수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$((-\sqrt{2})^2)^2 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= 4 \times 2^{-2} = 1$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$

$f'(a) = 3a^2$

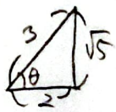
$f'(2) = 12$

제 2사분면 ⇒ $\sin\theta > 0$　$\cos\theta < 0$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

$\cos\theta = -\frac{2}{3}$

① $-\frac{4}{9}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 0

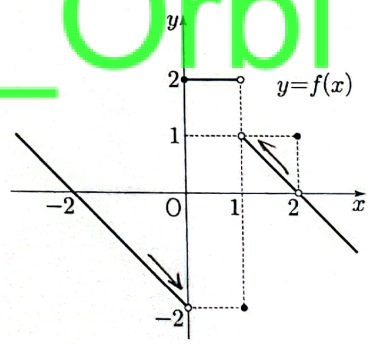
①  $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \sin^2\theta = \frac{5}{9}$

② $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{5}{9}$

$\therefore \sin^2\theta + \cos\theta = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

※삼각함수 문제는 항상 사분면(부호)를 신경쓰면서 풀자!

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① −2　② −1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$-2 + 1 = -1$

→ 시험때 등차로 잘못봐서 시간이 지연되었다! 문제 주어에서 잘 읽자!

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

→ 공비가 양수구나!

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$a_2 + a_3 = \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{2}$

$r^2 + r - 6 = 0$

$+3$
-2 $\Rightarrow r = 2$

by.

$\therefore a_6 = \frac{1}{4} \times 2^5 = 2^3 = 8$

$a_7 = \frac{1}{4} \times 2^6 = 2^4 = 16$ (or $a_6 \times 2 = 16$)

$\Rightarrow a_6 + a_7 = 8 + 16 = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

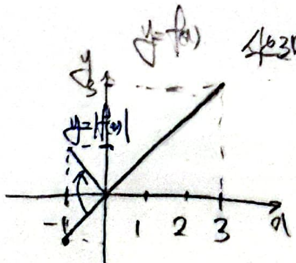
→ 절댓값이 있으니 부호 판단을 해야겠군.

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$y = x + a$, $y = x$, $y = bx - 2$는 각각 연속이므로

$x = -1$, $x = 3$에만 주목해도 되겠군.

식으로만 보면 헷갈리니까 그래프 그려볼까?



→ 음.. 정확히 그릴 수 있는건 $y = x$ 뿐이군. 일단 아래도 절댓값 씌워 보자. (바로 $y = |f(x)|$ 그렸어도 된다.)

① $\lim_{x \to -1^-} (x + a) = a - 1 = 1$ or -1

$a = 2$ or $\cancel{0}$

a는 양수였으니 0은 안되겠군

or ② $\lim_{x \to -1^-} (x + a) = a - 1 = 1$ or $\cancel{-1}$

$y = x + a$의 y절편이 a이고 ($a > 0$), $y = x + a$의 기울기가 1이므로 $y = x + a$ 그래프는 $y = x$보다 위에 있어야되므로 $(-1, -1)$을 지나지는 않겠군.

① $\lim_{x \to 3^+} (bx - 2) = 3b - 2 = 3$ or -3

$b = \frac{5}{3}$ or $\cancel{-\frac{1}{3}}$ → b는 양수였으니 $-\frac{1}{3}$은 안되겠군.

or

② $\lim_{x \to 3^+} (bx - 2) = 3b - 2 = 3$ or $\cancel{-3}$

→ $y = bx - 2$의 y절편이 -2이고, $y = bx - 2$는 직선인데 $x > 0$의 영역에서 $y \le -2$인 값을 가지면 b가 양수가 될 수 없겠군

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

$y = -\sin x$는 $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$에서 최솟값 -1
$x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$에서 최댓값 1

최소: $2x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 최대: $2x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$

$0 < x = \frac{\pi}{4} + n\pi < \pi$ $\quad 0 < x = \frac{3}{4}\pi + n\pi < \pi$

$n = 0$ $\quad n = 0$

$x = \frac{\pi}{4} = b$ $\quad x = \frac{3}{4}\pi = a$

$\Rightarrow (a, f(a)) = (\frac{3}{4}\pi, 1)$

$(b, f(b)) = (\frac{\pi}{4}, -1)$

$\therefore \frac{1 - (-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

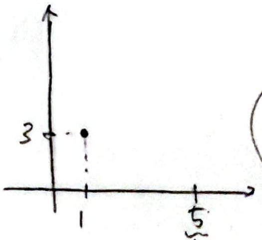
구하란 것!

(가) $f(1)=3$

(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

음.. 일단 아는 것부터 그래프에 나타내 볼까? 많지는 않게 없네..



$\therefore \dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=\dfrac{f(5)-3}{5-1}=5$

$f(5)=23$

f(5) 구하는거니까 5도 써놓자!

도함수 $y=f'(x)$에 어떤 값을 넣으면 순간 변화율이지…
문제에서 구하는 것이 f(5)의 '최솟값'이네? 그리고 f(x)은 고정이면..
x=1부터 x=5까지 최대한 적게 증가해야겠군.
(나)에서 $f'(x)\ge 5$니까.. x=1부터 x=5까지 모든 순간 변화율이 5인
최소값이네! → 평균 기울기가 5인 직선이네?

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\ge g(x)$ → 크기 비교하는데 괄호 두개는 어려워.

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a^3-a+6\ge a^2+a$

$\underbrace{a^3-a^2-a+6}_{h(a)}\ge a$ — 우리가 움직이면서 관찰해야할 값 a는 따로 두자!

로직이 식으로 안되겠어

구하라는 것!

a≥0에서 y=h(a)의 최솟값이 실수 a의 최댓값이겠구나

극솟값의 x좌표가 ⎡양수 → h(0)과 극솟값 중 더 작은값 = a. ⎣음수 → h(0) = a

정답!

