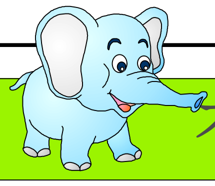
2022학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ③ (출제자 : 20 김태희)

[출제의도] 간단한 로그 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = -\frac{3}{2}$

2) [정답] ④ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x-2} &= \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)(x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} x(x+1) \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

3) [정답] ⑤ (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a = 3$, $4ar^2 = ar^4$ 이다.

$a > 0$ 이므로 식을 정리하면 $r^2(r^2 - 4) = 0$ 이다.

이때, 공비가 양수이므로 $r^2 = 4$ 이고, $r = 2$ 이다.

따라서 $a_4 = ar^3$ 이므로 $a_4 = 24$ 이다.

4) [정답] ① (출제자 : 20 김유진)

[출제의도] 부정적분을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (6x + a)\,dx \\ &= 3x^2 + ax + C \ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$ 이다.

또한, $f(2) = 12 + 2a + 1 = 7$ 이므로 $a = -3$ 이다.

5) [정답] ② (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ 이므로 $\sin\theta = 3(1 - \sin^2\theta) - 1$ 이고,

식을 정리하면 $3\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$ 이다.

그러므로 $\sin\theta = \frac{2}{3}$ 또는 $\sin\theta = -1$ 이다.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\sin\theta > 0$ 이므로 $\sin\theta = \frac{2}{3}$ 이다.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ 에 $\sin\theta = \frac{2}{3}$ 를 대입하면 $\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ 이고,

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\cos\theta > 0$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다.

따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

6) [정답] ② (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는

$x = 1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1+} g(x) = g(1)$ 에서 $f(1) = f(3)$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 축의 방정식은 $x = 2$ 이다.

$f(x) = (x-2)^2 + k$ (k는 상수)라 하면 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서

미분가능하므로 $\lim_{x \to 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ 이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1-} \frac{\{(x-2)^2 + k\} - (1+k)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = -2 \text{ 이고,}\end{aligned}$$

$\lim_{x \to 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{f(3)x - f(3)}{x-1} = f(3) = 1 + k$ 이므로

$k = -3$ 이다.

따라서 $g(2) = 2f(3) = -4$ 이다.

7) [정답] ③ (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log a_k}{2} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{2}$ 이므로

$\dfrac{\log(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n)}{2} = \log(n+3)$ 에서

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n = (n+3)^2$ 이다.

$n=3$ 을 대입하면 $a_1 \times a_2 \times a_3 = 36$ 이고,

$n=6$ 을 대입하면 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 81$ 이다.

따라서 $a_4 \times a_5 \times a_6 = \dfrac{9}{4}$ 이다.

8) [정답] ① (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x) - 3x^2}{x} = 6$ 이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ (a 는 상수)라 하자.

또한 $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = f'(0)$ 에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$, 즉 $f(-1) = 0$ 이다.

$\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{f'(-1)}{-2} = f'(0)$ 이므로

$\dfrac{-3+a}{-2} = a$, $a = 1$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ 이므로

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + C$ (C 는 적분상수)이고

$f(-1) = 1 + C = 0$ 이므로 $C = -1$ 이다.

따라서 $f(1) = 5 + C = 4$ 이다.

9) [정답] ④ (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 등차수열의 합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로,

(가) 조건에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} : \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k} &= a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1} : a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2} \\ &= \frac{m(a_1 + a_{2m-1})}{2} : \frac{(m-1)(a_2 + a_{2m-2})}{2} \\ &= ma_m : (m-1)a_m \\ &= m : m-1 \text{ 이고,}\end{aligned}$$

$m : m-1 = 6 : 5$ 이므로 $m = 6$ 이다.

(나) 조건에서

$a_m : a_{m+1} = a_6 : a_7 = 3 : 4$ 이므로 $4a_6 = 3a_7$ 이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$a_5 = 6$ 이므로 $a_6 = 6 + d$, $a_7 = 6 + 2d$ 이다.

$4a_6 = 3a_7$ 이므로 $d = 3$ 이고, $a_6 = 9$ 이다.

따라서 $a_{11} = a_6 + 5d = 9 + 15 = 24$ 이다.

10) [정답] ① (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 추론할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$ 의 그래프는

원점에 대하여 대칭이고, $f(0) = 0$ 이다.

$g(x) = |f(x)| - f(x)$ 라 하면,

$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \ge 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \ge 0$ 이므로 $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx = 0$ 을 만족시키려면

닫힌구간 $[0, a]$ $(a \ge 0)$ 또는 닫힌구간 $[a, 0]$ $(a < 0)$ 에서

$g(x) = 0$ 이어야 한다.

그러므로 조건 (나)에 의해 $-3 \le x \le 0$ 에서 $g(x) = 0$ 이어야 한다.

즉, $-3 \le x \le 0$ 에서 $f(x) \ge 0$ 이다.

원점에 대해 대칭이면서 $-3 \le x \le 0$ 에서 $f(x) \ge 0$ 인 함수 $f(x)$ 는

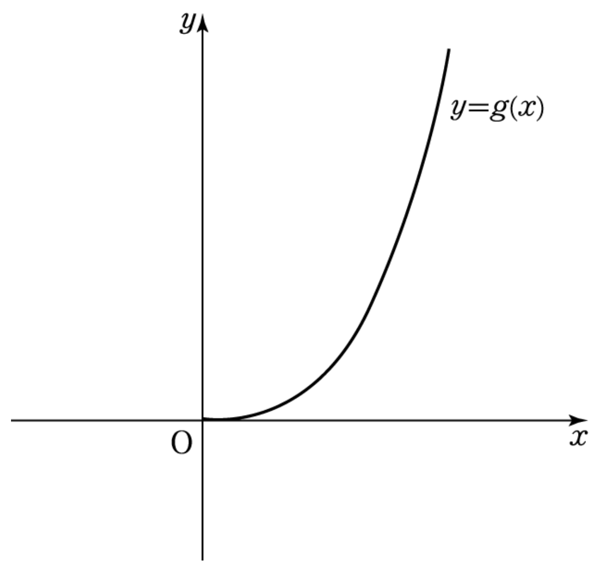
다음 두 가지 경우로 나뉜다.

i) $f(x) = -kx^3 + \alpha x$ ($k > 0$, $\alpha \le 0$)

ii) $f(x) = kx(x+\alpha)(x-\alpha)$ ($k > 0$, $\alpha > 0$)

i) $f(x) = -kx^3 + \alpha x$ ($k > 0$, $\alpha \le 0$)

함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려보자.

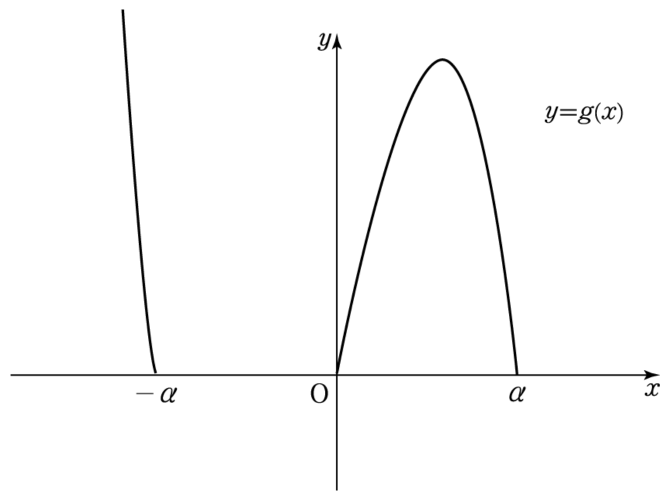


$\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx = 0$ 을 만족시키는 a 의 최솟값이 존재하지 않으므로

(나) 조건에 모순이다.

ii) $f(x) = kx(x+\alpha)(x-\alpha)$ ($k > 0$, $\alpha > 0$)

함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려보자.

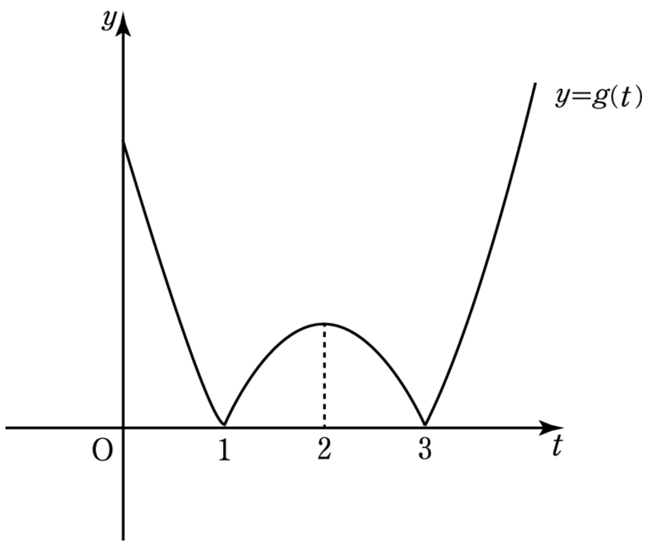


$\int_0^a g(x)\,dx = 0$ 을 만족시키는 a 의 최솟값은 $-\alpha$ 이므로 $\alpha = 3$ 이다.

ⅰ), ⅱ)에서 함수 $f(x)$ 를
$f(x) = kx(x+3)(x-3)$ $(k>0)$ 이라 할 수 있다.
$f(1) = -8\sqrt{3}$ 이므로 $k = \sqrt{3}$ 이고, $f(x) = \sqrt{3}x(x+3)(x-3)$ 이다.
따라서 $f'(x) = \sqrt{3}(3x^2-9) = 3\sqrt{3}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 에서 극댓값 18 을 갖는다.

11) [정답] ③ (출제자 : 21 김서원)
[출제의도] 속도와 거리 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
$f(t) = (t-1)(t-3)$ 이고
$f'(t) = 2t-4$ 이다.
$g(t) = |f(t)|$ 이므로 $g(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$g(t)$ 의 그래프가 감소하는 구간은
닫힌구간 $[0, 1]$, 닫힌구간 $[2, 3]$ 이다.
그러므로 점 Q 의 속도가 감소하는 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_2^3 |f(t)|\,dt$$
$$= \int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt + \int_2^3 (-t^2+4t-3)\,dt$$
$= 2$ 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 20 이도윤)
[출제의도] 지수함수의 그래프와 직선을 활용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]
점 B 를 y 축에 대해 대칭이동시킨 점을 B′ 이라 하자.
이때 $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{B'C}$ 이므로 점 C 는 삼각형 ABB′ 의 외심이고,
삼각형 ABB′ 은 직각삼각형이다.
직선 AB 의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직선 AB′ 의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 이다.
점 B 의 좌표를 (t, a^t) 이라 하자.
이 점이 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x+5$ 위에 있으므로 $a^t = \frac{\sqrt{3}}{3}t+5$ …… ㉠

또한 점 B′ 의 좌표는 $(-t, a^t)$ 이고, 직선 AB′ 은
기울기가 $-\sqrt{3}$ 이면서 점 B′ 를 지나므로 직선 AB′ 의 방정식은
$y = -\sqrt{3}(x+t)+a^t = -\sqrt{3}x-\sqrt{3}t+a^t$ 이고
㉠ 에서 $a^t = \frac{\sqrt{3}}{3}t+5$ 이므로 $y = -\sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}t+5$
이때, 점 A 는 직선 AB 와 직선 AB′ 의 교점이므로
두 직선의 방정식을 연립하면
$\frac{\sqrt{3}}{3}x+5 = -\sqrt{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}t+5$, $x = -\frac{t}{2}$
즉, 점 A 의 좌표는 $\left(-\frac{t}{2}, a^{\frac{t}{2}}\right)$ 이다.
이 점이 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x+5$ 위에 있으므로
$a^{\frac{t}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}t+5$ …… ㉡

㉠ 과 ㉡ 에 의해 $\frac{\sqrt{3}}{3}t+5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}t+5\right)^2$ 이고
이 방정식의 해는 $t = 4\sqrt{3}$ 과 $t = 20\sqrt{3}$ 이다.
$t = 20\sqrt{3}$ 일 때, $a^{\frac{t}{2}} = -5 < 0$ 에서 모순이다.
그러므로 $t = 4\sqrt{3}$ 이다.

