+2}}=\dfrac{e^x\left\{(x-n)^2+n\right\}}{x^{n+2}}>0$ ⇨ $x<0$, $x>0$일 때 각각 아래로 볼록

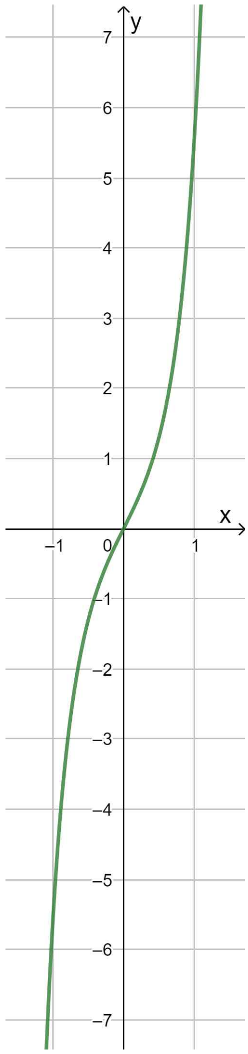
$\lim_{x \to \infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$, $\lim_{x \to -\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=0$, $\lim_{x \to 0+}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$, $\lim_{x \to 0-}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$

44. $y=2xe^{x^2}$ ⇨ 기함수

$y'=(2+4x^2)e^{x^2}>0$이므로 증가함수

$y''=\{8x+2x(2+4x^2)\}e^{x^2}=x(12+8x^2)e^{x^2}=0$에서 $x=0$ (변곡점)

$\lim_{x\to\infty}2xe^{x^2}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}2xe^{x^2}=-\infty$

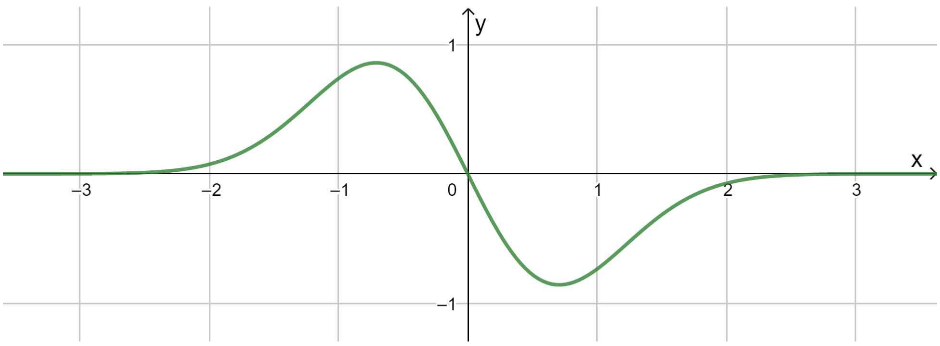


45. $y=-2xe^{-x^2}$ ⇨ 기함수

$y'=(-2+4x^2)e^{-x^2}=0$에서 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (극점)

$y''=\{8x-2x(-2+4x^2)\}e^{-x^2}=4x(3-2x^2)e^{-x^2}=0$에서 $x=0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (변곡점)

$\lim_{x\to\infty}(-2xe^{-x^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{e^{x^2}}=0$, $\lim_{x\to-\infty}(-2xe^{-x^2})=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{e^{x^2}}=0$



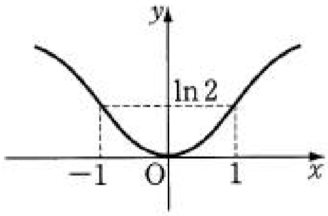
46. $y=\ln(x^2+1)$

$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $y''=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

극소점 : $(0,\ 0)$, 변곡점 : $(-1,\ \ln 2)$, $(1,\ \ln 2)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+1)=\infty$이므로

그래프의 개형은 그림과 같다.