(∵ y=h(a)의 최고차항의 계수가 양수)

$y=h'(a)=3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)$

a=1에서 극소네! (1>0)

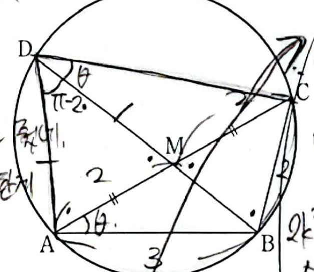
$h(0)=6,\ h(1)=5$ → 실수 a의 최댓값은 5

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\dfrac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

∠BAC = θ ← 자주 쓰일 각이니까 주어졌지? 그럼 그냥 편하게 θ로 둘래!

$\cos\theta=\frac{7}{8}$

굳이 sin 말고 cos을 줬네. 혹시 코사인 법칙 쓰란걸까 싶은가?



AD = k

$k^2+\left(k+\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)^2-2k\left(k+\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)\times\frac{11}{16}=9$

$2k^2+2\sqrt{\tfrac{5}{2}}k+\frac{5}{2}-\frac{11}{8}k^2-\frac{11}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}}k$

$\frac{5}{8}k^2+\frac{5}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}}k-\frac{13}{2}=0$

① $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$5k^2+5\sqrt{\tfrac{5}{2}}k-52=0$

(△ABC) $\overline{AC}^2+9-6\overline{AC}\times\frac{7}{8}=4$

$k=\dfrac{-5\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{125}{2}+1040}}{10}$

$\overline{AC}^2-\frac{21}{4}\overline{AC}+5=0$

$=\frac{8}{5}\sqrt{\tfrac{5}{2}}$ or $-\frac{13}{5}\sqrt{\tfrac{5}{2}}$ $\quad \frac{4}{5}\sqrt{10}$

$4\overline{AC}^2-21\overline{AC}+20=0$

$\overline{AC}=\cancel{\tfrac{5}{4}}$ or 4 (∵ $\overline{AC}>3$)

AM = MC를 쓸 것 같으니 그림에는 2, 2로 표시하자

△CMB가 이등변삼각형이군 ← ∠CMB = ∠CBM이네.. 혹시 모르니 일단 •으로 표시해두자

그런데 그림을 다시 보니 D가 외접원위에.. 구하는게 MD인데 MD를 포함하는 도형도 없잖아?

보조선 AD와 CD를 그어보자

오.. 원주각의 성질에 의해서 ∠DAM도 •이네 → △AMD가 이등변삼각형이구나!
맞꼭지각의 성질에 의해서 ∠AMD도 •이네

DM은 쉽게 구할 수 있잖아? → △ABD에서 코사인 법칙 쓰면 되겠군데? ← 이거 알려면 각 ∠ADM을 구하자

△ABM에서, $4+9-12\times\frac{7}{8}=13-\frac{21}{2}=\frac{5}{2}=\overline{BM}^2$

$\overline{BM}=\sqrt{\tfrac{5}{2}}$

△CMB에서, $4+\frac{5}{2}-4\sqrt{\tfrac{5}{2}}\cos\bullet=4$

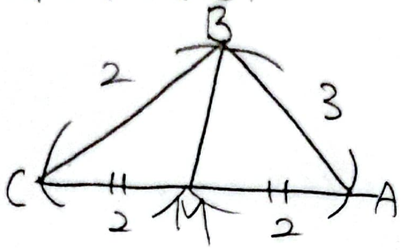
$\cos(\pi-2\bullet)=\frac{11}{16}$

$4\sqrt{\tfrac{5}{2}}\cos\bullet=\frac{5}{2}$

$\cos 2\bullet=2\cos^2\bullet-1=\frac{10}{32}-1=-\frac{22}{32}$

$\cos\bullet=\frac{5}{8}\times\sqrt{\tfrac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{8}$

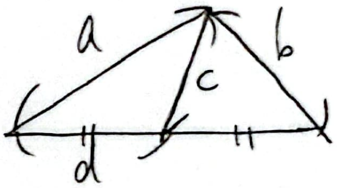
$\overline{BM}$을 구하는법 ②, 파푸스 정리



$\Rightarrow 4+9 = 2(\overline{BM}^2+4)$

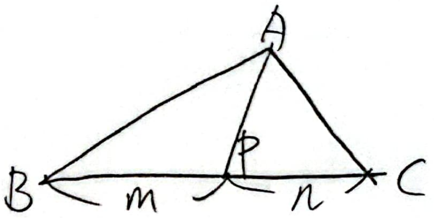
$\overline{BM}^2 = \frac{5}{2}$, $\overline{BM} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

*파푸스 중선 정리



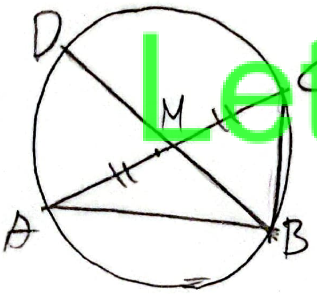
$\Rightarrow a^2+b^2 = 2(c^2+d^2)$

*스튜어트 정리



$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{AP}^2+mn)$

Sol2) 두 현에 대한 방멱

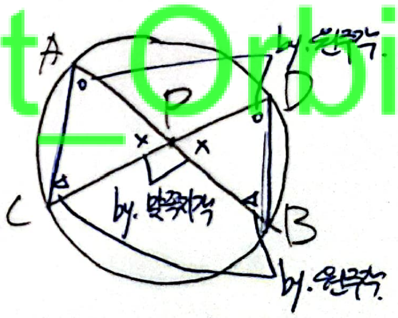


$\overline{AM}\times\overline{MC} = \overline{BM}\times\overline{MD}$

$\Rightarrow 2\times2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\times\overline{MD}$

$\therefore \overline{MD} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

(+) 두 현에 대한 방멱 정리의 증명



$\triangle ACP \sim \triangle DBP$ (AA닮음)

$\therefore \overline{AP} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$

$\Rightarrow \overline{PD}\cdot\overline{PC} = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$

(닮음을 그냥 공식화한 것!)

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

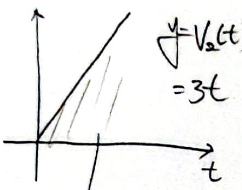
이때를 $t=k$라 두자

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24 ✓

$\int_0^k (2-t)\,dt=\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^k=0$

$2k-\frac{1}{2}k^2=0$

$k=4$ or 0



계속 양수군

$\int_0^4 3t\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4=24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

$a_5<0,\ a_7>0$ (∵ 공차가 양수)

(가) $a_5\times a_7<0$

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$ ✓　④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

일단 a_n의 일반항을 써보자.

