제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$ $f'(2) = 12$

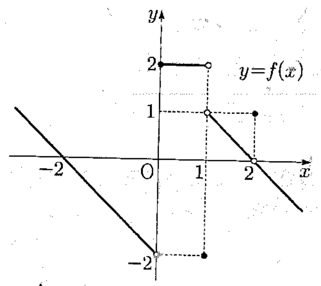
3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

$\cos\theta = -\frac{2}{3}$ $\sin^2\theta = \frac{5}{9}$

$\sin^2\theta + \cos\theta = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



-2 1

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$a = \frac{1}{4}$ $ar + ar^2 = \frac{3}{2}$

$r + r^2 = 6$ $r = 2$

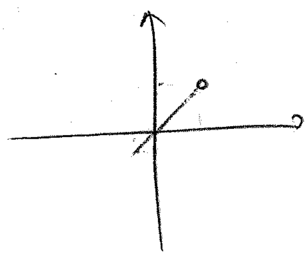
$a_6 + a_7 = \frac{1}{4}(32 + 64) = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

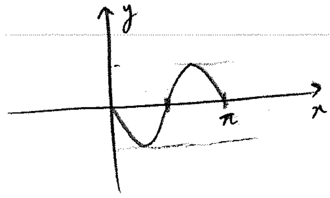


$-1 + a = 1$ $a = 2$

$3b - 2 = 3$ $b = \frac{5}{3}$ $2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$



$a = \frac{\pi}{4}$ $b = \frac{3}{4}\pi$

$(\frac{\pi}{4}, -1)$, $(\frac{3}{4}\pi, 1)$

기울기 $\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$3+5\cdot 4=23$

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\ge g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

let $h(x)=f(x)-g(x)$

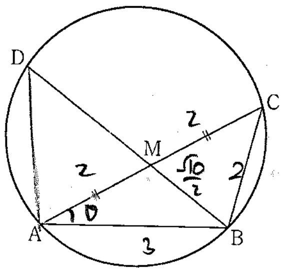
$=x^3-x^2-x+6-a$

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h(x)$는 $x=1$ 에서 최솟값 가짐

$h(1)\ge 0$ $\quad 5-a\ge 0$ $\quad a\le 5$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

let $x=\overline{AC}$

$4=x^2+3^2-6x\cdot\frac{7}{8}$ $\quad x^2-\frac{21}{4}x+5=0$

$(x-4)(x-\frac{5}{4})=0$ $\quad x=4$

$\overline{BM}^2=4+9-2\cdot 6\cdot\frac{7}{8}=\frac{5}{2}$ $\quad \overline{BM}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$2\cdot 2=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\overline{MD}$ 이므로

$\overline{MD}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4}{5}\sqrt{10}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

$x_1(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}t(t-4)$　$t=4$

$x_2(t) = \frac{3}{2}t^2$　$\frac{3}{2}\cdot 16 = 24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$　④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

$(a+12)(a+18)<0$　$-18<a<-12$

$a_7>0$, $a_5<0$

$|a_7| + \cdots + |a_{12}| = 6 + |a_2| + |a_4| + \cdots + |a_{12}|$

$a_7 + \cdots + a_{12} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

$3a + 24\cdot 3 = 6 - 2a - 12 + |a_6|$

$5a + 78 = |a_6|$　$5a+78 = |a+15|$

i) $a_6 \geq 0$ $(a \geq -15)$

$4a = -63$　$a = -\frac{63}{4}$ (x)

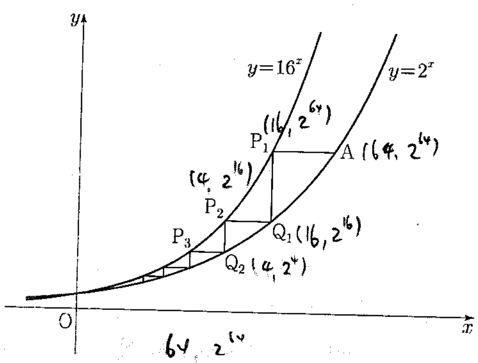
ii) $a_6 < 0$ $(a < -15)$

$6a = -93$　$a = -\frac{31}{2}$ (o)

$\therefore a_{10} = -\frac{31}{2} + 27 = \frac{23}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$64,\ 2^{64}$

$Q_1\quad 16,\ 2^{16}$

$Q_2\quad 4,\ 2^4$

$Q_3\quad 1,\ 2^1$

$Q_4\quad \frac{1}{4},\ 2^{\frac{1}{4}}$

$Q_5\quad \frac{1}{16},\ 2^{\frac{1}{16}}$

$Q_6\quad \frac{1}{64},\ 2^{\frac{1}{64}}$ $\quad 63 \sim 16$

48개

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$ (o)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. (x)

ㄷ. $2 < f(1) < 4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (o)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

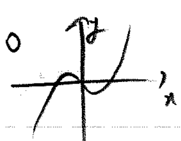
ㄱ. (o)

$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$ ($g'(x)$도 연속, 다항함수) $g(x)$는 기함수

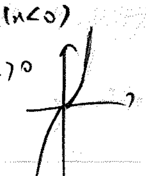
ㄱ. $g'(x)$가 $x=0$ 연속 $\Rightarrow -f(0)=f(0)$ (o)