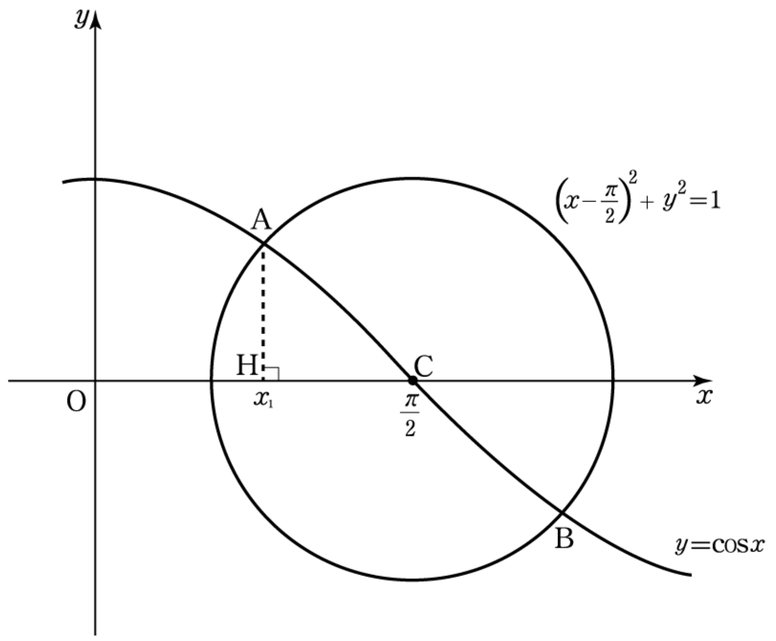
따라서 점 A 의 좌표는 $(-2\sqrt{3}, 3)$, 점 B 의 좌표는 $(4\sqrt{3}, 9)$ 이고
선분 AB 의 길이는 12 이다.

[별해]
직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x+5$ 가 x 축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고,
x 축과 직선 BC 가 평행하므로 엇각에 의해 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 이다.
삼각형 ABC 는 이등변삼각형이므로 $\angle CAB = \frac{\pi}{6}$ 이고, 점 A 에서 y 축에
내린 수선의 발을 H 라 하면 $\angle BAH = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle CAH = \frac{\pi}{3}$ 이다.
점 B 의 x 좌표를 t 라 하면 $\overline{BC} = \overline{AC} = t$ 이고
$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{t}{2}$ 이므로 점 A 의 x 좌표는 $-\frac{t}{2}$ 이다.
(이하 동일)

13) [정답] ⑤ (출제자 : 19 황주영)
[출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
ㄱ.
원 $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2 = 1$ 과 곡선 $y = \cos x$ 모두 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에 대하여
대칭이므로 두 점 A, B 는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이다. 따라서
$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $x_1+x_2 = \pi$ 이다. (참)

ㄴ.



점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\overline{\mathrm{AH}}=\cos x_1$이고 삼각형 AHC 는 직각삼각형이므로

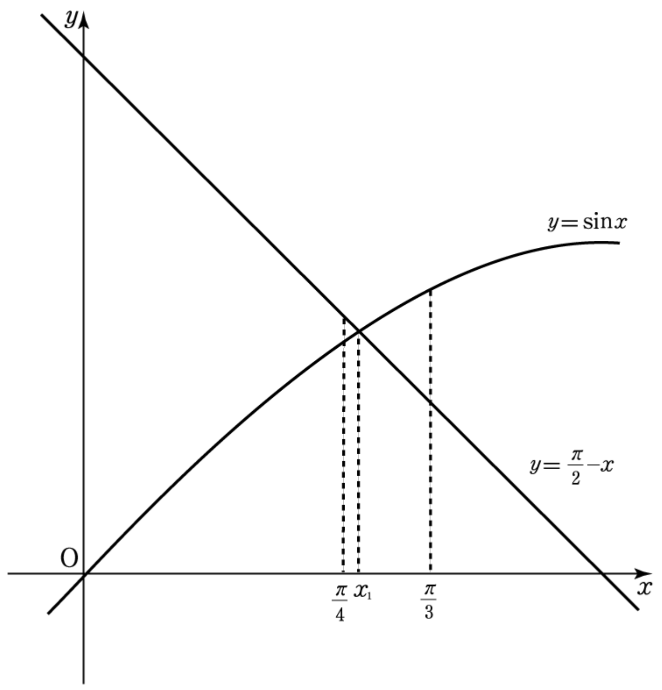
피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HC}}=\sin x_1$ 이다.

$\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{OC}}$ 이므로 $x_1+\sin x_1=\frac{\pi}{2}$ 이다. (참)

ㄷ.

ㄱ에 의하여 x_1 은 방정식 $x+\sin x=\frac{\pi}{2}$ 의 실근이다.

두 함수 $y=\sin x$ 와 $y=\frac{\pi}{2}-x$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



$y=\frac{\pi}{2}-x$ 와 $y=\sin x$ 에 각각 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{3}$ 을 대입해보면

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

위 그림에서 $\frac{\pi}{4}<x_1<\frac{\pi}{3}$ 임을 알 수 있다.

$x_1+x_2=\pi$ 이므로 $\frac{2}{3}\pi<x_2<\frac{3}{4}\pi$ 이다. (참)

14) [정답] ② (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 주기함수 조건을 활용하여 함수의 그래프를 추론하고 미분가능한 상황을 파악할 수 있는가?

[해설]

닫힌구간 $[0,4]$ 에서의 함수 $f(x)-x$ 를 $g(x)$ 라 하자.

(나) 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)+5$ 이므로

$f(x+4)-(x+4)=f(x)-x+1$, $g(x+4)=g(x)+1$ 이다.

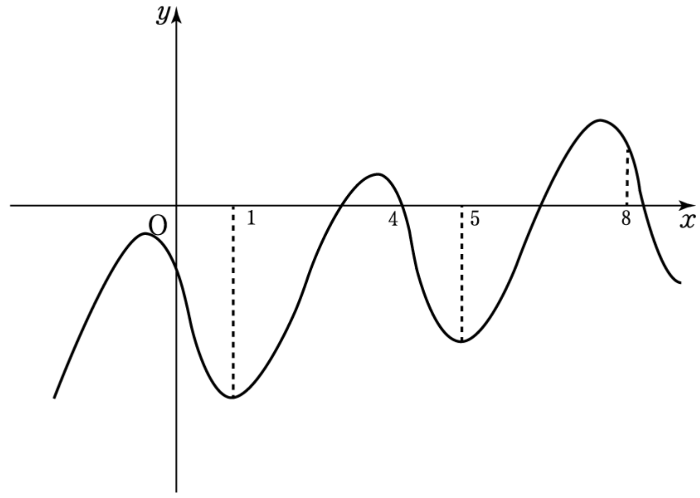
즉, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$g(x+4)=g(x)+1$ 을 만족시킨다.

닫힌구간 $[0,4]$ 에서 $g(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{27}{8}x^2-\frac{21}{4}x-1$,

$g'(x)=-\frac{3}{2}(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는

다음과 같다.



함수 $g(x)$ 는 $x=4m+1$ 에서 극솟값 $m-\frac{27}{8}$ 을 갖는다. (m 은 정수)

함수 $|g(x)|$ 가 열린구간 $(4n,4n+4)$ 에서 미분가능하려면

$n-\frac{27}{8}\geq 0$ 이어야 하므로,

$n\geq 4$일 때 함수 $|g(x)|$ 는 미분가능하다. ($\because n$ 는 자연수)

즉, $k=4$ 이다.

$$\int_{4k}^{4k+4}f(x)\,dx=\int_{16}^{20}f(x)\,dx$$

이때, $\int_{16}^{20}f(x)\,dx=\int_{12}^{16}f(x)\,dx+4\times 5$

$=\int_{8}^{12}f(x)\,dx+4\times(5\times 2)$

$=\int_{4}^{8}f(x)\,dx+4\times(5\times 3)$

$=\int_{0}^{4}f(x)\,dx+4\times(5\times 4)$ 이므로

$$\int_{16}^{20}f(x)\,dx=\int_{0}^{4}f(x)\,dx+4\times(5\times 4)$$

$$=\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{27}{8}x^2-\frac{17}{4}x-1\right)dx+80$$

$=82$ 이다.

15) [정답] ④ (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 파악할 수 있는가?

[해설]
임의의 자연수 m에 대하여 $a_m \geq 2$이면, $a_{m+1} = a_m + 11 \geq 2$이다.
즉, $a_m \geq 2$이면 m보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 2$이다.
또한 $a_m \geq 2$이면, $a_{m+1} = a_m + 11 \geq 2$이므로
$a_{m+1} < 2$이면서 $a_m \geq 2$일 수 없다.
즉, $a_m < 2$이면 m보다 작은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 2$이다.

그러므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.
i) $a_7 \geq 2$
ii) $a_7 < 2$, $a_8 \geq 2$
iii) $a_8 < 2$, $a_9 \geq 2$
iv) $a_9 < 2$, $a_{10} \geq 2$
v) $a_{10} < 2$
각각의 경우를 구해보자.

i) $a_7 \geq 2$
7보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 2$이므로
$a_{10} = a_7 + 33$이다. 따라서 $a_{10} = a_7 + 47$일 수 없다.

ii) $a_7 < 2$, $a_8 \geq 2$
$a_{10} = a_8 + 22$이므로
$a_8 = a_7 + 25$인 경우 $a_{10} = a_7 + 47$이다.
그러므로 $a_8 = (a_7)^2 + 4a_7 - 3 = a_7 + 25$이고
$a_7 = -7$일 때 ($\because a_7 < 2$), $a_{10} = a_7 + 47$이 성립한다.

iii) $a_8 < 2$, $a_9 \geq 2$
$a_{10} = a_9 + 11$이므로 $a_9 = a_7 + 36$인 경우
$a_{10} = a_7 + 47$이다.
$a_8 < 2$이기 위해서는 $(a_7)^2 + 4a_7 - 3 < 2$에서
$-5 < a_7 < 1$이어야 한다.

