

수학 영역 (미적분)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(확률과 통계/미적분/기하)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

헤맨다고 길을 잃는 것은 아니리

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2021년 8월 14일 시행 Epsilon 모의고사 1회

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

19학번 : 황주영

20학번 : 김동연, 김동해, 송문주, 이도윤
이선우, 정원철, 최인환

21학번 : 김민성, 김서원, 김예찬, 박창수
서연수, 심현재, 황민수

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

20학번 : 김유진, 김태희, 최연조

21학번 : 류은수, 박주원

자문 :

장지원 (성균관대학교 수학교육과 19)

정재훈 (성균관대학교 수학교육과 19)

검토위원 :

서희수 (성균관대학교 수학교육과 16)

김동현 (성균관대학교 수학교육과 18)

안동우 (성균관대학교 수학교육과 18)

강중우 (성균관대학교 수학교육과 19)

전재완 (성균관대학교 수학교육과 20)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 dongyeon0101@naver.com으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $3^{\sqrt{6}} \times 3^{2-\sqrt{6}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$ ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

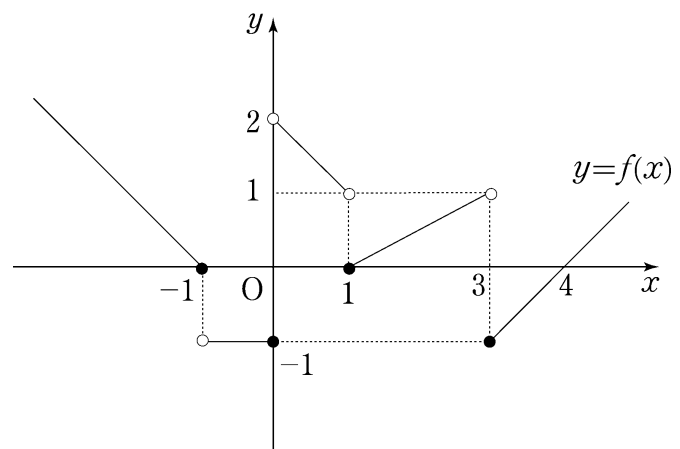
2. $\int_{-3}^3 (x^2 + 6x + 7) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

3. 곡선 $y = \log_2(x-3)$ 의 점근선과 곡선 $y = 3^{x-2} + 1$ 의 교점의 y 좌표는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = 12x^2 - 6$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가 $F(1) = -5$, $F(2) = 6$ 을
만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x < 1) \\ x^2+cx & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(-1)$ 의
값은? (단, a , b , c 는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 공비가 각각 r , 6인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수
 n 에 대하여

$$b_n = 3^n \times a_n$$

을 만족시킨다. $a_2 + a_4 = 5$ 일 때, $r + b_2$ 의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

8. 함수 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 의 그래프 위의 점 $A(1, 4)$ 에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 점 B 에서의 접선의 기울기가 6일 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{x - a} = 4$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 2f(2) - g(x)}{x - a} = 6$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 일 때, $a \times f'(a) \times g'(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

10. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v_1(t), v_2(t)$ 가 각각

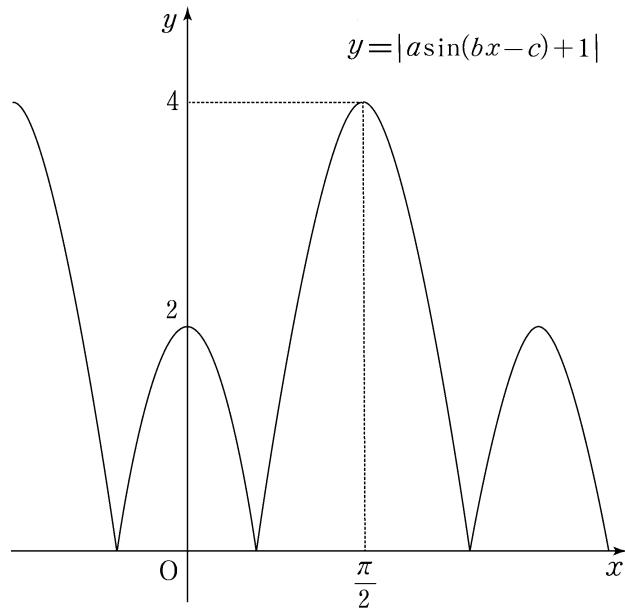
$$v_1(t) = 3t^2 - 16t + 10, \quad v_2(t) = 2t + 16$$