$a_n=a_1+3(n-1)$

범위를 써볼까?

$a_1+12<0$

$a_1<-12$

$a_1+18>0$

$a_1>-18$

$\Rightarrow -18<a_1<-12$

$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=|a_7|+|a_8|+\cdots+|a_{12}|$

$=a_7+a_8+\cdots+a_{12}$

공차가 양수고 $a_7>0$이니까! (⊕ $a_5<0$)

a_7 이상까지는 나눠서 봐야하는 이유?

a_7 근처가 극이항

$\parallel$

$6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|+|a_{12}|$

$=6-(a_2+a_4)+|a_6|+(a_8+a_{10}+a_{12})$

$\Downarrow$

a_7 a_{12}　a_8 a_{11}　a_9 a_{10}

· $a_7+a_8+\cdots+a_{12}=3(a_7+a_{12})=3(2a+51)$　($a_1=a$)

· $6-(a_2+a_4)+|a_6|+a_8+a_{10}+a_{12}$

$=6-(2a+12)+|a_6|+3a_{10}=6-(2a+12)+|a_6|+3a+81$

$=a+75+|a_6|$

$3(2a+51)=a+75+|a_6|$

$5a+78=|a_6|=|a+15|$

i) $a_6>0$, $4a=-63$

$a=-\frac{63}{4}\rightsquigarrow a_6<0$ 모순

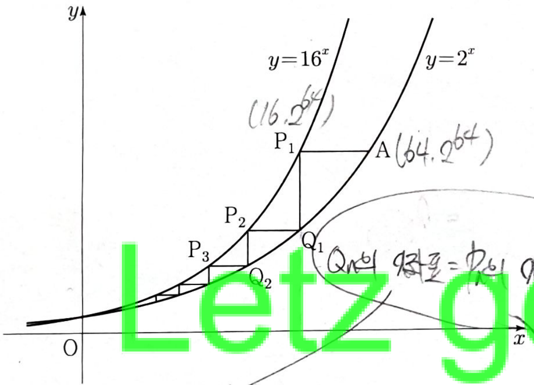
ii) $a_6<0$, $6a=-93$

$a=-\frac{31}{2}$　$a_{10}=-\frac{31}{2}+27=\frac{23}{2}$

$-18<-\frac{31}{2}<-12$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $A(64, 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고, 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



Q_n의 x좌표 = P_n의 x좌표 = a_n이라

우선, P_1의 좌표부터 구해볼까?

$16^a = 2^{64} = 2^{4a}$

$a=16$. $y=16^{16}$

어? 여러 좌표 구하려면 16^a을 2^{4a}로 고려해야되네?

어차피면 2^{4a}라 생각하자

$y=2^{64}$ (사실 어떤 원래 주어진 것이긴 함)

$Q_1(16, 2^{16})$

$P_2(4, 2^{16})$

⋮

검산해보도 맞네

P_{n+1}의 x좌표 = $\frac{1}{4}$ Q_n의 x좌표 네?

P_n의 x좌표

$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $a_1 = 16$

$a_n = 16\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$16\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{k}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}$

$k < 4^{n-3}$

최솟값이 6이면 $n=5$를 넣으면 k가 더 크단 소리네?

$\Rightarrow 4^2 \le k < 4^3$

등호 꼭 확인하기!!

$k=4^{n-3}$이면 부등식 성립하지X!

$k=4^2$일 때 $n=5$에서 부등호 성립하지 않으므로

$\therefore 64-16 = 48$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2 < f(1) < 4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

↳ 다항함수 → 연속 & 미분 가능!

$g(0^-) = g(0^+) = 0$

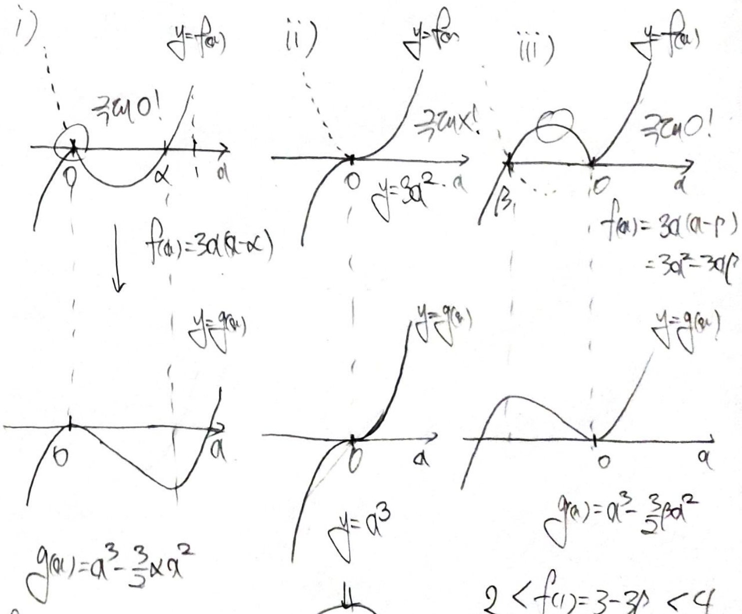
(∵ f가 다항함수) $g'(0)$이 존재

$g'(0^-) = -f(0^-)$ = $g'(0^+) = f(0^+)$ ⇒ $f(0)=0$ (∵ f가 연속)

$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$

적분해서 삼차함수 ⇒ $x \ge 0$에서 $f(x)$, $x<0$에서 $-f(x)$ ⇒ 이차함수!

$f(x) = \begin{cases} -h(x) & (x<0) \\ h(x) & (x \ge 0) \end{cases}$ ($h(x)$: 이차함수, $h(0)=0$) 여야된다!



$2 < f(1) = 3(1-\alpha) < 4$

$\alpha > 0$이므로 $2 < f(1) < 4$가 안됨 ⇒ 반례가 아니라 "논리"

ㄷ 성립

$2 < f(1) = 3-3\beta < 4$

$-\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{3}$

$f'(0) < 1$이면 ($y=x \to y'=1$) 성립!

$f'(0) = -3\beta \to -1 < -3\beta < 1$ ⇒ 성립!