$a_9 \geq 2$이기 위해서는 $(a_8)^2 + 4a_8 - 3 \geq 2$에서
$a_8 \leq -5$ 또는 $a_8 \geq 1$이어야 한다.
한편, $a_8 = (a_7)^2 + 4a_7 - 3 = (a_7+2)^2 - 7 \geq 7$이므로
$-7 \leq a_8 \leq -5$ 또는 $1 \leq a_8 < 2$이다.
a_8의 범위에서 $a_8 = -7$일 때, $a_9 = 18$로 최대이므로 $a_9 \leq 18$이다.
그러므로 $a_9 - a_7 < 23 < 36$이고,
$a_{10} = a_7 + 47$일 수 없다.

iv) $a_9 < 2$, $a_{10} \geq 2$
$a_9 < 2$이기 위해서는 $(a_8)^2 + 4a_8 - 3 < 2$에서 $-5 < a_8 < 1$이다.
$-5 < a_8 < 1$이기 위해서는 $-5 < (a_7)^2 + 4a_7 - 3 < 1$에서
$-2 - 2\sqrt{2} < a_7 < -2 - \sqrt{2}$ 또는
$-2 + \sqrt{2} < a_7 < -2 + 2\sqrt{2}$이다.
한편, $a_9 = (a_8 + 2)^2 - 7 \geq -7$이므로 $-7 \leq a_9 < 2$이다.
a_9의 범위에서 $a_9 = -7$일 때, $a_{10} = 18$로 최대이므로 $a_{10} \leq 18$이다.
그러므로 $a_{10} - a_7 < 20 + 2\sqrt{2} < 47$이고,
$a_{10} = a_7 + 47$일 수 없다.

v) $a_{10} < 2$
$a_{10} < 2$이므로 $a_8 < 2$이고,
$a_8 < 2$이기 위해서는 $(a_7)^2 + 4a_7 - 3 < 2$에서
$-5 < a_7 < 1$이어야 한다.
그러므로 $a_{10} - a_7 < 7 < 47$이고,
$a_{10} = a_7 + 47$일 수 없다.

그러므로 $a_7 = -7$이고, $a_8 = 18$이다.
$a_m \geq 2$이면, m이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + 11$이므로
수열 $\{a_n\}$은 8번째 항 이후로는 공차가 11인 등차수열이다.
따라서 $a_{10} = 40$이고,
$\sum_{n=10}^{15} a_n = \frac{6(2 \times 40 + 5 \times 11)}{2} = 405$이다.

[출제자의 팁!]
$a_n \geq 2$인 경우가 이 문제에서는 더 관찰하기 쉽다.
그러므로 이 해설지에 쓴 순서대로 $a_n \geq 2$를 만족하는 a_n이 많은 경우를 먼저 계산해보는 것이 더 합리적인 방법일 것이다.
또한 ii)에서 $a_{10} = a_7 + 47$인 경우를 찾은 후에는 다른 경우는 찾지 않고 빠르게 답을 구한다면 이 문제를 훨씬 빨리 풀 수 있을 것이다.

16) [정답] 2 (출제자 : 21 김예찬)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]
$\sqrt[5]{64} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{-\frac{1}{5}} = 2$이다.

17) [정답] 17 (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]
곱의 미분법에 의해
$f'(x) = (2x^2 - 1) + 4x(x+3) = 6x^2 + 12x - 1$이므로
$f'(1) = 17$이다.

18) [정답] 5 (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
수열 $\{a_n b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = -\frac{1}{n+2}$ $(n \geq 1)$이므로

$$a_n b_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n+2} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \ (n \geq 2)$$ 이다.

그러므로 $a_4 b_4 = \frac{1}{30}$이고 $a_4 = \frac{1}{6}$이므로 $b_4 = \frac{1}{5}$이다.

따라서 $\frac{1}{b_4}=5$ 이다.

19) [정답] 160 (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 정적분을 활용하여 함수를 추론할 수 있는가?

[해설]

$f(0)=\int_3^0 g(t)\,dt$, $f(3)=\int_0^3 g(t)\,dt$ 이므로 $f(3)=-f(0)$ 이다.

또한, 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=2g(x)$ 이므로 $f'(1)=2g(1)=0$ 이다.

$f(1)=0$, $f'(1)=0$ 이므로

$f(x)=-(x-1)^2(x-k)$ (k 는 상수)이다.

$f(3)=-f(0)$ 에서 $4k-12=-k$ 이므로 $k=\frac{12}{5}$ 이다.

따라서 $f(x)=-(x-1)^2\left(x-\frac{12}{5}\right)$ 이고,

$f(-4)=160$ 이다.

20) [정답] 4 (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 미분을 이용하여 방정식의 실근을 파악할 수 있는가?

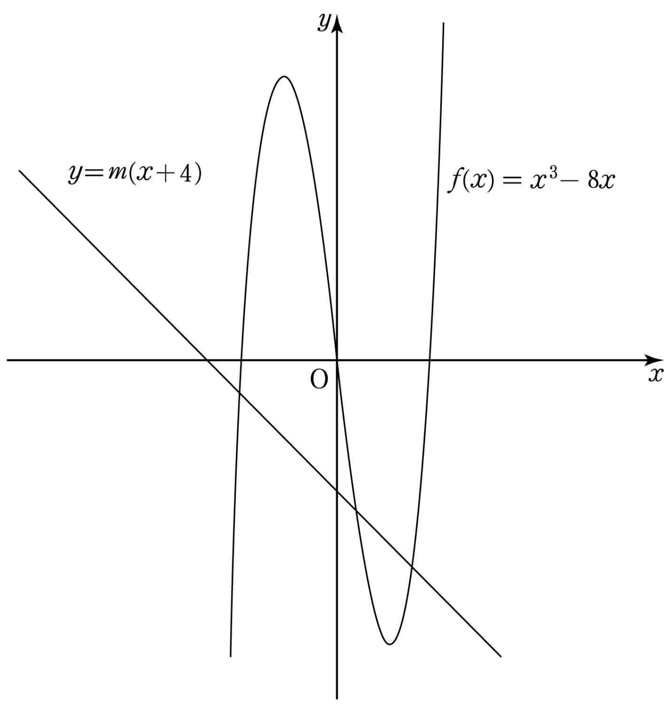
[해설]

$|f(x)-mx-4m|=|f(x)-m(x+4)|=m(x+4)$ 에서

$f(x)\ge m(x+4)$ 일 때, $f(x)=2m(x+4)$,

$f(x)<m(x+4)$ 일 때, $-f(x)=0$ 을 만족하는 x 를 찾으면 된다.

i) $m<0$ 일 때

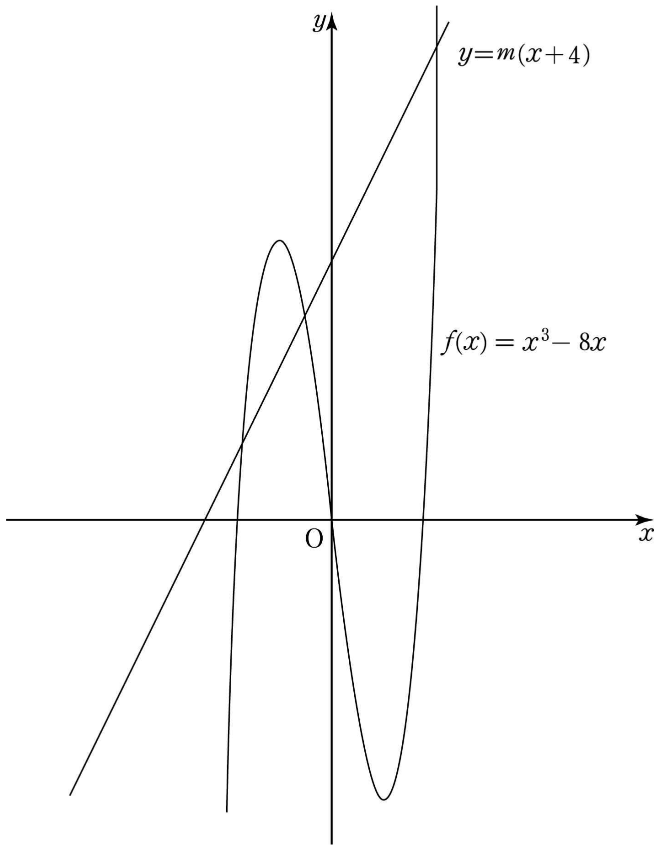


위 그림과 같이 $f(x)<m(x+4)$ 일 때, $f(x)=0$ 을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

($\because$ $m<0$ 이면 $x>-4$ 일 때, $m(x+4)<0$ 이므로 $f(x)=0$ 이 되는 x가 존재하지 않는다.)

$f(x)\ge m(x+4)$ 일 때, 방정식 $f(x)=2m(x+4)$ 의 실근의 개수가 5 가 될 수 없으므로 $m\ge 0$ 이다.

ii) $m\ge 0$ 일 때



위 그림과 같이 $f(x)<m(x+4)$ 일 때, $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 개수가 3 이다.

($\because$ $m>0$ 이면 $x>-4$ 일 때, $m(x+4)>0$ 이므로 $f(x)=0$ 이 되는 모든 x 에서 모두 실근을 가진다.)

따라서 $f(x)\ge m(x+4)$ 일 때, $f(x)=2m(x+4)$ 를 만족시키는 x 의 개수가 2 이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y=2m(x+4)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 한 점에서 접해야 하므로 점 $(-4,0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 방정식을 구해보자.

접점의 x 좌표를 t 라 할 때,

접선의 방정식은 $y=(3t^2-8)(x-t)+t^3-8t$ 이고

이 식에 점$(-4,0)$ 을 대입하면 $(t+4)(3t^2-8)=t^3-8t$ 이다.

식을 정리하면 $(t+2)(t^2+4t-8)=0$ 이므로

$t=-2$ 또는 $t=-2\pm2\sqrt{3}$ 이다.

여기서 $t=-2+2\sqrt{3}$ 이면 $2m=3t^2-8=40-24\sqrt{3}<0$ 이므로 $t\ne-2+2\sqrt{3}$ 이다.

$t=-2-2\sqrt{3}$ 일 때, $t<-4$ 이므로 $f(x)<m(x+4)$ 가 되어 접점의 x 좌표 t 가 $|f(x)-mx-4m|=mx+4m$ 의 실근이 될 수 없다.

따라서 $t=-2$ 이므로 $m=\frac{3t^2-8}{2}=2$ 이고 $m^2=4$ 이다.

21) [정답] 7 (출제자 : 20 정원철)

[출제의도] 삼각형의 닮음과 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

삼각형 BMA 와 삼각형 MPA 에서 $\angle$BAM 은 공통이고 $\angle$ABM $=$ $\angle$AMP 이므로 삼각형 BMA 와 삼각형 MPA 는 서로

닮음이다. 또한, 삼각형 BMC 와 삼각형 MQC 에서 $\angle$BCM 은 공통이고 $\angle$CBM = $\angle$CMQ 이므로 삼각형 BMC 와 삼각형 MQC 는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{CM}} = k$ 라 하자.

$\overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 $k : \overline{\mathrm{AB}} = 6 : k$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{k^2}{6}$ 이다.

$\overline{\mathrm{CM}} : \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{CQ}} : \overline{\mathrm{CM}}$ 이므로 $k : \overline{\mathrm{CB}} = 3 : k$ 에서 $\overline{\mathrm{CB}} = \frac{k^2}{3}$ 이다.

$\angle\mathrm{ABM} = \angle\mathrm{AMP}$, $\angle\mathrm{CBM} = \angle\mathrm{CMQ}$ 이고

$\angle\mathrm{AMP} + \angle\mathrm{CMQ} = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ABM} + \angle\mathrm{CBM} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$4k^2 = \frac{k^4}{36} + \frac{k^4}{9} - 2 \times \frac{k^2}{6} \times \frac{k^2}{3} \times \cos\frac{\pi}{3}$ 이다.

$4k^2 = \frac{k^4}{12}$ 에서 $k = 4\sqrt{3}$ ($\because k > 0$)이다.

$\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{BA}} - \overline{\mathrm{PA}} = \frac{k^2}{6} - 6 = 2$,

$\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{QC}} = \frac{k^2}{3} - 3 = 13$ 이다.

삼각형 BPQ 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 2^2 + 13^2 - 2 \times 2 \times 13 \times \cos\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 147$ 에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 7\sqrt{3}$ ($\because \overline{\mathrm{PQ}} > 0$)이다.