47. $y=x\ln x$ $(x>0)$

$y'=\ln x+1=0$에서 극소점은 $\left(\dfrac{1}{e},\ -\dfrac{1}{e}\right)$

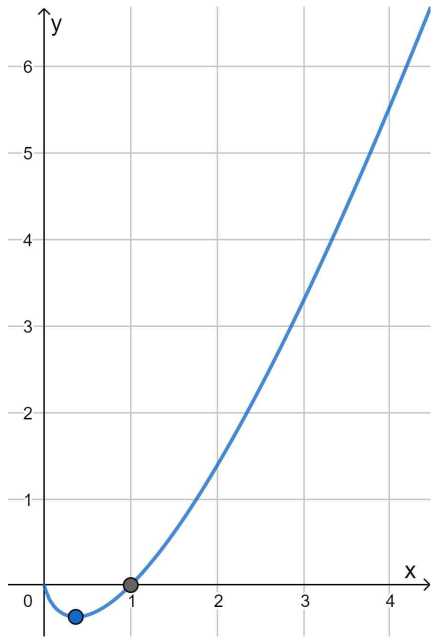
$y''=\dfrac{1}{x}>0$이므로 아래로 볼록

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

(로피탈의 정리)

※ $\ln x=-t$라 하면

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{t\to\infty}(-te^{-t})=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{e^t}=0$$



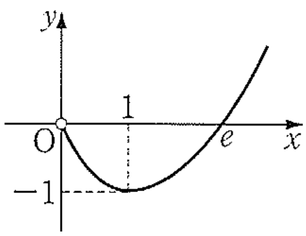
48. $y=x\ln x-x=x(\ln x-1)$ $(x>0)$

$y'=\ln x=0$에서 $x=1$ (극소)

$y''=\dfrac{1}{x}>0$이므로 아래로 볼록

따라서 증감 및 곡선의 오목, 볼록을 조사하면 아래와 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	(0)	↘	-1	↗	$+\infty$



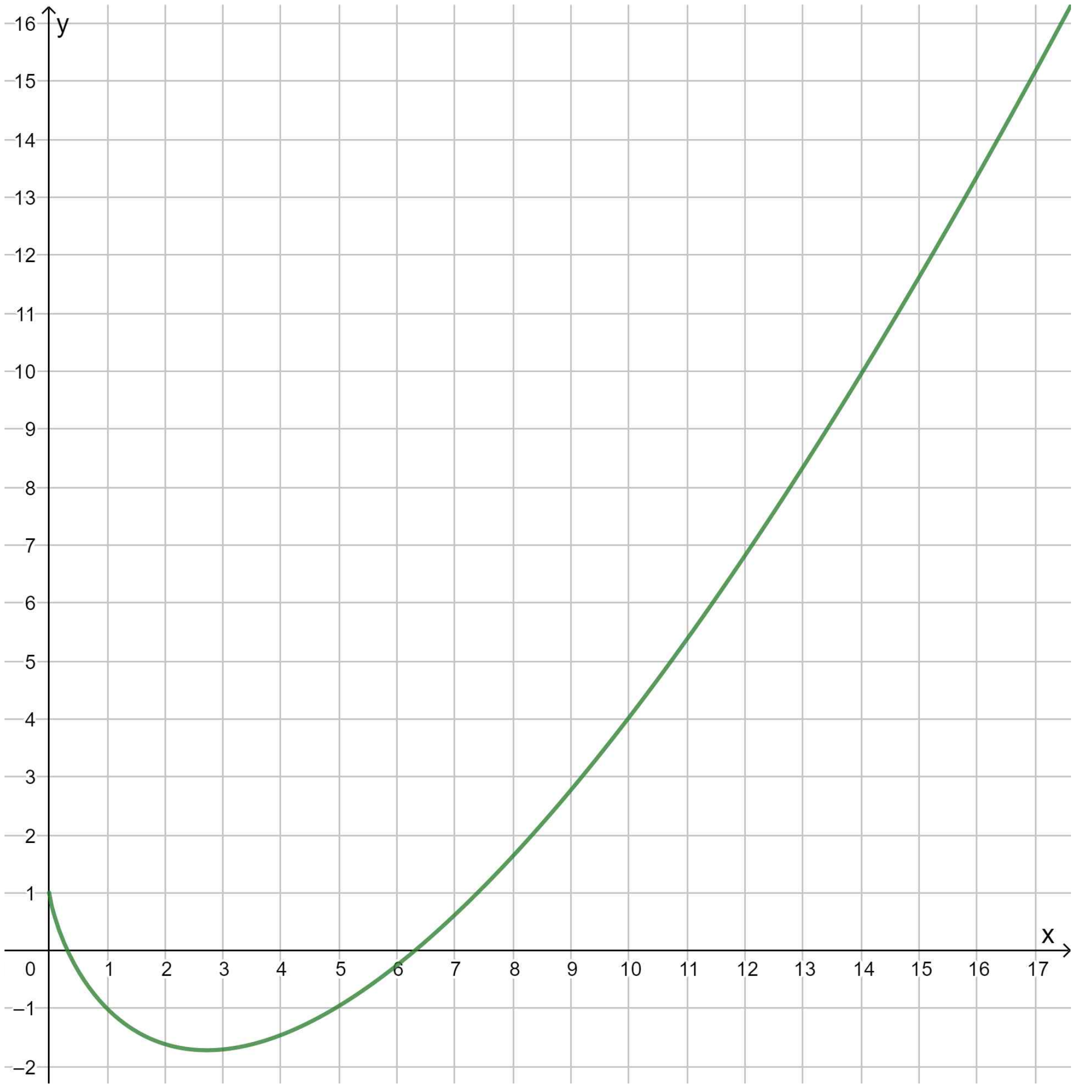
49. $y = x\ln x - 2x + 1 = x(\ln x - 2) + 1 \ (x > 0)$