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

음... 일단 나열해볼까?

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{k+1} > 0$

$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < 0$

$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_5 = \frac{1}{k+1}$ 주기!

$k \le 1 \to k=1$ $a_4 = 0$ or $\frac{2}{k+1} > \frac{1}{k}$, $k > 1$

$\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} < 0$ $k \ge 2$

$a_6 = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k}$

$k \le 2$ $k=2$ $k > 2$

$a_7 = \frac{1}{k+1}$

$\frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$

$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k}$

$k=3$

$a_9 = \frac{1}{k+1}$

$\frac{4}{k+1} - \frac{4}{k}$

k	$a_n = 0$		
1	$a_1, a_4, a_7 \cdots a_{22}$	(o)	주기 : 3
2	$a_1, a_6, a_{11} \cdots a_{21}$	(x)	주기 : 5
3	$a_1, a_8 \cdots a_{21}$	(o)	주기 : 7

)+2)+2 주기가 2씩 늘어나네! → 주기 : $2k+1$

$22-1=21 \Rightarrow 1, 3, 7, 21$이 우리가 필요한 주기!

$2k+1=21$

$k=10$

$k=1, 3, 10$

Sol 2) $a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{k+1}$

$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$

⋮

- 분자의 합이 $n-1$일 수밖에 없네?
(처음에 0, 그 다음에 하나씩 더해지므로)

$\Rightarrow a_n = \frac{p}{k+1} - \frac{q}{k}$

$p+q = n-1$

$a_{22} = \frac{p'}{k+1} - \frac{q'}{k} = 0$

$p'+q' = 21$

$p'k = q'(k+1)$

$(p'-q')k = q'$

$k = \frac{q'}{p'-q'} = \frac{q'}{21-2q'} =$ 자연수 (p', q'도 자연수)

$q' \ge 21-2q'$ $21-2q' > 0$

$q' \ge 7$ $q' < \frac{21}{2} = 10.5$

$\to 7 \le q' \le 10$ 대입

$q'=7$, $k=1$

$q'=8$, $k=\frac{8}{5}$ (x)

$q'=9$ $k=\frac{9}{3}=3$

$q'=10$ $k=\frac{10}{1}=10$

$\to k = 1$ or 3 or 10

단답형

※로그 함수가 나오면 항상 진수 조건을 염두에 두자!

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x > -2$ $x > 2$

6

$\log_2(x^2-4) = 5$

$x^2 - 4 = 32$

$x = 6$ or ~~-6~~

($\because$ 진수조건)

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

15

$\int f'(x)dx = 2x^4 + 2x^3 + C = f(x)$

$f(0) = C = -1$

$\therefore f(-2) = 32 - 16 - 1 = 15$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

3

$4\sum_{k=1}^{10}k+10a=4\times\frac{10\times11}{2}+10a=220+10a=250$

$\therefore a=3$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [3점]

2

풀: 극대가 나왔으니 일단 미분해볼까?

$f'(\alpha)=4\alpha^3+2a\alpha$

(α=1에서 극소이므로)

$f'(1)=4+2a=0$

$a=-2$

$\Rightarrow f'(\alpha)=4\alpha^3-4\alpha=4\alpha(\alpha^2-1)=4\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)$

$-\ \ -1\ \ +\ \ 0\ \ -\ \ 1\ \ +$

극댓값을 고민해 볼까?

$\underbrace{f(0)=b}_{\parallel\ 4}$ $\Rightarrow b=4$

$\therefore a+b=-2+4=2.$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|\,dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.
$f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

13

극소니까 미분해보고 싶은데..

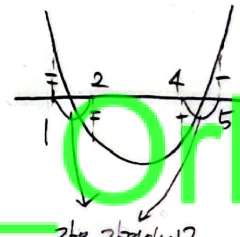
미적분의 기본 정리에 의해 적분된 꼴이니까
그 역연산인 미분이 가능하잖아?

$g'(\alpha)=|f(\alpha+1)|-|f(\alpha)|$

$g'(1)=|f(2)|-|f(1)|=0$

$g'(4)=|f(5)|-|f(4)|=0$

$|f(1)|=|f(2)|,\ |f(4)|=|f(5)|$

$\Rightarrow$ 

$y=f(\alpha)$ (이차함수)

같은 간격이네?

$f(\alpha)$는 $\alpha=3$ 대칭이군.

$\Rightarrow f(\alpha)=2(\alpha-3)^2+p$

$\Rightarrow f(1)=8+p$

$f(2)=2+p$

$8+p=-(2+p)$

$2p=-10$

$p=-5$

※ α=3 대칭이 이미 $f(1)=f(5)$, $f(2)=f(4)$를 함의하므로 $f(1)=-f(2)$ or $f(5)=-f(4)$를 써야된다!☆

$\therefore f(0)=18-5=13$

4) 미적분의 제 1 기본정리

$f : [a, b] \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{실수}}$ 연속 이고, $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 이면

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

20번

$$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)|\,dt = \int_a^{x+1} |f(t)|\,dt - \int_a^{x} |f(t)|\,dt$$

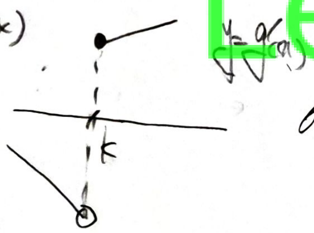
$$g'(x) = \underbrace{|f(x+1)|}_{\text{연속}} - \underbrace{|f(x)|}_{\text{연속}}$$

$\Rightarrow g'(x) = (\text{연속}) - (\text{연속}) = (\text{연속})$

$\Rightarrow g'(1),\ g'(4) = 0$

연속인 조건을 못찾고 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$을 썼으면 엄밀하게 푼 것이 아니다.

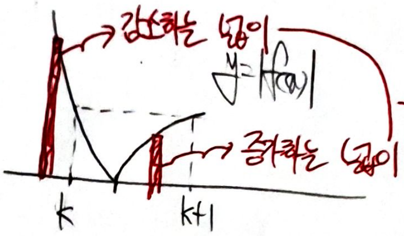
ex)

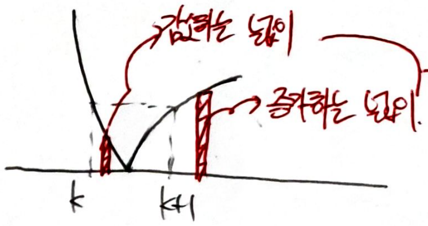


이더라도 $x=k$에서 $y=g(x)$가 극값을 가질 수 있기 때문이다.