$\angle\mathrm{PMQ} = \pi - (\angle\mathrm{AMP} + \angle\mathrm{CMQ}) = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

삼각형 MPQ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면,
삼각형 MPQ 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PMQ})} = 2R$ 에서 $\frac{7\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 14 = 2R$ 이므로

$R = 7$ 이다.

22) [정답] 24 (출제자 : 21 심현재, 19 정재훈)

[출제의도] 주어진 상황을 만족시키는 함수를 추론할 수 있는가?

[해설]

실수 α 에 대하여 $x = \alpha$ 가 방정식 $(f \circ f)(x) = x$, 즉 $f(f(x)) = x$ 의 한 실근이라고 하면 다음과 같은 두 가지 경우 중 하나이다.

① $f(\alpha) = \alpha$ 일 때

α 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표이다.

② $f(\alpha) = \beta$ 이고 $f(\beta) = \alpha$ 일 때 (β 는 $\alpha \neq \beta$ 인 실수)

곡선 $y = f(x)$ 는 두 점 (α, β), (β, α) 를 지나고, 이 두 점을 모두 지나는 직선의 기울기는 $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1$ 이다.

$(x - 2t)(x + t) \leq 0$ 을 t 의 범위에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

$t > 0$ 일 때, $-t \leq x \leq 2t$

$t < 0$ 일 때, $2t \leq x \leq -t$

$t = 0$ 일 때, $x = 0$

(가) 조건에서 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 5 인 것을 알 수 있다.
즉, 함수 $f(x)$ 는 직선 $y = x$ 와 서로 다른 세 점에서 만나고,
$f(\alpha) = \beta$ 이고 $f(\beta) = \alpha$ 인 서로 다른 두 실수 α, β 가 존재한다.

또한, 함수 $f(x)$ 가 직선 $y = x$ 와 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표를 각각 p, q, r 라 하면, 방정식 $(f \circ f)(x) = x$ 의 실근의 대소 관계는 $p < \alpha < q < \beta < r$ 이다.

(나) 조건에서

$k = -2$ 일 때, 즉 함수 $f(x)$ 의 정의역이 $-4 \leq x \leq 2$ 일 때를 살펴보자.

$\lim_{t \to -2-} g(t) - \lim_{t \to -2+} g(t) = 2$ 를 만족시키려면

방정식 $(f \circ f)(x) = x$ 가 $x = -4$, 2 에서 실근을 가져야 하므로

$f(f(2)) = 2$, $f(f(-4)) = -4$ 이다.

$k = 4$ 일 때, 즉 함수 $f(x)$ 의 정의역이 $-4 \leq x \leq 8$ 일 때를 살펴보자.

$\lim_{t \to 4+} g(t) - \lim_{t \to 4-} g(t) = 2$ 를 만족시키려면

방정식 $(f \circ f)(x) = x$ 가 $x = -4$, 8 에서 실근을 가져야 하므로

$f(f(8)) = 8$, $f(f(-4)) = -4$ 이다.

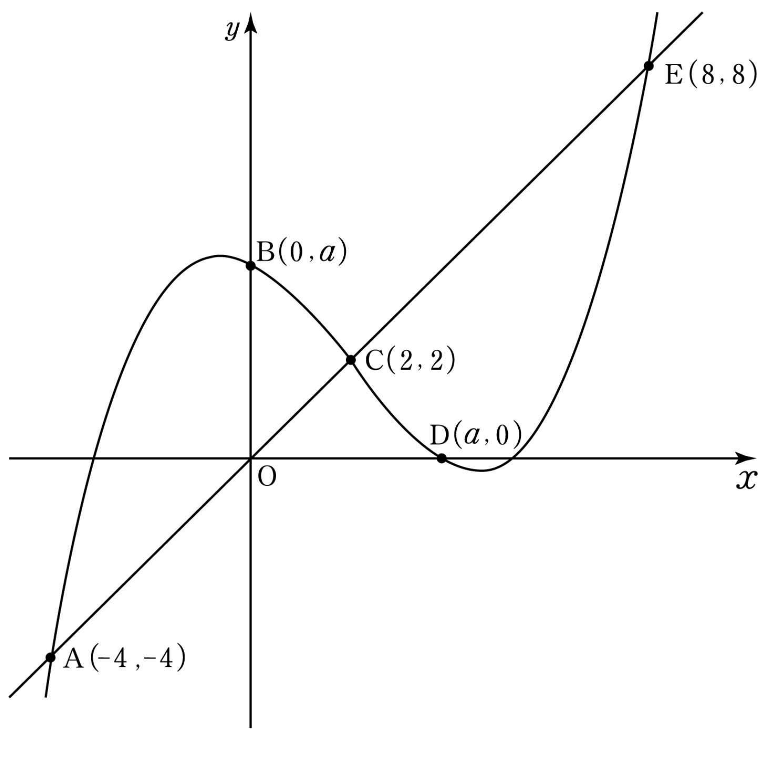
(다) 조건에서 함수 $g(t)$ 는 $t = 0$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$f(f(0)) = 0$ 이다.

즉, 방정식 $(f \circ f)(x) = x$ 는 $x = -4$, 0, 2, 8, a 를 실근으로 갖는다. (a 는 실수)

(가) 조건에서 $-4 < a < 8$ 이고,
$f(2) = 2$ 이므로 실수 a 의 범위는 $2 < a < 8$ 이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 에 대하여 ① 을 만족시키는 x 의 값은 -4, 2, 8 이고, ② 를 만족시키는 x 의 값은 0, a 이다.
즉, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)-x=p(x+4)(x-2)(x-8)$ 이라 하고 (p 는 양수)
$f(0)=a$, $f(a)=0$ 을 대입하면
$f(0)=64p=a$, $-a=p(a+4)(a-2)(a-8)$ 이고
$-64=(a+4)(a-2)(a-8)$ 에서
$a^3-6a^2-24a+128=0$ 이다.
즉, $(a-4)(a^2-2a-32)=0$

이때, $f(0)=a$ 는 정수이므로 $a=4$, $p=\frac{1}{16}$ 이다.
따라서 $f(x)-x=\frac{1}{16}(x+4)(x-2)(x-8)$ 이고,
$f(10)=24$ 이다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 20 최연조)

[출제의도] 간단한 이항분포의 분산을 계산할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=20$ 이다.

24) [정답] ① (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

다항식 $(3x-1)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_r(-1)^{5-r}(3x)^r$ 이다.

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_5\mathrm{C}_2\times(-1)^3\times3^2=-90$ 이다.

25) [정답] ③ (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 표본평균과 모평균을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

각 확률의 합은 1이므로 $a+b=\frac{5}{8}$

첫 번째로 추출한 표본을 X_1, 두 번째로 추출한 표본을 X_2라 하자.

$\mathrm{P}(\overline{X}=8)$일 때는 $X_1=6$, $X_2=10$인 경우 또는 $X_1=10$, $X_2=6$인 경우이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}=8)=b\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times b=\frac{3}{4}b=\frac{3}{16}$

그러므로 $b=\frac{1}{4}$이고 $a=\frac{3}{8}$이다.

이때, $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{4}+10\times\frac{3}{8}=6$이고

$\mathrm{V}(X)=(-4)^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{3}{8}=12$ 이다.

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$ 이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=6$

26) [정답] ② (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 중복순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

국어 수업을 듣는 학생이 한 명인 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\times{}_2\Pi_5=192$

영어 수업을 듣는 학생이 한 명인 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\times{}_2\Pi_5=192$

국어 수업을 듣는 학생과 영어 수업을 듣는 학생이 모두 한 명인 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=30$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $192+192-30=354$이다.

27) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 주어진 조건으로부터 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

직선 $ax+by+c=0$의 기울기가 -2가 아닌 사건을 A라 하고,

직선이 점 $(0,\ -3)$을 지나지 않는 사건을 B라 하자.

직선 $ax+by+c=0$의 기울기가 -2가 아니기 위해서는

$-\frac{a}{b}\neq-2$ 이다.

1부터 5까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 세 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$이고 이들 중 $a=2b$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(2,1,3)$, $(2,1,4)$, $(2,1,5)$, $(4,2,1)$, $(4,2,3)$, $(4,2,5)$로 총 6가지이다.

그러므로 $-\frac{a}{b}\neq-2$를 만족하는 경우의 수는 총 54가지이다.

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{54}{60}=\frac{9}{10}$이다.

이제, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구해보자.

$\frac{a}{b}\neq2$를 만족하면서 이 직선이 점 $(0,\ -3)$을 지나지 않을 경우의 수를 계산하기 위해 여사건을 활용하자.

$ax+by+c=0$의 직선이 점 $(0,\ -3)$을 지나기 위해서는 $c=3b$이다.

즉, $b\neq2a$이면서 $c=3b$를 만족하는 순서쌍을 생각해보면

이를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(4,1,3)$, $(5,1,3)$이며 총 2가지이다.

그러므로 $ax+by+c=0$의 기울기가 -2가 아니면서 그 직선이 점 $(0,\ -3)$을 지나지 않을 확률은 $\frac{54-2}{60}=\frac{52}{60}=\frac{13}{15}$이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 기울기가 -2가 아닐 때, 그 직선이 점 $(0,\ -3)$을 지나지 않을 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{26}{27}$이다.

28) [정답] ③ (출제자 : 21 박창수)

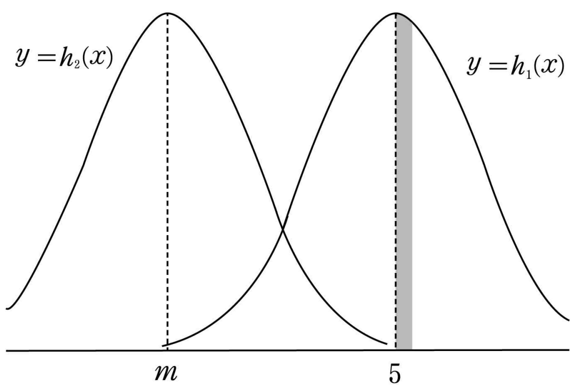
[출제의도] 정규분포에서 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X의 확률밀도함수를 $h_1(x)$, 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $h_2(x)$라 하자.