$y' = \ln x - 1 = 0$에서 $x = e$ (극소)

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0$이므로 아래로 볼록

$\lim_{x \to 0+} (x\ln x - 2x + 1) = 1$

$\lim_{x \to \infty} (x\ln x - 2x + 1) = \lim_{x \to \infty} \{x(\ln x - 2) + 1\} = \infty$



50. $y = x^2 \ln x \ (x > 0)$

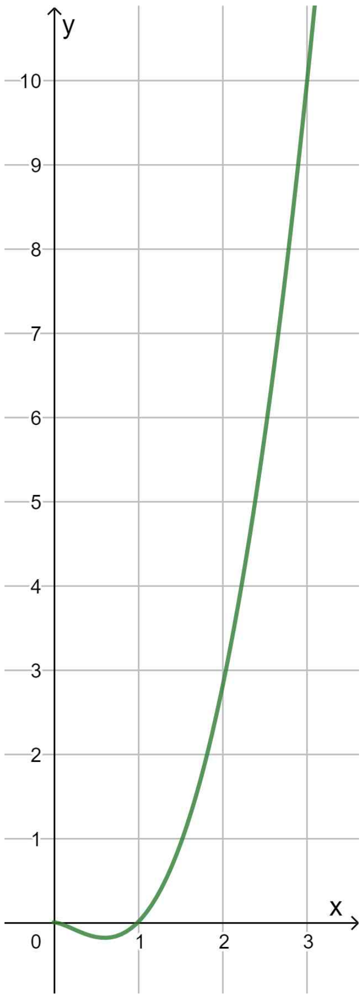
$y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) = 0$에서 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (극소)

$y'' = 2\ln x + 3 = 0$에서 $x = e^{-\frac{3}{2}}$ (변곡점)

$\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{-2} = 0$ (로피탈의 정리)

$\lim_{x \to \infty} x^2 \ln x = \infty$

※ $\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0+} (x \times x \ln x) = 0 \times 0 = 0$