20.

Sol 2) 미분 안해보고 $|f(1)|=|f(2)|$, $|f(4)|=|f(5)|$인 이유.

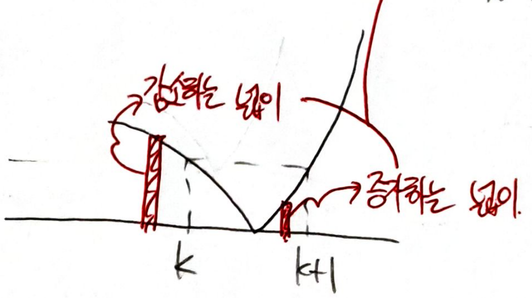


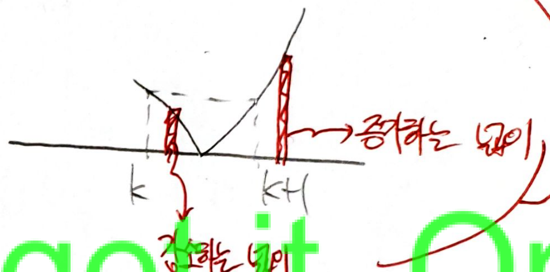


$-f(k)=f(k+1)$ 이라 하자

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$ 이므로, $x<k$ 일때 가지는 넓이의 감소량이 증가량보다 크다.

$x>k$ 일때는 넓이의 증가량이 감소량보다 크다

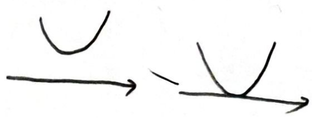


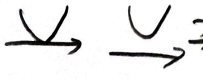


$\Rightarrow |f(k)|=|f(k+1)|$인 k

바로 그 k가 극소점의 x좌표이다.

$\Rightarrow |f(1)|=|f(2)|$, $|f(4)|=|f(5)|$

(같은 논리로 해보면  꼴은 극소점이 1개씩밖에 안되어서 문제의 상황이 될 수 없음을 쉽게 알 수 있다.)

(그리고 "설마 절댓값 줬는데 음수부가 없겠어?" 마인드로  꼴로 먼저 풀고 안되면  꼴로 돌아간다 해도 낭비라고 보긴 어렵다.)

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

426

일단 64 좀 지우고 싶으니까 밑을 가장 단순하게 고쳐볼까?

$$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{4n+16}$$

$\frac{3}{4n+16}=1$ or $\frac{3}{4n+16}=2^{3k}$ or $\frac{3}{4n+16}=2^{-3k}$ 꼴이 되면 되겠군!

(k는 자연수)

i) $\frac{3}{4n+16}=1$, $n=-\frac{3}{4}\neq$ 자연수

ii) $\frac{3}{4n+16}=2^{3k}$에서, $4n+16\geq 20$ ($\because$ n은 자연수) 이므로

$\frac{3}{4n+16}<1$ 이네? 그럼 이 경우도 패스

iii) $\frac{3}{4n+16}=2^{-3k}$, 지수 양수로 보기 싶고, n도 분자에 있는게 낫겠지?

$\frac{4n+16}{3}=2^{3k}$

n을 구하는 거니까 $n=\sim$꼴로 고쳐보자!

$$n=\frac{3\cdot 2^{3k}-16}{4}=\frac{3\cdot 8^k}{4}-4=6\cdot 8^{k-1}-4$$

아무래도 분수꼴은 없는게 편하잖아?

$n=6\cdot 8^{k-1}-4$ k는 자연수니까 뭘 넣어도 자연수인 n이 나오겠네! 그냥 1부터 신경쓰지 말고 넣어봐도 되겠다!

$k=1$, $n=6-4=2$

$k=2$, $n=6\cdot 8-4=44$

$k=3$, $n=6\cdot 8^2-4=6\times 64-4=384-4=380$

$k=4$, $n=6\cdot 8^3-4=3\cdot 2^{10}-4>1000$

앞으로 증가할거니까 더 안넣어봐도 되겠지?

$\therefore$ 1000 이하 모든 n의 합

$=2+44+380$

$=426$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

19

> $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

t가 -3이나 6이 아니면 극한값이 존재해야하는데?

유리화하면 $\{g(t)\}^2=|g(t)|^2$니까 식 좀 깔끔해지겠는데?

$$\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$x=-3$ 근처에서 보는거니까 여기서 $g(x)$는 $(x+3)f(x)$ 꼴은

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left\{\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$$

$(x+3)^2=|x+3|^2$

$f(x)$가 $(x+3)$을 인수로 가져야겠네 (분모의 $(x+3)^2$ 제거)

$f(x)=(x+3)(x-k)$ ($\because$ 최고차항 계수 1, 이차함수)

$$\lim_{x\to -3}\frac{|x-k|}{\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$

음.. 이제 일단 $t=-3$이랑 $t=6$을 넣어보자.

i) $t=-3$.

$$\lim_{x\to -3}\frac{|x-k|}{\sqrt{|(x+3)f(x)|}}$$

ii) $t=6$

$$\lim_{x\to -3}\frac{|x-k|}{\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(6)\}^2}+|g(6)|}$$

분자가 뭐든 '치분적으로' 분모가 $x\to -3$에서 0으로 가야 극한값이 존재하지 않을 수 있겠네.

$g(6)=0 \to (6+a)f(6-b)=0 \longrightarrow f(6-b)=0$

($\because$ $a>0$, $a+6>0$)

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

유리화

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}=1$

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

이 점이 진짜 이 위에 있는지 의심하지 말기! 시간 낭비임! 출제자를 좀 믿기!

$\frac{dy}{dx}=m$

$2x-m\ln x-y\cdot\frac{1}{x}+1=0$

$x=e,\ y=e^2$

$2e-m-\frac{e^2}{e}+1=0$

$m=e+1$

$m=e+1=\frac{dy}{dx}$

22번임!