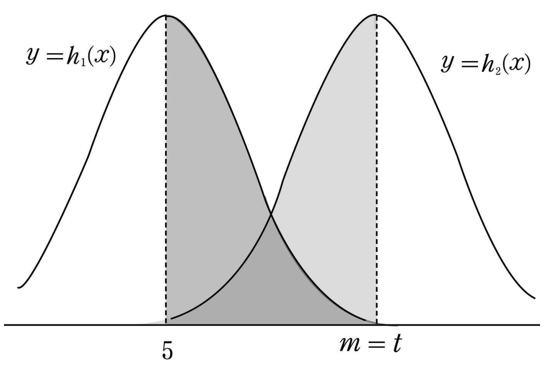
$\sigma(Y)=\sigma(X)$이므로 곡선 $y=h_2(x)$는 곡선 $y=h_1(x)$를 평행이동한 곡선이다.

i) $m < 5$ 일 때

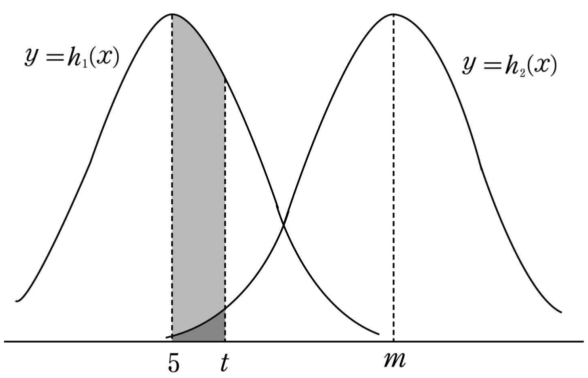


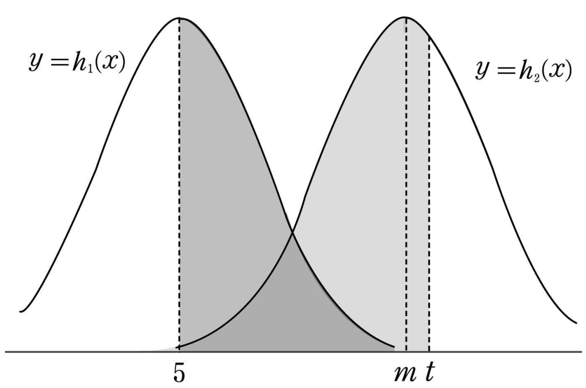
위 그림과 같이 $x > 5$ 일 때, $h_1(x) > h_2(x)$ 이므로 t 의 값의 관계없이 $\mathrm{P}(5 < X < t) > \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 이다. 이는 $t \geq 8$ 일 때, $\mathrm{P}(5 < X < t) \leq \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 라는 조건과 모순이다.
그러므로 $m \geq 5$ 이다.

ii) $m \geq 5$ 일 때



위 그림과 같이
$t = m$ 일 때, $\mathrm{P}(5 < X < t) = \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 이다.





$t < m$ 일 때, $\mathrm{P}(5 < X < t) > \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 이고
$t > m$ 일 때, $\mathrm{P}(5 < X < t) < \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 이다.
그러므로 $t \geq m$ 이다.
$t \geq 8$ 일 때 $\mathrm{P}(5 < X < t) \leq \mathrm{P}(5 < Y < t)$ 이므로 $m \leq 8$ 이고,
$m = \mathrm{E}(Y) = 8$ 일 때
최대이다.

따라서
$$\mathrm{P}(Y \leq 2) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{2-8}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \leq -2) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0.0228 \text{ 이다.}$$

29) [정답] 677 (출제자 : 20 김동연)
[출제의도] 주어진 상황의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]
갑과 을이 가지고 있는 공에 적힌 수의 차가 5가 되어야 하므로 두 공에 적힌 수는 1과 6, 2와 7, 3과 8로 이루어져 있어야 한다.

i) 갑이 1, 을이 6이 적힌 공을 가지고 있을 때
갑은 1이 적힌 공과 1보다 큰 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로
이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{4}$ 이다.
을은 1이 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 6이 적힌 공과 6보다 작은 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로 이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{4}{21}$ 이다.
그러므로 갑이 1, 을이 6이 적힌 공을 가지고 있을 확률은
$\dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{21} = \dfrac{1}{21}$ 이다.
(을은 1이 적힌 공을 가질 수 없으므로 '갑이 6, 을이 1이 적힌 공을 가지고 있는 경우'는 생각하지 않는다.)

ii) 갑이 2, 을이 7이 적힌 공을 가지고 있을 때
갑은 2가 적힌 공과 2보다 큰 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로
이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{14}$ 이다.
을은 2가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 7이 적힌 공과 7보다 작은 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로 이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{5}{21}$ 이다.
그러므로 갑이 2, 을이 7이 적힌 공을 가지고 있을 확률은
$\dfrac{3}{14} \times \dfrac{5}{21} = \dfrac{5}{98}$ 이다.

iii) 갑이 7, 을이 2가 적힌 공을 가지고 있을 때
갑은 7과 8이 적힌 공을 뽑아야 하므로 이를 만족시킬 확률은
$\dfrac{1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{28}$ 이다.
을은 7이 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 1과 2가 적힌 공을 뽑아야 하므로 이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{21}$ 이다.
그러므로 갑이 7, 을이 2가 적힌 공을 가지고 있을 확률은
$\dfrac{1}{28} \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{1}{588}$ 이다.

iv) 갑이 3, 을이 8이 적힌 공을 가지고 있을 때
갑은 3이 적힌 공과 3보다 큰 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로
이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \dfrac{5}{28}$ 이다.
을은 3이 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 8이 적힌 공과 8보다 작은 수가 적혀 있는 공을 뽑아야 하므로 이를 만족시킬 확률은 $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{2}{7}$ 이다.
그러므로 갑이 3, 을이 8이 적힌 공을 가지고 있을 확률은

$\frac{5}{28} \times \frac{2}{7} = \frac{5}{98}$ 이다.

(갑은 8 이 적힌 공을 가질 수 없으므로 '갑이 8, 을이 3 이 적힌 공을 가지고 있는 경우'는 생각하지 않는다.)

ⅰ) ~ ⅳ)에서 갑과 을이 가지고 있는 공에 적힌 수의 차가 5 가 될 확률은

$\frac{1}{21} + \frac{5}{98} + \frac{1}{588} + \frac{5}{98} = \frac{28+30+1+30}{588} = \frac{89}{588}$ 이므로

$p+q = 588+89 = 677$ 이다.

30) [정답] 720 (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 주어진 상황의 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

4 개의 파란 공 중 빨간색 상자에 들어가는 공의 개수를 x, 파란색 상자에 들어가는 공의 개수를 y, 노란색 상자에 들어가는 공의 개수를 z 라 하면

$x+y+z=4$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$

(가) 조건에 의해 빨간 공은 모든 상자에서 파란 공보다 많거나 같아야 하므로

6 개의 빨간 공 중 빨간색 상자에 들어가는 공의 개수를 $x+\alpha$, 파란색 상자에 들어가는 공의 개수를 $y+\beta$, 노란색 상자에 들어가는 공의 개수를 $z+\gamma$ 라 할 수 있다. $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0)$

이때 $x+\alpha+y+\beta+z+\gamma=6$ 이고, $x+y+z=4$ 이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$

한편, 5 개의 노란 공 중 빨간색 상자에 들어가는 공의 개수를 a, 파란색 상자에 들어가는 공의 개수를 b, 노란색 상자에 들어가는 공의 개수를 c 라 하면

$a+b+c=5$ $(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$

또한 (나) 조건에 의해 모든 상자는 상자의 색과 같은 색의 공이 적어도 하나 들어있어야 하므로

$x+\alpha \geq 1,\ y \geq 1,\ c \geq 1$ 이다.

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하기 위하여

$x+y+z=4,\ \alpha+\beta+\gamma=2,\ a+b+c=5,\ y \geq 1,\ c \geq 1$ … ㉠

을 만족시키는 순서쌍의 개수에서

$x+y+z=4,\ \alpha+\beta+\gamma=2,\ a+b+c=5,\ x+\alpha=0, y \geq 1,\ c \geq 1$ … ㉡

을 만족시키는 순서쌍의 개수를 빼자.

$x+y+z=4,\ y \geq 1$ 에서 $y=y'+1$ $(y' \geq 0)$이라 하면

$x+y'+z=3$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3$

$\alpha+\beta+\gamma=2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2$

$a+b+c=5,\ c \geq 1$ 에서 $c=c'+1$ $(c' \geq 0)$라 하면

$a+b+c'=4$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4$

그러므로 ㉠을 만족시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_4 = 900$

$x+y+z=4,\ x=0,\ y \geq 1$ 에서 $y=y'+1$ $(y' \geq 0)$이라 하면

$y'+z=3$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3$

$\alpha+\beta+\gamma=2$ 이고 $\alpha=0$ 에서

$\beta+\gamma=2$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2$

$a+b+c=5,\ c \geq 1$ 에서 $c=c'+1$ $(c' \geq 0)$이라 하면

$a+b+c'=4$ 이고 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4$

그러므로 ㉡을 만족시키는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_4 = 180$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 $900-180=720$

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 21 류은수)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+3n+2}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+2}+n\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^2+3n+2}+2n}{3n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}{3+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{4}{3}$$

24) [정답] ① (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$x=t^2+2\ln t$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t+\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2}{2(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

따라서 $t=\sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{2\{(\sqrt{3})^2+1\}^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{64}$$

25) [정답] ① (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2k}{k^2+4n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{2k}{n^2}}{\frac{k^2+4n^2}{n^2}}$$ 이다.

이때, $\dfrac{k}{n}=x_k$ 라 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2x_k}{(x_k)^2+4}$ 이고

적분구간은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}$ 의 k 에 1 과 $2n$ 을 대입하면 0 부터 2 까지이다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2x_k}{(x_k)^2+4}=\int_0^2\frac{2x}{x^2+4}dx$ 이다.

$x^2+4=t$ 로 치환하면 $2x\,dx=dt$, $0\to4$, $2\to8$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^2\frac{2x}{x^2+4}dx=\int_4^8\frac{1}{t}dt=\ln 2$

26) [정답] ② (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 도형에서 삼각함수의 극한을 적용할 수 있는가?

[해설]

점 C , 점 D 는 반원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{BDA}=\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

즉, $\overline{\mathrm{AC}}=2\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sin2\theta$ 이다.

$\angle\mathrm{DAC}=\dfrac{\pi}{2}-3\theta$ 이므로 삼각형 ACD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin2\theta\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)=2\sin2\theta\cos\theta\cos3\theta$ 이다.

선분 AE 는 각 DAC 의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AD}}=\cos\theta:\sin2\theta$ 이다.

즉, $f(\theta)=2\sin2\theta\cos\theta\cos3\theta\times\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin2\theta}$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\theta(\cos\theta+\sin2\theta)}=4$ 이다.

[별해]

점 C 는 반원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$ 이다. 즉 $\overline{\mathrm{AC}}=2\cos\theta$ 이다.

$\angle\mathrm{EAC}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\theta}{2}$ 이고 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{ACD}=2\theta$ 이므로

$\angle\mathrm{CEA}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

삼각형 ACE 에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{2\cos\theta}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin2\theta}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$ 이다.

따라서

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times\frac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{2\sin2\theta\cos^2\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

이고, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=4$ 이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

두 선분 M_1B_1, D_1E_1 과 두 호 M_1D_1, B_1E_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이를
두 선분 M_1E_1, D_1E_1 과 호 M_1D_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이와
두 선분 M_1B_1, M_1E_1 과 호 B_1E_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합으로 구해보자.

두 선분 M_1E_1, D_1E_1 과 호 M_1D_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 삼각형 $A_1M_1E_1$ 에서 부채꼴 $A_1M_1D_1$ 을 뺀 부분의 넓이이다.
점 E_1 은 선분 A_1C_1 의 중점이고, 점 M_1 은 선분 A_1B_1 의 중점이므로
$\overline{M_1E_1}=\overline{A_1M_1}=1$, $\angle A_1M_1E_1=\frac{\pi}{2}$ 이다. 그러므로 삼각형
$A_1M_1E_1$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{M_1E_1}\times\overline{A_1M_1}=\frac{1}{2}$ 이다.
부채꼴 $A_1M_1D_1$ 은 중심이 A_1, 반지름이 $\overline{A_1M_1}$ 이고, 중심각의 크기가
$\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$ 이다.
그러므로 두 선분 M_1E_1, D_1E_1 과 호 M_1D_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$ 이다.

두 선분 M_1B_1, M_1E_1 과 호 B_1E_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 $M_1B_1N_1E_1$ 에서 부채꼴 $N_1E_1B_1$ 을 뺀 부분의 넓이이다.
사각형 $M_1B_1N_1E_1$ 은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이므로 넓이는 1 이다.
부채꼴 $N_1E_1B_1$ 은 중심이 N_1, 반지름이 $\overline{N_1B_1}$ 이고, 중심각의 크기가
$\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이다.