51. $y = x^3 \ln x$ $(x > 0)$

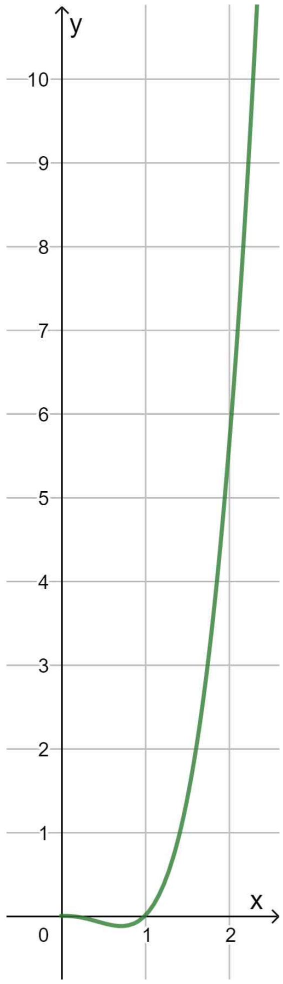
$y' = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1) = 0$에서 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ (극소)

$y'' = 6x \ln x + 5x = x(6\ln x + 5) = 0$에서 $x = e^{-\frac{5}{6}}$ (변곡점)

$\lim_{x \to 0+} x^3 \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3}{-3} = 0$ (로피탈의 정리)

$\lim_{x \to \infty} x^3 \ln x = \infty$

※ $\lim_{x \to 0+} x^3 \ln x = \lim_{x \to 0+} (x^2 \times x \ln x) = 0 \times 0 = 0$



52. $y = x^n \ln x$ $(x > 0,$ n은 2이상의 자연수)

$y' = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(n \ln x + 1) = 0$에서 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ (극소)

$y'' = n(n-1)x^{n-2} \ln x + (2n-1)x^{n-2} = x^{n-2}\{n(n-1)\ln x + (2n-1)\} = 0$에서

$x = e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ (변곡점)

$\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^n}{-n} = 0$ (로피탈의 정리)

$\lim_{x \to \infty} x^n \ln x = \infty$

※ $\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0+} (x^{n-1} \times x \ln x) = 0 \times 0 = 0$

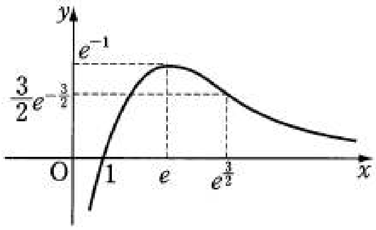
※ $\ln x = -t$라 하면

$\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = \lim_{t \to \infty} (-te^{-nt}) = \lim_{t \to \infty} \frac{-t}{e^{nt}} = \lim_{t \to \infty} \frac{-1}{ne^{nt}} = 0$

53. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$ ⇨ $y\le\dfrac{1}{e}$

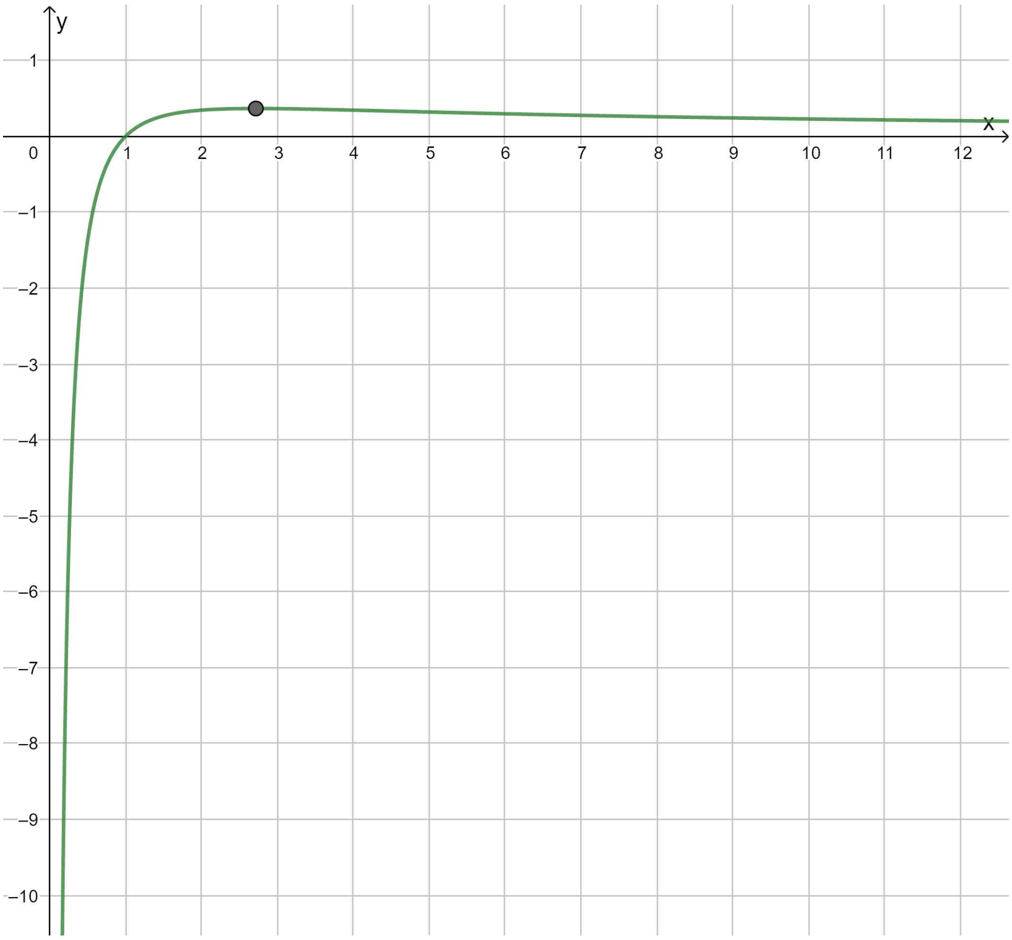
$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	극대	↘	변곡	↘