$f(x)=(x+3)(x-k)$니까 $f(6-b)=(9-b)(6-(b+k))=0$.

$b=9$ or $b+k=6$이군.

방법1

수학 교수분들이 특이상황부터 하셨으니까.. $k=-3$ ($f(x)=(x+3)^2$)부터 해볼까?

① $k=-3,\ f(x)=(x+3)^2$

$t=-3,\ \lim_{x\to-3}\frac{|x+3|}{|x+3|^2\sqrt{|x+3|}}=\infty$ ⇒ 극한값 X

$t=6\ \lim_{x\to-3}\frac{|x+3|}{|x+3|^2\sqrt{|x+3|}}=\infty$ ⇒ 극한값 X

오! 성립하네?

$\cdot f(6-b)=(9-b)^2=0$, $b=9$군.

$g(x)$의 연속 조건을 써볼까?

$3f(0)=af(-b)=af(-9)$

$3(3)^2=a(-6)^2$

$a=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

마지막 점검!☆

$t\neq-3,\ t\neq6$일 때는 극한값을 갖는지 점검해보자!

$\lim_{x\to-3}\frac{|x+3|}{\sqrt{|(x+3)^3+f(g(t))|^2}+|g(t)|}=\frac{0}{2|g(t)|}=0$ ok!

⇒ 이제 값 내자능!☆

$g(4)=(\frac{3}{4}+4)f(4-b)=\frac{19}{4}f(-5)=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$

22번임!☆

방법2

$\lim_{x\to-3}\frac{|x-k|}{\sqrt{|(x+3)f(x)|+|g(t)|^2}+|g(t)|}=\lim_{x\to-3}\frac{|x-k|}{\sqrt{(x+3)^2|x-k|+|g(t)|^2}+|g(t)|}$

$g(t)\neq0$이면 일단 무조건 극한값을 가지는군

$g(t)=0$이면 어떨지?

$g(t)=0,\ \lim_{x\to-3}\frac{|x-k|}{|x+3|\sqrt{|x-k|}}$

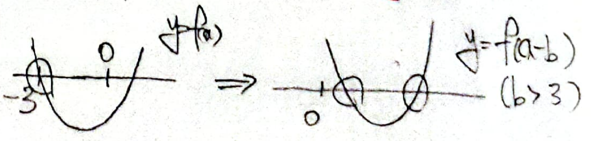
$k\neq-3$ → 극한값 무조건 X

$k=-3$, → $\lim_{x\to-3}\frac{1}{\sqrt{|x+3|}}$ → 극한값 X

$g(t)=0$이면 무조건 극한값이 없구나!

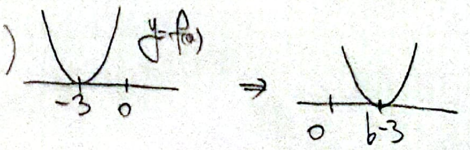
$y=g(x)$가 $x=-3,\ x=6$에서만 근을 가져야겠네.

i)



⇒ 근이 3개 ⇒ 모순!

ii)



⇒ 근이 2개! ⇒ 이거갔!

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(3))}$ → 구하는게 뭔지 잘 보고 분석하기!

(다른 표현으로 나타내기 등?)

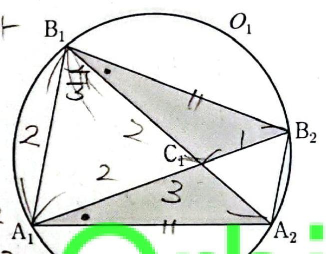
$f(1)=3 \to g(3)=1$

$f'(x)=3x^2+2 \to f'(g(3))=f'(0)=2$

$g'(3)=\dfrac{1}{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⧖ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

$\overline{A_1B_1} \,/\!/\, \overline{A_2B_2}$이고, A_1, A_2, B_1, B_2가 원 위의 점이니까 □$A_1B_1A_2B_2$는 등변사다리꼴이네!



R_1

$\triangle A_1B_1C_1$은 이등변이므로 한 각이 $\frac{\pi}{3}$네?

↓

$\triangle A_1B_1C_1$은 정삼각형이네!

$\overline{A_1C_1}=\overline{B_1C_1}=2$네

↓

$\overline{C_1B_2}=\overline{C_1A_2}=1$이네 $(3-2=1)$

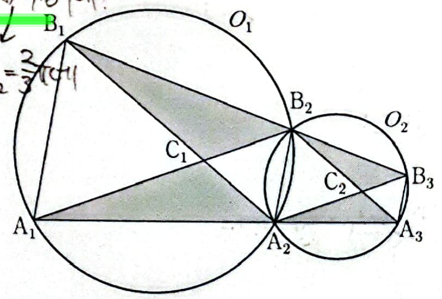
$\angle B_1C_1B_2=\frac{2}{3}\pi$네

$\triangle B_1C_1B_2=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

↓

$R_1=\sqrt{3}$



R_2

⋮　　⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$　② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

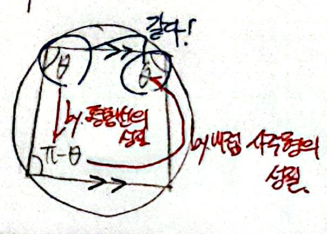
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

넓이비 $=\overline{A_1B_1}^2 : \overline{A_2B_2}^2$ (계속 닮음인 등변 사다리꼴이 생성되므로)

$=4:1$

$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Why 등변사다리꼴?



27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = 4+d(n-1)$ (d는 공차)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3 \to d=3$

$a_n = 3n+1$

뭔가 일련의 보이는거.. n에 n+2 넣어볼까?

$\frac{a_n}{n}=\frac{3n+1}{n} \to \frac{a_{n+2}}{n+2}=\frac{3n+7}{n+2}$

(일련이 있어야 문제가 풀릴 것 같으니..)

$\Rightarrow \left\{\frac{a_n}{n}\right\}$을 $\{b_n\}$으로 두자!