그러므로 두 선분 M_1B_1, M_1E_1 과 호 B_1E_1 으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$1-\frac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 두 선분 M_1B_1, D_1E_1 과 두 호 M_1D_1, B_1E_1 으로 둘러싸인 부분의
넓이는 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+1-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\pi$ 이다.
$\angle A_1C_1B_1=\angle A_2C_2B_2=\frac{\pi}{4}$, $\angle A_1B_1C_1=\angle A_2B_2C_2=\frac{\pi}{2}$ 이므로
삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 서로 닮음이다.
$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}=k$ (k는 상수)라 하자.
삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 직각이등변삼각형이므로
$\angle A_1C_1B_1=\angle A_2C_2B_2=\angle B_2A_2C_2=\frac{\pi}{4}$ 이다.
선분 A_2B_2 와 선분 B_1C_1 이 평행하므로
$\angle A_2C_2C_1=\angle B_2A_2C_2=\frac{\pi}{4}$ 이다. ($\because$ 엇각)
한편, $\overline{A_2C_2}=\overline{A_2C_1}=\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}k$ 이고
$\overline{C_1C_2}=\dfrac{\overline{A_2C_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2k$ 이다.
$\overline{N_1C_1}=1$ 이므로 $\overline{C_2N_1}=2k-1$ 이고 $\overline{N_1B_2}=1$, $\overline{B_2C_2}=k$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 $(2k-1)^2+k^2=1$ 이고 $5k^2-4k=0$ 에서
$k=\frac{4}{5}$ 이다. ($\because k>0$)
그러므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 길이의 비는 $2:\frac{4}{5}$ 이고
넓이의 비는 $4:\frac{16}{25}$ 이다.
따라서 그림 R_2 에서 새롭게 색칠되는 부분의 넓이는 그림 R_1 에서
색칠되는 부분의 넓이의 $\frac{4}{25}$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이
$\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\pi$ 이고 공비가 $\frac{4}{25}$ 인 등비수열의 합이다.
따라서 구하고자 하는 값은 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\pi}{1-\frac{4}{25}}=\dfrac{25(4-\pi)}{56}$ 이다.

28) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

$y=\frac{1}{x}$ 의 그래프는 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이다.
그러므로 제1 사분면 위에서 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 점 $\left(t,\,\frac{1}{t}\right)$ 에서만 만나는 원의
중심이 직선 $y=-x$ 위에 있다면 제3 사분면 위에서 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과
오직 한 점에서만 만난다.

$y=\frac{1}{x}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$ 이므로 점 $\left(t,\,\frac{1}{t}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{t^2}$ 이다.
원 위의 한 점에서의 접선과 원의 중심을 지나는 직선은 수직이므로
점 $\left(t,\,\frac{1}{t}\right)$ 과 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은
$y=t^2(x-t)+\frac{1}{t}$ 이다.
원의 중심은 직선 $y=t^2(x-t)+\frac{1}{t}$ 과 직선 $y=-x$ 의 교점이므로
원의 중심의 x 좌표는
$-x=t^2(x-t)+\frac{1}{t}$ 을 만족시킨다.
이 식을 정리하면 원의 중심의 x 좌표는 $\frac{t^2-1}{t}$ 이다.
그러므로 원의 중심은 $\left(\frac{t^2-1}{t},\,\frac{1-t^2}{t}\right)$ 이다.
반지름의 길이는 점 $\left(\frac{t^2-1}{t},\,\frac{1-t^2}{t}\right)$ 과 점 $\left(t,\,\frac{1}{t}\right)$ 사이의 거리이므로
반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{1}{t^2}+t^2}$ 이고, $f(t)=\left(\frac{1}{t^2}+t^2\right)\pi$ 이다.
따라서 $f'(t)=\left(2t-\frac{2}{t^3}\right)\pi$ 이고
$f'(2)=\frac{15}{4}\pi$ 이다.

29) [정답] 20 (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 치환적분과 부분적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\,f(t))$ 에서 그은 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이므로 $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 이다.
$\int_0^1 te^{-t}g(e^t)\,dt$ 에서 $e^t=u$ 로 치환하면
$e^t dt=du$, $0\to1$, $1\to e$ 이다.

즉,

$$\begin{aligned}\int_0^1 te^{-t}g(e^t)\,dx &= \int_1^e \ln u \times \frac{g(u)}{u^2}\,du \\ &= \int_1^e \ln u \times \frac{\{f(u)-uf'(u)\}}{u^2}\,du \\ &= \int_1^e \ln u \times \left(-\frac{f(u)}{u}\right)'\,du \\ &= \left[-\ln u \times \frac{f(u)}{u}\right]_1^e + \int_1^e \frac{f(u)}{u^2}\,du \\ &= -\frac{f(e)}{e} + \left[-\frac{f(u)}{u}\right]_1^e + \int_1^e \frac{f'(u)}{u}\,du \\ &= 20\end{aligned}$$

30) [정답] 44 (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 낯선 함수의 미분을 통해 조건을 만족시키는 함수를 추론할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에 의해 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$, $x=6$, $x=b$ 에서 극값을 가지므로 함수 $2f(x)f'(x)$ 는 $x=a$, $x=6$, $x=b$ 에서 부호가 변화한다.

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이 1 개이거나 0 개이면 $y=\{f(x)\}^2$ 이 극값을 갖는 점은 1 개이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이 2 개이고 방정식 $f(x)=0$ 의 근은 2 개 이하여야 한다. (만약 방정식 $f(x)=0$ 의 근이 2 개이면 그 근 중 하나는 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이어야 한다.)

문제에서 $f''(2a)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 점 $(2a,\ f(2a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

만약 $f(6)=0$ 이고 $f'(6)\neq 0$ 이면서 $a<6<b$ 를 만족한다면, 방정식 $f(x)=0$ 은 3 개의 실근을 가지며, 이 경우 $y=\{f(x)\}^2$ 이 극값을 갖는 점은 5 개다.

즉, $y=\{f(x)\}^2$ 이 극값을 갖는 점이 3 개이기 위해서는 $f'(a)=0$ 또는 $f'(b)=0$ 을 만족해야 한다. 그런데 $f'(b)=0$ 이면 $f'(1)\times f'(3)$ 에 모순이므로 $f'(a)=0$ 이다.

그러므로 $f'(6)=0$ 이다.

$f'(x)$ 는 이차함수이고 $f'(x)$ 의 축의 방정식이 $x=2a$ 이므로 $2a=\dfrac{a+6}{2}$ 이고 $a=2$ 이다.

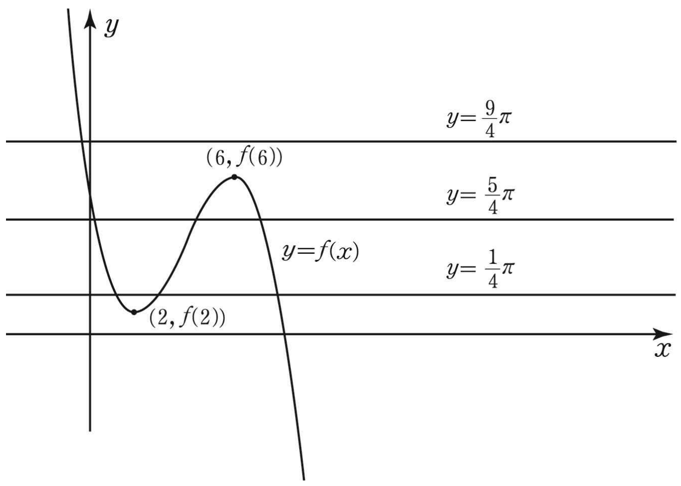
$f'(2)=0$ 을 만족하므로
$f(x)=-p(x-2)^2(x-q)+f(2)$ (단, p 는 상수이고, $p>0$) 라 할 때 $f'(x)=-2p(x-2)(x-q)-p(x-2)^2$ 이고 $f'(6)=0$, $p\neq 0$ 이므로 $q=8$ 이다.
따라서 $f(x)=-p(x-2)^2(x-8)+f(2)$ 이다.

함수 $g(x)=\cos f(x)\times e^{f(x)}$ 라 할 때,
$$\begin{aligned}g'(x) &= -\sin f(x)\times e^{f(x)}\times f'(x)+\cos f(x)e^{f(x)}\times f'(x) \\ &= f'(x)\{-\sin f(x)+\cos f(x)\}e^{f(x)}\end{aligned}$$ 이므로
$g(x)$ 가 $x=k$ 에서 극값을 가지려면 $f'(k)=0$ 또는 $\tan f(k)=1$ 이어야 한다.

조건 (다)에 의해 $0<x<8$ 에서 함수 $\cos(f(x))\times e^{f(x)}$ 가 $x=k$ 에서 극값을 갖도록 하는 k 의 개수는 8 개이다.

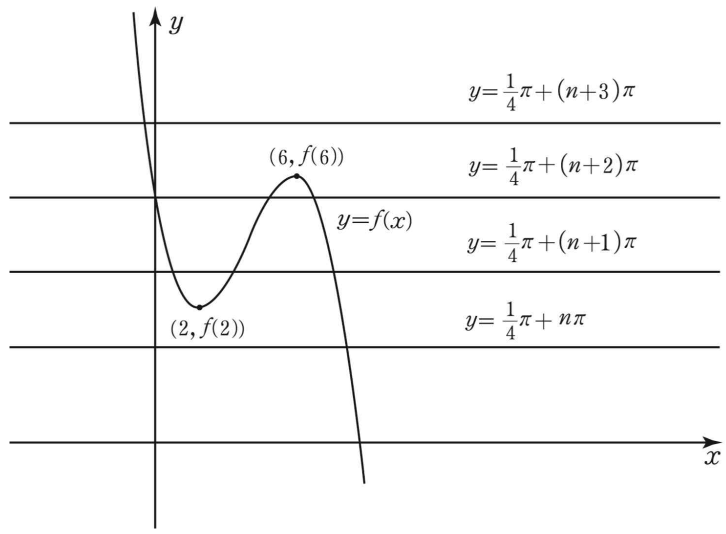
이때 조건 (가)에 의해 $f(2)\geq 0$ 이므로 $f(2)$ 의 범위에 따라 $f(6)$ 의 범위가 달라진다.

i) $0\leq f(2)<\dfrac{\pi}{4}$ 인 경우



$\dfrac{5}{4}\pi<f(6)\leq\dfrac{9}{4}\pi$ 를 만족해야 하고 $f(6)=32p+f(2)$ 이므로 $\pi<32p\leq\dfrac{9}{4}\pi$ 이다.

ii) $\dfrac{1}{4}\pi+n\pi\leq f(2)<\dfrac{1}{4}\pi+(n+1)\pi$ 인 경우 (n 은 음이 아닌 정수)



$\dfrac{1}{4}\pi+(n+2)\pi<f(6)\leq\dfrac{1}{4}\pi+(n+3)\pi$ 이고
$f(6)=32p+f(2)$ 이므로 $\pi<32p\leq 3\pi$ 이다.

이때, $f(a)-f(10)=f(2)-f(10)=128p$ 이다.

i) 의 경우 $4\pi<128p\leq 9\pi$ 이고
ii) 의 경우 $4\pi<128p\leq 12\pi$ 이다.

즉, $f(a)-f(10)=n\pi$ 를 만족하는 n의 범위는 $4<n\leq 12$ 이고 정수 n 에 대하여 $M=12$, $m=5$ 이다. 따라서 $Mm=60$

2022학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(기하) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 21 박주원)

[출제의도] 벡터의 성분을 이용하여 내적을 계산할 수 있는가?