극대점 $(e,\ e^{-1})$, 변곡점 $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

$\lim_{x\to 0+} y=\lim_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (로피탈의 정리)

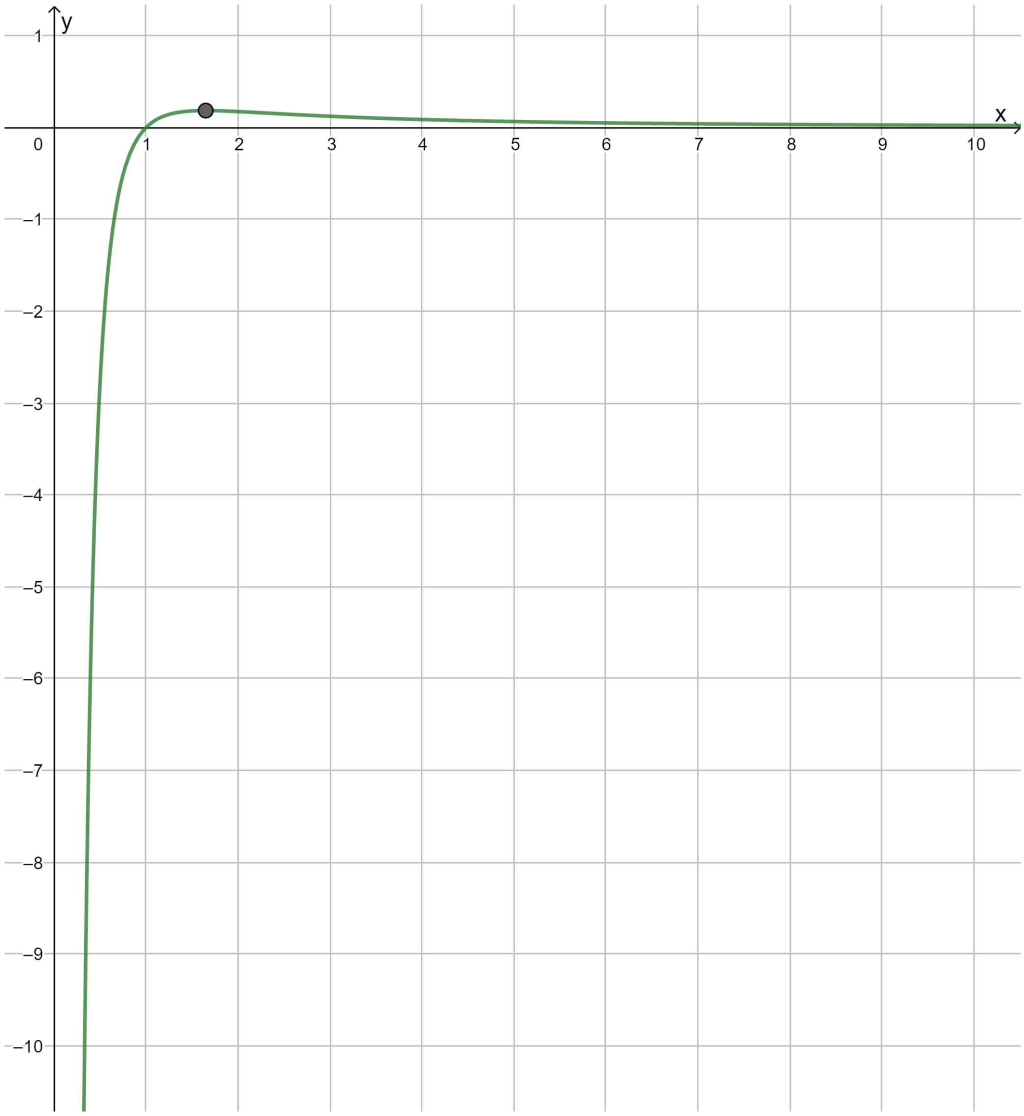


54. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $(x > 0)$ ⇨ $y \le \dfrac{1}{2e}$

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$ ⇨ $x = \sqrt{e}$ 에서 극대(최대)

$y'' = \dfrac{6\ln x - 5}{x^4}$ ⇨ $x = e^{\frac{5}{6}}$ 에서 변곡점

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0,\ \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$