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n-b_{n+2}\} = \lim_{n\to\infty}(b_1-\cancel{b_3}+b_2-\cancel{b_4}+\cancel{b_3}-\cancel{b_5}+\cancel{b_4}-b_6 \cdots$

$+\cancel{b_{n-4}}-\cancel{b_{n-2}}+\cancel{b_{n-3}}-\cancel{b_{n-1}}+\cancel{b_{n-2}}-b_n+\cancel{b_{n-1}}-b_{n+1}$

$+\cancel{b_n}-b_{n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\{b_1+b_2-b_{n+1}-b_{n+2}\}$

$b_1=4,\ b_2=\frac{7}{2}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}b_{n+2}=3$

$\therefore S=4+\frac{7}{2}-3-3=\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $\lvert g(x)\rvert$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

$\ln|f(x)| = \ln x \circ |f(x)|$ 인데 $y=\ln x$는 극점이 없으니

$y=|f(x)|$에서 극점의 위치가 결정나겠군.

(가) ⇒ $x\neq1$이면 $f(x)\neq0$이군

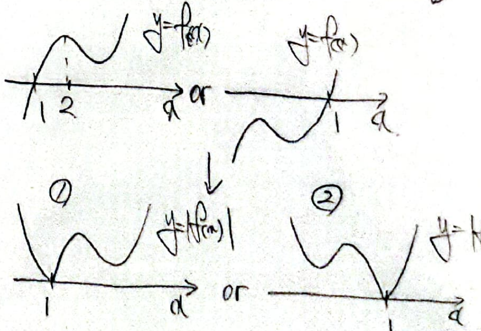
(나) ⇒ $g(2)\le0$이겠군 (양수이면 극대가 극소가 되니까) ← 그래프에서!

(음수이거나 극대는 그냥 극대니까)

$y=g(x)$가 음수인 극대가 있으니까 $y=|f(x)|$가 극대가 있겠군.

(양수인 극대면 (그림) 로 가능하므로 $y=|f(x)|$가 무조건 극대가 있지는 않다.)

삼차함수는 무조건 실근을 하나 이상 가지므로 $f(x)$는 $x=1$에서만 근을 가진다!