[해설]

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(k+1,\ 2k)\cdot(-1,\ 1)$

$\quad=-1\times(k+1)+1\times 2k$

$\quad=k-1=0$

따라서 $k=1$이다.

24) [정답] ③ (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는 각각 $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$, $\mathrm{F}(5,\ 0)$이다.

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로,

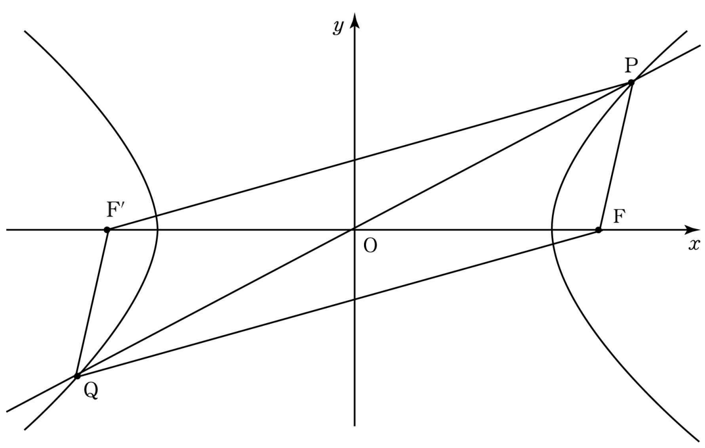
점 P의 y좌표를 h라 하면 점 Q의 y좌표는 $-h$이다.

$\triangle\mathrm{PFQ}=\triangle\mathrm{POF}+\triangle\mathrm{QOF}=2\times\dfrac{1}{2}\times 5\times h=15$이므로

점 P의 y좌표는 3이다.

[별해]

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로, 직선 PF′과 직선 FQ는 서로 평행하다.



즉, 삼각형 PFQ의 넓이는 삼각형 PFF′의 넓이와 같다.

점 P의 y좌표를 h라 하면

$\triangle\mathrm{PFQ}=\triangle\mathrm{PFF'}=\dfrac{1}{2}\times 10\times h=15$이므로 점 P의 y좌표는 3이다.

25) [정답] ③ (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 평면벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

원 C의 중심을 O, 반지름을 r라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}})=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$이다.

이 값이 최대일 때는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 방향이 같을 때이고,

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ 사이의 각은 $\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PO}}|\cos\dfrac{\pi}{6}+|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$

$\quad=\sqrt{3}r\times r\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+r\times\sqrt{3}r$

$\quad=r^2\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\right)=18+12\sqrt{3}$이다.

따라서 $r=2\sqrt{3}$이다.

26) [정답] ① (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 PFF′과 삼각형 PQF′이 서로 합동이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{QF'}}$이고 타원이 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$이고 삼각형 QFF′은 정삼각형이다.

$\angle\mathrm{QF'F}=\dfrac{\pi}{3}$이고 삼각형 PFF′과 삼각형 PQF′이 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{QF'P}=\angle\mathrm{FF'P}=\dfrac{\pi}{6}$이다.

$\overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{\overline{\mathrm{FF'}}}{\cos(\angle\mathrm{PF'F})}=\dfrac{2c}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c$,

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}\times\tan(\angle\mathrm{PF'F})=2c\times\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$이다.

이때 장축의 길이가 24이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c=24$이고

$c=4\sqrt{3}$이다.

따라서 삼각형 FPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c=16\sqrt{3}$이다.

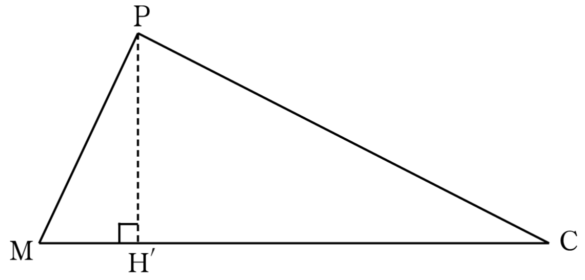
27) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 입체도형에서 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]

사각뿔 P−ABCM에서 삼각형 PMC는 직사각형 ABCD에서의 삼각형 DMC와 합동이므로 직각삼각형이다.

그러므로 $\overline{PM}=2$이고 $\overline{PC}=2\sqrt{3}$이다.

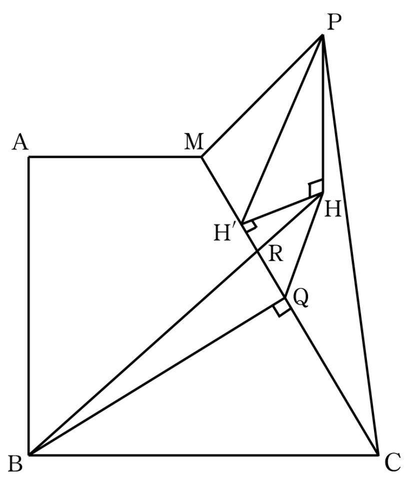


이때 평면 PMC의 점 P에서 선분 MC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 그림과 같이 나타낼 수 있다.

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{MC}=4$이고 $\angle PMC=\frac{\pi}{3}$이다.

$\overline{PH'}=\overline{PM}\times\sin\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{PH'}=\sqrt{3}$이다.

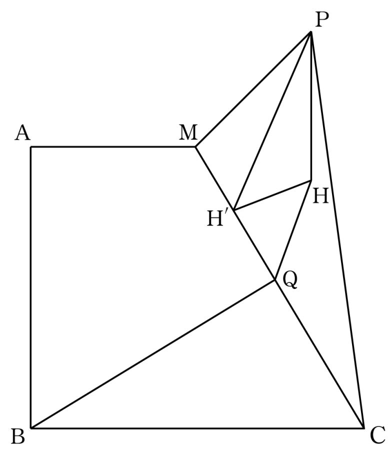
점 P에서 평면 ABCM에 내린 수선의 발을 H라 하자.
이때 $\overline{PH'}\perp\overline{MC}$, $\overline{PH}\perp$(평면 AMCD)이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{HH'}\perp\overline{MC}$이다.



따라서 평면 CPM과 평면 ABCM이 이루는 각은 $\angle PH'H=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{PH}=\frac{3}{2}$이고 $\overline{HH'}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

이제 선분 BP의 길이를 구하자.
위 도형에서 $\angle HH'R=\angle BQR=\frac{\pi}{2}$, $\angle HRH'=\angle BRQ$(맞꼭지각)이므로 삼각형 HH′R과 삼각형 BQR은 닮음(AA 닮음)이다.
$\overline{HH'}:\overline{BQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}:2\sqrt{3}=1:4$이다.
$\overline{H'R}:\overline{QR}=1:4$ $\overline{H'Q}=\overline{MC}-\overline{MH'}-\overline{CQ}=1$이므로
$\overline{H'R}=\frac{1}{5}$, $\overline{QR}=\frac{4}{5}$이다.
즉, $\overline{BH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{79}}{2}$이다.
$\overline{PH}=\frac{3}{2}$이고 $\overline{BH}=\frac{\sqrt{79}}{2}$이므로 삼각형 PBH에서
피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PB}=\sqrt{22}$이다.

[별해]



사다리꼴 ABCM의 점 B에서 선분 MC에 내린 수선의 발을 Q라 하면 선분 BQ의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.
또한, $\overline{MC}=4$, $\overline{MH'}=1$, $\overline{CQ}=2$에서
$\overline{H'Q}=\overline{MC}-\overline{MH'}-\overline{CQ}=1$이므로
$\overline{BH}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{79}}{2}$이다.

28) [정답] ④ (출제자 : 20 최인환)

[출제의도] 포물선의 접선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, 2\sqrt{a})$라 하자.
점 $P(a, 2\sqrt{a})$에서의 접선의 방정식은 $2\sqrt{a}y=2(x+a)$이다.
접선 $2\sqrt{a}y=2(x+a)$과 x축의 교점은 $Q(-a, 0)$이다.

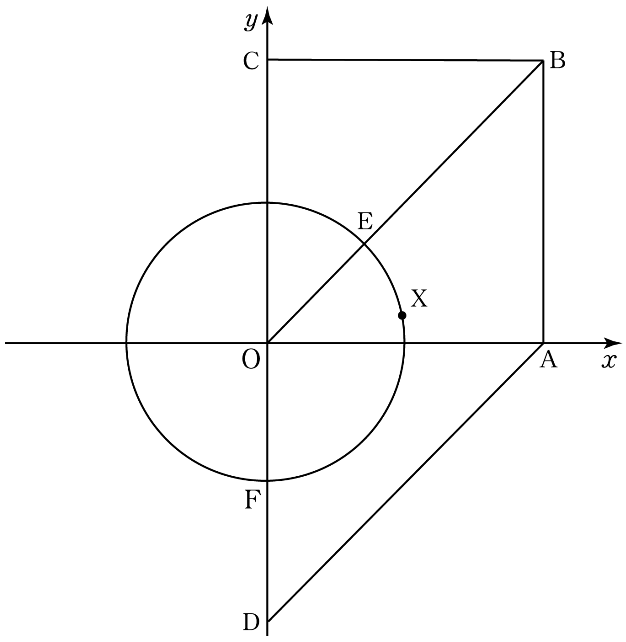
$\overline{AQ}$의 길이는 $a-1$, $\overline{AP}$의 길이는 $\sqrt{(a+1)^2+4a}$이고
$\overline{AQ}:\overline{AP}=1:\sqrt{7}$이므로
$\sqrt{(a+1)^2+4a}=\sqrt{7}(a-1)$
위 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$6a^2-20a+6=0$이므로 $a=3$이다. ($\because a>1$)
따라서 점 P의 좌표는 $(3, 2\sqrt{3})$이다.

점 R의 좌표를 $(b, 2\sqrt{b})$라 하자.
선분 AP의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 직선 AR의 기울기도
$\frac{2\sqrt{b}}{b+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
위 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $16b=3(b+1)^2$에서
$b=\frac{1}{3}$ ($\because b<1$)이므로
점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이다.
점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1,
점 R에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2라 하면
H_1의 좌표는 $(-1, 2\sqrt{3})$, H_2의 좌표는 $\left(-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이므로
$\overline{FP}+\overline{FR}=\overline{H_2R}+\overline{H_1P}=\frac{16}{3}$이다.

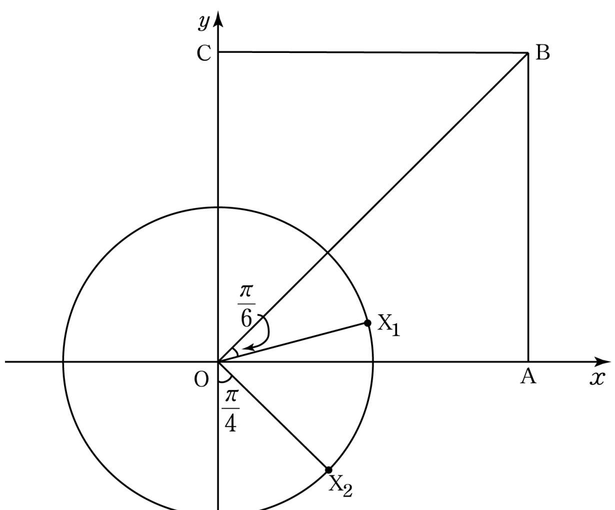
29) [정답] 32 (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 평면벡터의 내적을 계산할 수 있는가?