55. $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$ $(x>0)$ (단, n은 자연수) ⇨ $y \le \dfrac{1}{ne}$

$y'=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$ ⇨ $x=e^{\frac{1}{n}}$에서 극대(최대)

$y''=\dfrac{n(n+1)\ln x-(2n+1)}{x^{n+2}}$ ⇨ $x=e^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$에서 변곡점

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$, $\lim_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x^n}=-\infty$

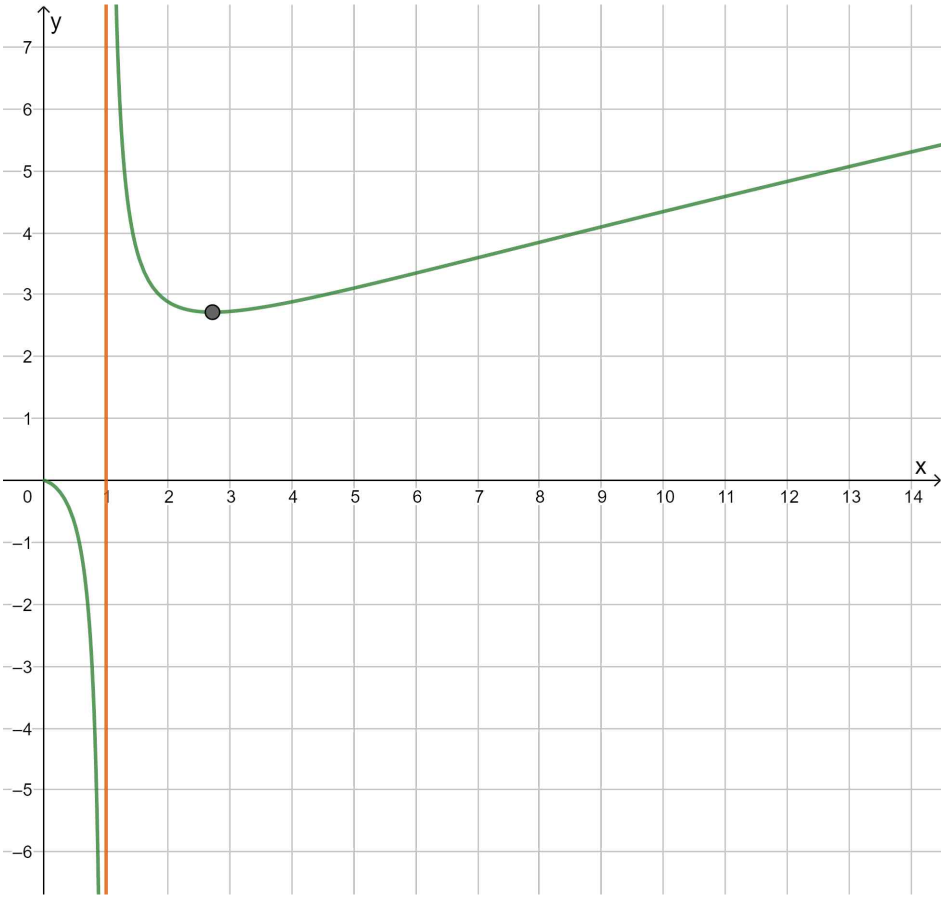
56. $y=\dfrac{x}{\ln x}$ $(0<x<1,\ x>1)$ ⇨ $y<0$, $y \ge e$