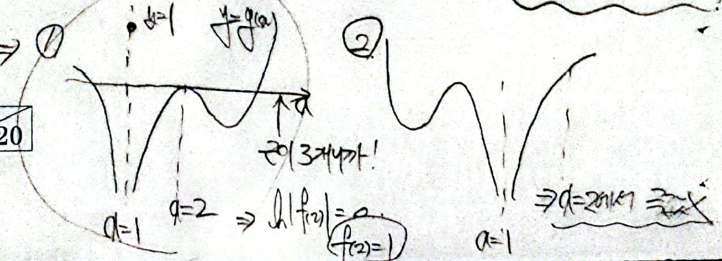
① ②

$f(1)=0$ 최고차항 계수: $\frac{1}{2}$, 삼차함수

$f(2)=1$

$f'(2)=0$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2-6x+10)$



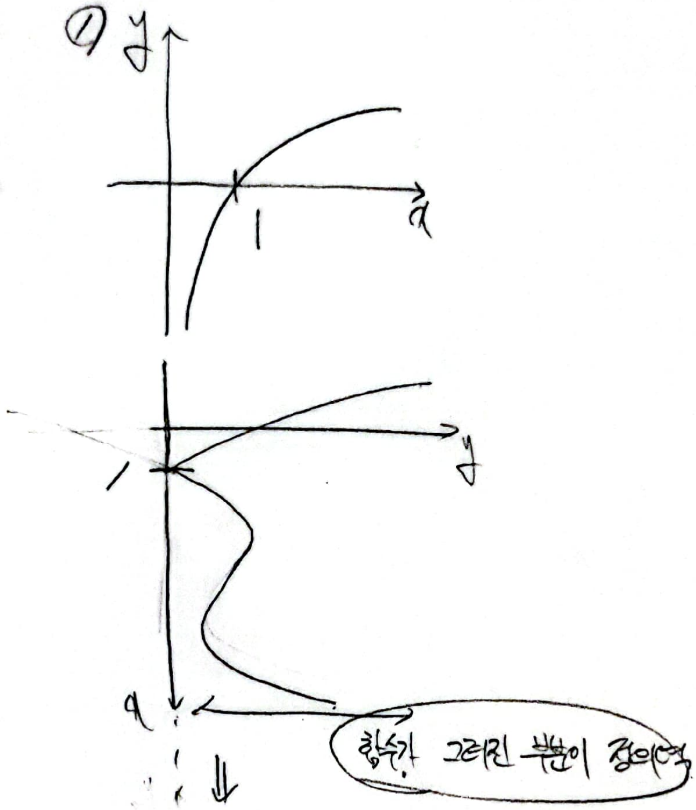
⇒ ① ②

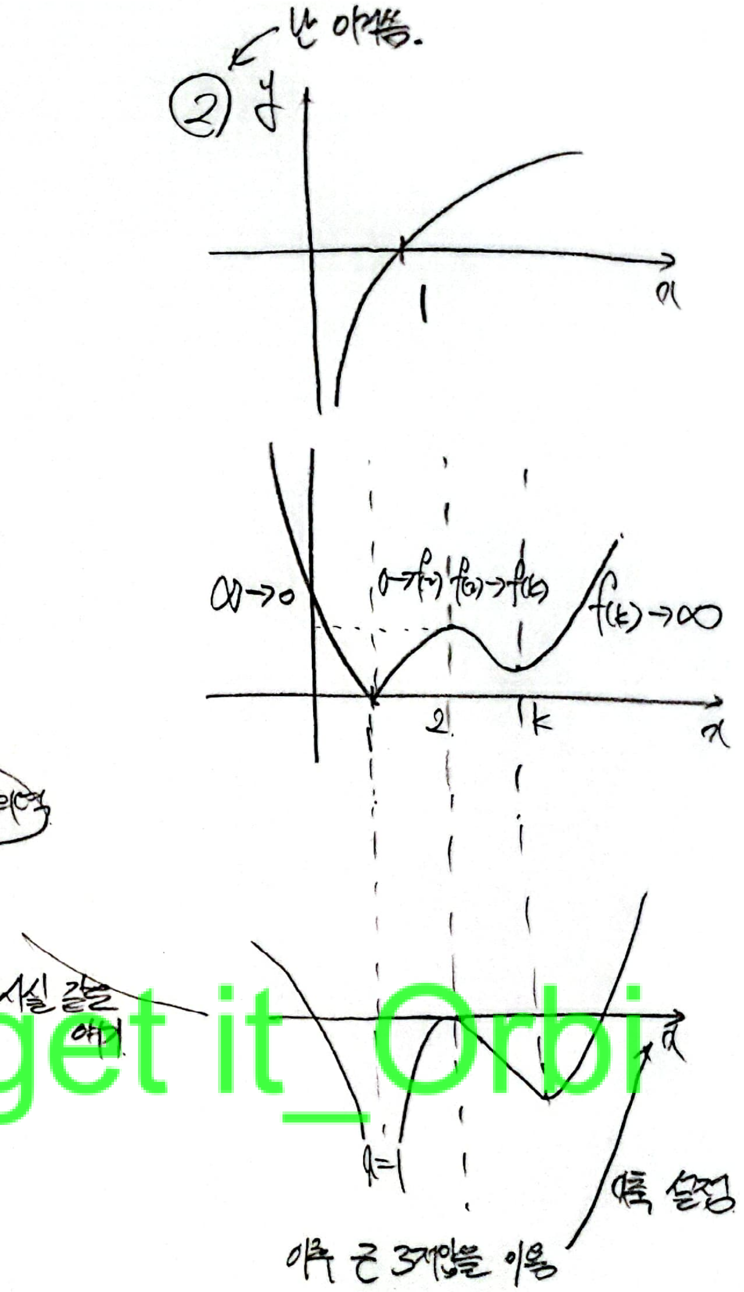
근이 3개니까!

$x=1$ $x=2$ ⇒ $\ln|f(2)|=0$ ($f(2)=1$) $x=1$

⇒ $x=2$에서 극소X

* 합성함수 그래프 어케그렸노





풀

* $f(1)=0$ $y=f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수.

$f(2)=1$

$f'(2)=0$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+ax+b)$$

$$f(2)=\frac{1}{2}(4+2a+b)=1$$

$$\underline{2a+b=-2}$$

$$f'(2)=\frac{1}{2}(4+2a+b)+\frac{1}{2}(4+a)=0$$

$$\underline{3a+b=-8}$$

$a=-6$
$b=10$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2-6x+10)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-6x+10)+\frac{1}{2}(x-1)(2x-6)$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2-14x+16)=\frac{1}{2}(3x-8)(x-2)$$

$$\therefore f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\left(\frac{64}{9}-\frac{48}{3}+10\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times\left(\frac{64}{9}-\frac{18}{3}\right)$$

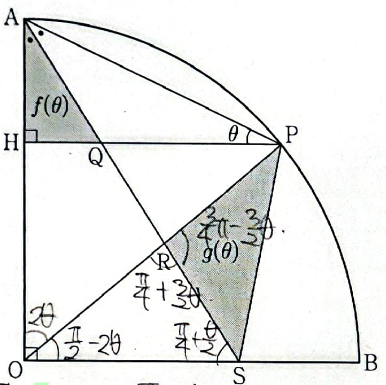
$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{10}{9}=\frac{25}{27}$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{8}{3}\right)=\ln\frac{25}{27}$$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

50



sol(1)

in $\triangle AHP$, $2\bullet = \frac{\pi}{2}-\theta \Rightarrow \bullet = \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

$\triangle$AOP는 이등변삼각형 $\Rightarrow \angle AOP = 2\theta \Rightarrow$ in $\triangle POH$, $\overline{OH}=\cos 2\theta$

$\Rightarrow \overline{AH} = 1-\cos 2\theta \Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\angle ORS = 2\theta + \bullet = \frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta \Rightarrow \angle OSR = \pi - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$= \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$

$\overline{OS} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ (in $\triangle AOS$)

$g(\theta) = \frac{1}{2}\overline{RS}\cdot\overline{PR}\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\overline{RS}\cdot(\overset{\overline{PO}}{1}-\overline{OR})\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{2}\theta\right)$

in $\triangle ORS$ $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta\right)} = \frac{\overline{OR}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\overline{RS}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)} = \frac{\overline{RS}}{\cos 2\theta}$

$\Rightarrow$ 계산

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{x^2-ax}{e^x} = (x^2-ax)e^{-x} = x(x-a)e^{-x}$$

미분을 하든 뭘 하든 이 꼴로 고치는게 계산이 쉽다!

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x-t)+f(t)$$

$(t, f(t))$에서의 접선이군!

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t) = 5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

16

실전 $y=f(x)$의 그래프를 그려야겠는데...

$f'(x) = (2x-a)e^{-x} - (x^2-ax)e^{-x}$

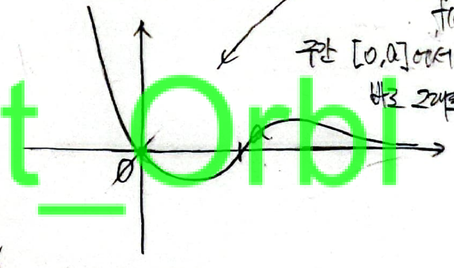
$= -(x^2-(a+2)x+a)e^{-x}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$f(0) = f(a) = 0$

구간 $[0, a]$에서 $f(x)<0$임을 아므로 바로 그래프를 그릴 수 있다.



접선의 성질이 딱 그 점과 근처가 다른 것은 접선 뿐이므로

$f''(5)=0 \rightarrow f''(x) = (x^2-(a+2)x+a)e^{-x} - (2x-a-2)e^{-x}$

$= (x^2-(a+4)x+2a+2)e^{-x}$

$f''(5) = (25-5a-20+2a+2)e^{-5} = 0$

$\Rightarrow 7-3a=0$

$a=\frac{7}{3}$

접선의 성질이 좌우에서 다른 것은 극점 뿐이므로 k는 $f'(k)=0$인 모든 점 (여기선 그래프 지형상 $f'(x)=0$이면 극점)

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$f'(x)$는 $f(x)$ 구하면서 구해놓은 것!

$\frac{q}{p} = a+2 = \frac{13}{3}$ (by. 근과 계수의 관계)

$\therefore p+q=16$