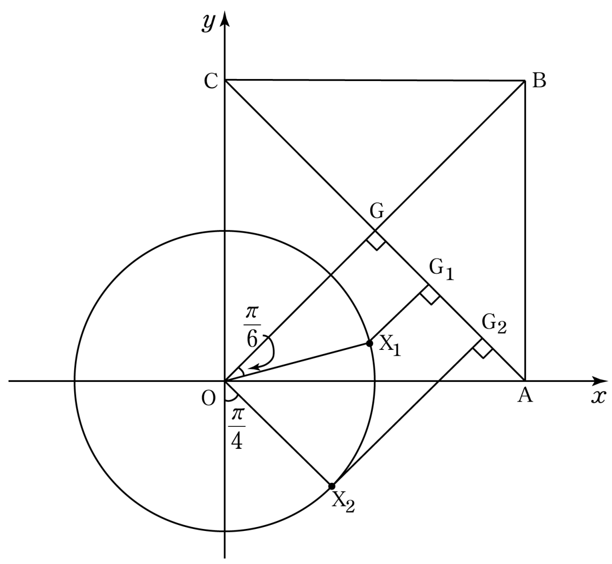
[해설]
점 X 가 존재할 수 있는 영역을 먼저 찾아보자.
$|\overrightarrow{OX}| = 2$ 이므로 점 X 는 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 2 인 원 위에 존재한다. …………… ㉠
한편, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$ 에서 $\overrightarrow{CQ}$ 의 시점을 점 P 로 평행이동시킨 벡터를 $\overrightarrow{PQ'}$ 이라 하면 $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{CQ'}$ 이므로 점 X 는 점 Q$'$ 이 나타내는 영역 위에 존재한다.
점 P 가 선분 OC 위의 점이므로 $\overrightarrow{PQ'}$ 은 $\overrightarrow{CQ}$ 를 y 축의 음의 방향으로 $|\overrightarrow{CP}|$ 만큼 평행이동한 벡터이다.
$0 \le |\overrightarrow{CP}| \le 4$ 이므로 점 Q$'$ 은 점 D$(0,\,-4)$ 에 대하여 사각형 ODAB 의 내부와 경계에 존재한다. …………… ㉡
선분 OB 와 선분 OD 가 ㉠의 원과 만나는 점을 각각 E, F 라 하자.
점 X 는 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 점이므로 점 O 를 중심으로 하고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$ 인 부채꼴 EOF 의 호 EF 위에 존재하는 점이다.
(아래 그림 참고)



이제 점 X_1 과 점 X_2 를 찾아보자.
$\overrightarrow{OX_1} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OX_1}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle X_1OB) = 4\sqrt{6}$ 에서
$|\overrightarrow{OX_1}| = 2$, $|\overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\cos(\angle X_1OB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.
그러므로 $\angle X_1OB = \frac{\pi}{6}$ 이다.
$\overrightarrow{OX_2} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OX_2}||\overrightarrow{OC}|\cos(\angle X_2OC) = -4\sqrt{2}$ 에서
$|\overrightarrow{OX_2}| = 2$, $|\overrightarrow{OC}| = 4$ 이므로 $\cos(\angle X_2OC) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
그러므로 $\angle X_2OC = \frac{3}{4}\pi$ 이고 선분 OX_2 가 y 축과 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다. (아래 그림 참고)

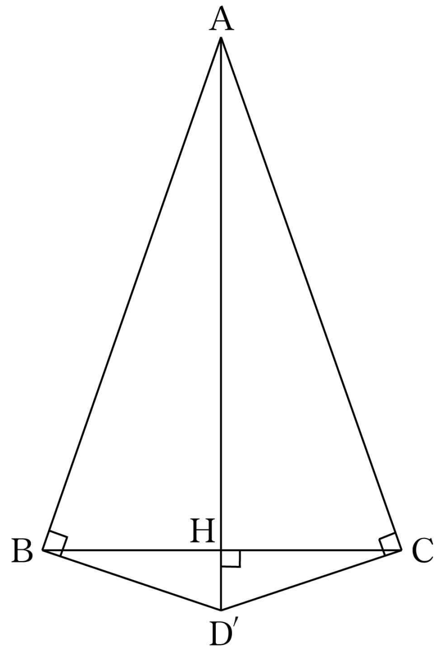


이제 $\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \overrightarrow{CA}$ 의 값을 구해보자.
선분 OB 와 선분 AC 의 교점을 G 라 하고, 두 점 X_1, X_2 에서 직선 CA 에 내린 수선의 발을 각각 G_1, G_2 라 하자.
두 벡터 $\overrightarrow{X_1X_2}$ 와 $\overrightarrow{CA}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라 하면,
$\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{X_1X_2}||\overrightarrow{CA}|\cos\theta$ 에서 $|\overrightarrow{CA}| = 4\sqrt{2}$ 이고
$|\overrightarrow{X_1X_2}|\cos\theta = |\overrightarrow{G_1G_2}|$ $(\because 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$이므로
$\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \overrightarrow{CA} = 4\sqrt{2}\,|\overrightarrow{G_1G_2}|$ 이다.
세 점 G, G_1, G_2 가 모두 직선 CA 위에 있고
두 점 G_1, G_2 는 모두 직선 OB 의 아래쪽에 존재하므로
선분 G_1G_2 의 길이는 선분 GG_2 의 길이에서 선분 GG_1 의 길이를 뺀 값이다.
직선 CA 와 직선 OB 가 서로 수직이므로 선분 GG_1 의 길이는
점 X_1 과 직선 OB 사이의 거리이다.
그러므로 $\overline{GG_1} = \overline{OX_1} \times \sin\frac{\pi}{6} = 1$ 이다.
사각형 OABC 가 정사각형이므로 직선 CA 가 y 축과 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이고 직선 OX_2 가 y 축과 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이므로
직선 CA 와 직선 OX_2 는 서로 평행하다.
직선 OG 와 직선 CA 는 서로 수직이므로 $\overline{GG_2} = \overline{OX_2} = 2$ 이다.
$|\overrightarrow{G_1G_2}| = \overline{G_1G_2} = \overline{GG_2} - \overline{GG_1} = 1$ 이므로
$\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \overrightarrow{CA} = 4\sqrt{2}\,|\overrightarrow{G_1G_2}| = 4\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $a = 4\sqrt{2}$, $a^2 = 32$ 이다. (아래 그림 참고)



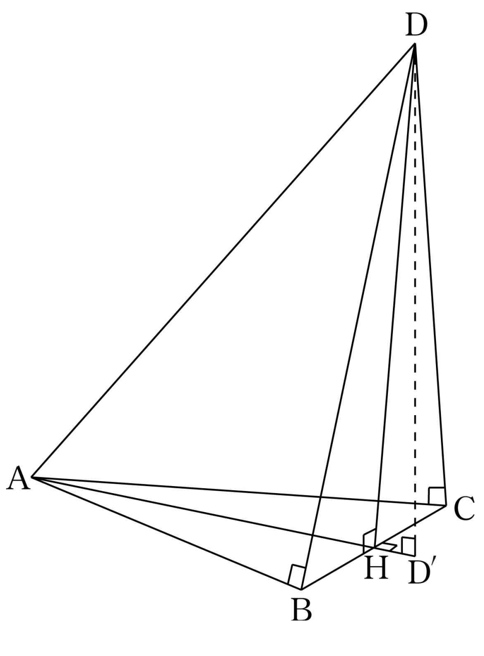
30) [정답] 19 (출제자 : 20 정원철, 20 김동연)
[출제의도] 좌표공간에서 조건을 만족시키는 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]
점 B 를 지나고 직선 AB 에 수직인 평면을 α, 점 C 를 지나고 직선 AC 에 수직인 평면을 β 라 하자.
직선 AC 와 직선 CD 가 서로 수직이려면 점 D 는 평면 β 위에 있어야 한다.
그러므로 점 D 는 평면 α 와 평면 β 의 교선 위에 있다.



점 D 의 평면 ABC 위로의 정사영을 D′ 이라 하자.
삼각형 BCD 의 평면 ABC 위로의 정사영은 BCD′ 이므로 삼각형 BCD′ 의 넓이는 $\sqrt{2}$ 이다.
두 직선 AB 와 BD′ 이 서로 수직이고, 두 직선 AC 와 CD′ 이 서로 수직이므로 삼각형 BCD′ 은 $\overline{BD'}=\overline{CD'}$ 인 이등변삼각형이다.
점 D′ 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
삼각형 ABC 는 이등변삼각형이므로 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발은 H 이다.
$\triangle BCD'=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{D'H}=\sqrt{2}$ 에서 $\overline{D'H}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
삼각형 BD′H 에서 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{BD'}=\sqrt{4+\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.
$\angle ABD'=\angle AHB=\angle BHD'=\frac{\pi}{2}$ 에서
$\angle D'BH=\frac{\pi}{2}-\angle ABH$ 이고 $\angle BD'H=\frac{\pi}{2}-\angle D'BH$ 이므로
$\angle ABH=\angle BD'H$ 이다.
그러므로 두 삼각형 ABH 와 BD′H 는 서로 닮음이다. (AA 닮음)
$\overline{AB}:\overline{BH}=\overline{BD'}:\overline{D'H}$ 에서 $\overline{AB}=6$ 이고
$\overline{AH}:\overline{BH}=\overline{BH}:\overline{D'H}$ 에서 $\overline{AH}=4\sqrt{2}$ 이다.

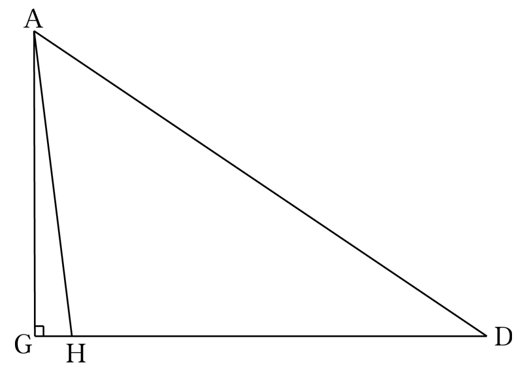
이제 사면체 ABCD 에서 살펴보자.



삼각형 ABD 에서 두 선분 AB 와 BD 가 서로 수직이고 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=10$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{BD}=8$ 이다.
삼각형 BCD 는 $\overline{BD}=\overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로 점 D 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발은 H 이다.
삼각형 BDH 에서 $\overline{BD}=8$, $\overline{BH}=2$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{DH}=\sqrt{64-4}=2\sqrt{15}$ 이다.

두 평면 ABC 와 BCD 가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면
$\cos\theta=\frac{\overline{D'H}}{\overline{DH}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{30}}{60}$ 이다.
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=8\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABC 의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는
$\triangle ABC\times\cos\theta=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{30}}{60}=\frac{4\sqrt{15}}{15}$ 이다.
따라서 $p+q=15+4=19$ 이다.

[별해]



점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발을 G 라 하자.
점 A 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발은 H 이므로 두 선분 GH 와 BC 는 서로 수직이다. 그러므로 세 점 G, H, D 는 한 직선 위에 있다.
$\overline{GH}=k$ 라 하면 삼각형 AGH 에서 $\overline{AH}=4\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AG}=\sqrt{32-k^2}$ 이다.
삼각형 AGD 에서 $\overline{AD}=10$, $\overline{DH}=2\sqrt{15}$ 이므로
$\overline{AG}=\sqrt{100-(k+2\sqrt{15})^2}$ 이다.
그러므로 $32-k^2=100-(k+2\sqrt{15})^2$ 에서 $k=\frac{2\sqrt{15}}{15}$ 이다.
두 평면 ABC 와 BCD 가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면
$\cos\theta=\frac{\overline{GH}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{2\sqrt{15}}{15}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{30}}{60}$ 이다.