$y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ ⇨ $0<x<1$, $1<x<e$일 때 각각 감소, $x>e$일 때 증가, $x=e$에서 극소

$y''=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$ ⇨ $0<x<1$, $x>e^2$일 때 각각 위로 볼록,

$1<x<e^2$일 때 아래로 볼록, $x=e^2$에서 변곡점

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\infty$, $\lim_{x\to 0+}\dfrac{x}{\ln x}=0$, $\lim_{x\to 1+}\dfrac{x}{\ln x}=\infty$, $\lim_{x\to 1-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty$



57. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$ $(0<x<1,\ x>1)$ ⇨ $y<0,\ y\geq 2e$

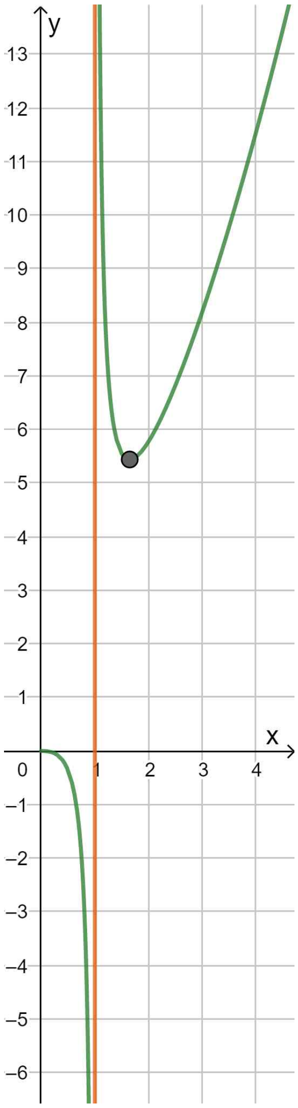
$y'=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$ ⇨ $0<x<1,\ 1<x<\sqrt{e}$ 일 때 각각 감소,

$x>\sqrt{e}$ 일 때 증가, $x=\sqrt{e}$ 에서 극소

$y''=\dfrac{2(\ln x)^2-3\ln x+2}{(\ln x)^3}$ ⇨ $2(\ln x)^2-3\ln x+2>0$ 이므로

$0<x<1$ 일 때 위로 볼록, $x>1$ 일 때 아래로 볼록

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\ln x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^2}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x^2}{\ln x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2}{\ln x}=-\infty$



58. $y=\dfrac{x^n}{\ln x}$ $(0<x<1,\ x>1)$ (단, $n\geq 2$ 인 자연수) ⇨ $y<0,\ y\geq ne$

$y'=\dfrac{x^{n-1}(n\ln x-1)}{(\ln x)^2}$ ⇨ $0<x<1,\ 1<x<\sqrt[n]{e}$ 일 때 각각 감소,

$x>\sqrt[n]{e}$ 일 때 증가, $x=\sqrt[n]{e}$ 에서 극소

$y''=\dfrac{x^{n-2}\{n(n-1)(\ln x)^2-(2n-1)\ln x+2\}}{(\ln x)^3}$

⇨ $n(n-1)t^2-(2n-1)t+2$ (단, $t=\ln x$)에서

$D=4n(1-n)+1<0$ ($\because\ n\geq 2$)이므로

$0<x<1$ 일 때 위로 볼록, $x>1$ 일 때 아래로 볼록

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^n}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x^n}{\ln x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^n}{\ln x}=-\infty$