이다. 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점을 R 라 할 때, 점 R 가 시각 $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 두 번 바뀔 때까지 움직인 거리는? (단, 점 P 와 점 Q 는 만나지 않는다.) [4점]

- ① $\frac{28}{3}$ ② $\frac{29}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{31}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

11. 세 상수 a, b, c 에 대하여 함수 $y = |a \sin(bx - c) + 1|$ 의 그래프가 그림과 같을 때, abc 의 최댓값은? (단, $0 < c < 2\pi$)

[4점]

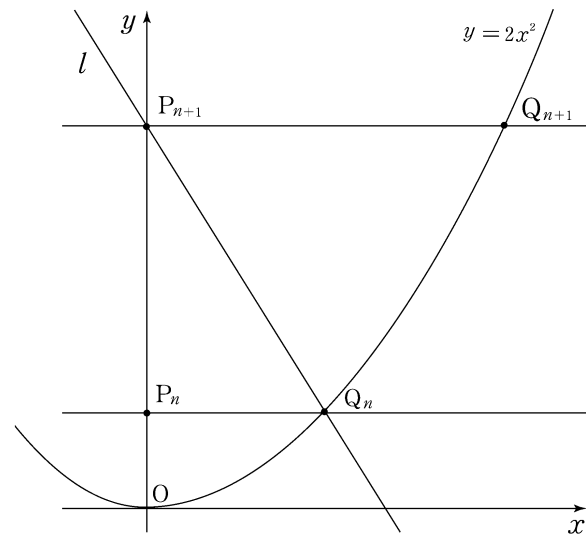


- ① π ② 3π ③ 5π ④ 7π ⑤ 9π

12. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 y 축 위의 점 P_n 과 제1사분면에 있는 곡선 $y = 2x^2$ 위의 점 Q_n 이 있다.

- 직선 $P_n Q_n$ 은 y 축에 수직이다.
- 직선 OQ_n 과 직선 $P_{n+1} Q_n$ 이 서로 수직이다.

두 삼각형 $P_{n+1} Q_n Q_{n+1}$, $OP_n Q_{n+1}$ 의 넓이를 각각 A_n , B_n 이라 하자. 다음은 $\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{B_n}{A_n}$ 을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)



모든 자연수 n 에 대하여 점 Q_n 의 x 좌표를 a_n 이라 하면 직선 OQ_n 의 기울기는 $2a_n$ 이다.

점 Q_n 을 지나면서 직선 OQ_n 과 수직인 직선을 l 이라 할 때, 직선 l 의 방정식은 $y = -\frac{1}{2a_n}(x - a_n) + 2(a_n)^2$ 이다.

직선 l 이 y 축과 만나는 점이 P_{n+1} 이므로 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(0, 2(a_n)^2 + \frac{1}{2})$ 이고, 점 Q_{n+1} 의 y 좌표가

$2(a_{n+1})^2$ 이므로 $A_n = \frac{a_{n+1}}{\text{(가)}}$ 이다.

점 P_n 의 좌표가 $(0, 2(a_n)^2)$ 이고 점 Q_{n+1} 의 x 좌표가 a_{n+1} 이므로 $B_n = (a_n)^2 \times a_{n+1}$ 이다.

따라서 $\frac{B_n}{A_n} = \text{(가)} \times (a_n)^2$ 이고,

$\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{B_n}{A_n} = \text{(나)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p \times f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

13. 일차항의 계수가 0인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = f(-1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 (나) $f'(-1) \times f'(1) < 0$

$f(-1) \times f(2) = \{f(1)\}^2$ 일 때, $\frac{f(-2)}{f(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

14. $k \geq 2$ 인 실수 k 에 대하여 곡선 $y = 2^{-x}$ 이 두 곡선

$y = 2^{x+k}$, $y = -\log_2(x-k)$ 와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k < x_2 < k+1$

ㄴ. $y_2 < \frac{1}{4}$

ㄷ. $x_1y_1 + x_2y_2 < 0$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 양수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(0) = f(k)$$

$$(나) \int_0^k f(t) dt = kf(0)$$

함수 $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt - x^2$ 이 극솟값을 갖지 않을 때,

$f(1)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{15}{8}$ ② $\frac{31}{16}$ ③ 2 ④ $\frac{33}{16}$ ⑤ $\frac{17}{8}$

단답형

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 = 4$ 일 때, a_6 의 값을 구하십시오. [3점]

17. 두 다항함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ 과 $g(x)$ 에 대하여 $g'(2) = 3$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 미분계수를 구하십시오. [3점]

18. 1보다 큰 두 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{\log b}{\log a} - \frac{2\log a}{\log b} = 1$$

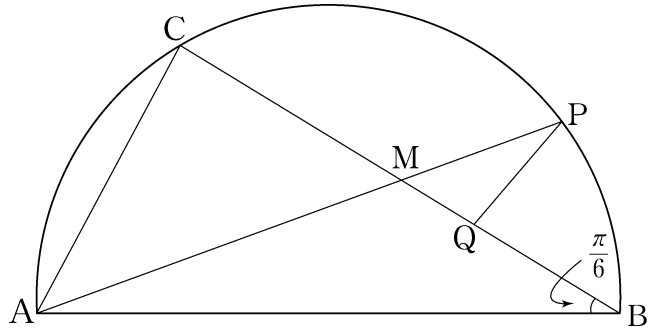
이 성립할 때, $(\log_a b)^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta + 2\cos\theta = -\frac{2}{5}$ 일 때,
 $2\sin\theta - \cos\theta$ 의 값은 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오. [4점]

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 갖는다.
 (나) 방정식 $(f' \circ f)(x) = 3f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

21. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡는다. 호 BC 위의 점 P에 대하여 선분 AP가 선분 BC의 중점 M을 지난다. 선분 BM을 2:1로 내분하는 점 Q에 대하여 삼각형 PMQ의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{S_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n \times a_{n+1} = (S_{n+1})^2 - (S_n)^2 \text{ 이다.}$$

(나) $\sum_{k=1}^7 S_k = 12$

$\left| \frac{a_5}{a_3} \right| = 2$ 일 때, $\sum_{k=1}^7 |a_k + S_{k+1}|$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 3n^3 + 8}{(2n^2 + 4)(2n + 1)^2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n^2}{n^2 + 2n} \right) = 4$ 일 때,

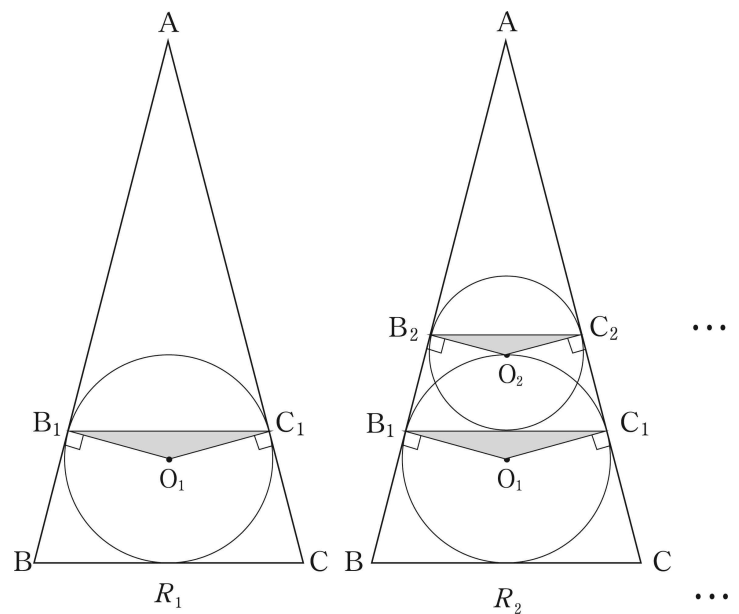
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n + 4n}{a_n + 2n}$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

25. 곡선 $ye^{kx} + \ln(y+1) = e$ 위의 점 $(0, e-1)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