59. $y = e^x \sin x \ (0 \le x \le 2\pi)$

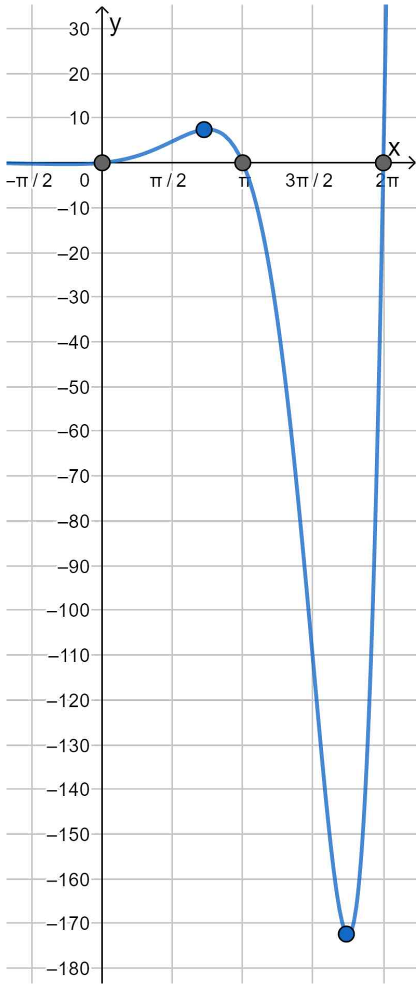
$y' = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ y'' = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y' = 0$에서 $x = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

$y'' = 0$에서 $x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

극대점 : $\left(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}\right)$, 극소점 : $\left(\frac{7}{4}\pi,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}\right)$

변곡점 : $\left(\frac{\pi}{2},\ e^{\frac{\pi}{2}}\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi,\ -e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$



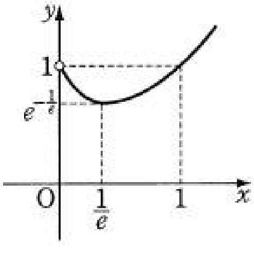
60. $y = x^x \ (x > 0)$

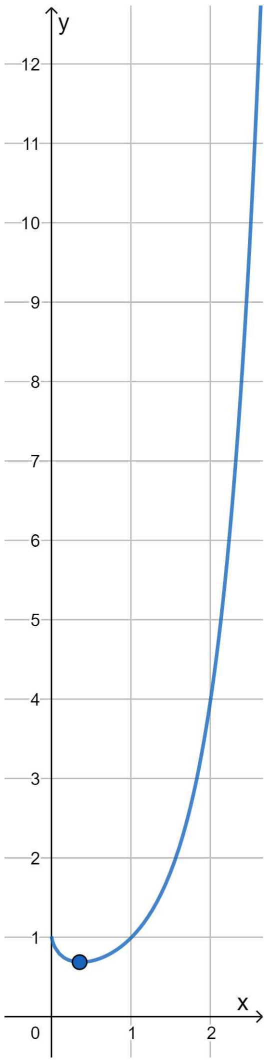
$x > 0$이므로 $y > 0$이고 $y' = x^x(\ln x + 1),\ y'' = x^x(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \cdot x^x > 0$

극소점 : $\left(\frac{1}{e},\ e^{-\frac{1}{e}}\right)$

$\lim_{x \to 0+} \ln x^x = \lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+}(-x) = 0$ (로피탈의 정리)

$\therefore \lim_{x \to 0+} x^x = e^0 = 1$





61. $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$

$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 에서 $\ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{x}$ 이므로 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} = 0$ 에서 $x = e$ (극대)

$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0+} \ln f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ 에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$