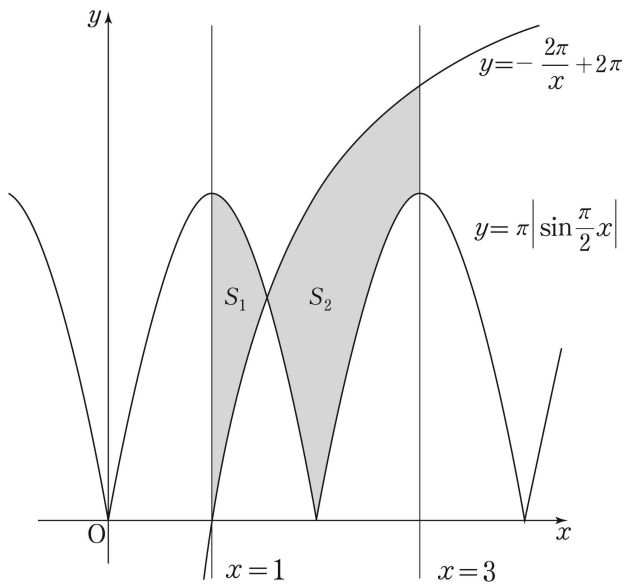
- ① $\frac{1}{e^2-e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{e+1}{e^2-e}$ ④ $\frac{e^2+1}{e^2+e}$ ⑤ $\frac{e^2+1}{e^2-e}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$, $\overline{BC} = 5$ 인 이등변삼각형 ABC 의 내접원의 중심을 O_1 , 점 O_1 에서 선분 AB 와 선분 AC 에 내린 수선의 발을 각각 B_1, C_1 이라 할 때, 삼각형 $O_1B_1C_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 이등변삼각형 AB_1C_1 의 내접원의 중심을 O_2 , 점 O_2 에서 선분 AB_1 과 선분 AC_1 에 내린 수선의 발을 각각 B_2, C_2 라 할 때, 삼각형 $O_2B_2C_2$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 모든 삼각형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



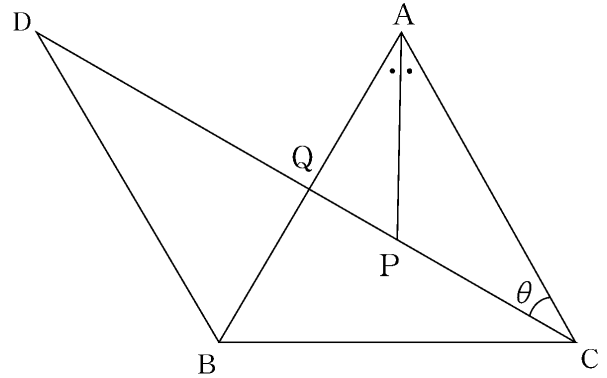
- ① $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ ② $\frac{9\sqrt{15}}{28}$ ③ $\frac{5\sqrt{15}}{14}$ ④ $\frac{3\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{15}}{28}$

27. 두 곡선 $y = -\frac{2\pi}{x} + 2\pi$, $y = \pi \left| \sin \frac{\pi}{2} x \right|$ 와 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 곡선 $y = -\frac{2\pi}{x} + 2\pi$, $y = \pi \left| \sin \frac{\pi}{2} x \right|$ 와 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_2 - S_1$ 의 값은? [3점]



- ① $(4 - 4\ln 3)\pi - 4$ ② $(3 - 2\ln 3)\pi - 4$ ③ $(3 - 2\ln 3)\pi - 2$
- ④ $(4 - 2\ln 3)\pi - 4$ ⑤ $(4 - 2\ln 3)\pi - 2$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 BC 를 한 변으로 하고 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. $\angle BAC$ 의 이등분선 위에 $\overline{AP} = \overline{CP}$ 가 되도록 점 P 를 잡고 선분 CP 의 연장선과 선분 AB가 만나는 점을 Q 라 하자. 점 B 를 지나고 직선 AC 와 평행한 직선과 선분 CP 의 연장선의 교점을 D 라 하자. $\angle ACP = \theta$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 BDQ 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 3$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+2) = -f(x) + f(5)$$

$1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 일 때, $\int_0^{14} f(x) dx = ae - b$ 이다.

$a+b$ 의 값을 구하십시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

30. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^2 e^{-a|x|+2}$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수

$$y = |f(x) + tf'(t) - f(t) - xf'(t)|$$

가 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $g(t) = 0$ 을 만족시키는 모든 t 의 값 중 가장 큰 값을 t_1 , 두 번째로 작은 값을 t_2 라 할 때,

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}$$

함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수를 n 이라 할 때,

$(a+n) \times \sum_{k=1}^6 g(2^{k-2})$ 의 값을 구하십시오. (단, $g(6) \neq g(7)$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.