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} 3x^2+ax & (x\ge 0) \\ -3x^2-ax & (x<0)\end{cases}$

i) $a<0$



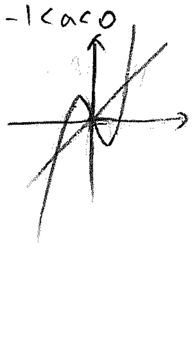
ii) $a>0$



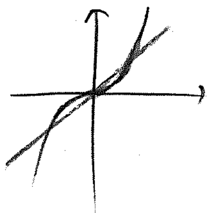
(x)

ㄷ. $2<3+a<4$ $\quad -1<a<1$

i) $-1<a<0$



ii) $0\le a<1$



$f'(x)=6x+a$

$0\le f'(0)<1$

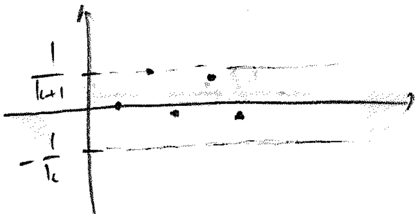
(o)

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



$a_2 = \frac{1}{k+1}$ $a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ ...

$\frac{1}{k+1}$을 $k+1$번 더하고 $\frac{1}{k}$을 k번 빼면 0

$2k+1$번 시행 후 0이 됨

$a_1 = 0$ $a_{2k+2} = 0$ $a_{4k+3} = 0$

$1 + n(2k+1) = 22$ $n(2k+1) = 21$

$n = 1, 3, 7, 21$

$k = 10, 3, 1, \times$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 6

$(x+2)(x-2) = 32$ $(x > 2)$

$x^2 = 36$ $x = 6$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점] 15

$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 1$

$f(-2) = 32 - 16 - 1 = 15$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점] 3

$4 \cdot 55 + 10a = 250 \quad a=3$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점] 2

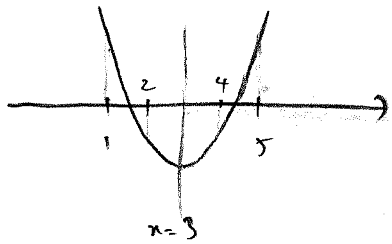
$f'(x) = 4x^3+2ax \quad 4+2a=0 \quad a=-2$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점] 13

$g'(x) = |f(x+1)| - |f(x)|$

$g'(1) = |f(2)| - |f(1)| = 0$

$g'(4) = |f(5)| - |f(4)| = 0$



$f(x) = 2(x-3)^2+k \qquad f(1) = -f(2)$

$8+k = -(2+k) \qquad 2k=-10 \qquad k=-5$

$\therefore f(x) = 2(x-3)^2-5 \qquad f(0)=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점] 426

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$ (k는 정수)

$64^k=\left(\frac{3}{4n+16}\right)^4$ $2^{6k}=\left(\frac{3}{4n+16}\right)^4$

$2^{\frac{3}{2}k}=\frac{3}{4n+16}$ $4n+16=\frac{3}{2^{\frac{3}{2}k}}$

$5\le n+4=\frac{3}{2^{\frac{3}{2}k+2}}\le 1004$

$\frac{5}{3}\le\frac{1}{2^{\frac{3}{2}k+2}}\le\frac{1004}{3}$

$\frac{20}{3}\le\frac{1}{2^{\frac{3}{2}k}}\le\frac{4016}{3}$

$\frac{20}{3}\le 2^{-\frac{3}{2}k}\le\frac{4016}{3}$

$6.xx < 2^{-\frac{3}{2}k}\le 1338.xx$

$-\frac{3}{2}k=3, 6, 9$ $(k=-2, -4, -6)$

$4n+16=3\cdot 2^{-\frac{3}{2}k}$ $4n=3\cdot 2^{-\frac{3}{2}k}-16$

$n=\frac{3}{4}2^{-\frac{3}{2}k}-4$

$n=2, 44, 380$

$2+44+380=426$

22. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점] 19

> $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 <u>존재하지 않는</u>
>
> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$x=0$에서 연속 $3f(0)=af(-b)$ let $k=g(t)$

$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+k^2}-|k|}{(x+3)^2}\cdot\frac{\sqrt{|g(x)|+k^2}+|k|}{\sqrt{|g(x)|+k^2}+|k|}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|+\cancel{k^2}-\cancel{k^2}}{(x+3)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|g(x)|+k^2}+|k|}$ 0

$(x+3)(x+p)$

$=\lim_{x\to-3}\frac{|\cancel{(x+3)}f(x)|}{(x+3)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|g(x)|+k^2}+|k|}$ 0

$=\lim_{x\to-3}\frac{|\cancel{(x+3)}(x+p)|}{\cancel{x+3}}\cdot\frac{1}{2|g(t)|}$

$\therefore f(x)=(x+3)^2$, $g(-3)=0$, $g(6)=0$

$g(6)=(6+a)f(6-b)=0$ $\therefore b=9$

$3f(0)=af(-b)$ $3\cdot 9=af(-9)=36a$ $a=\frac{3}{4}$

$\therefore g(x)=(x+\frac{3}{4})f(x-9)$ $(x\ge 0)$

$g(4)=\frac{19}{4}\cdot f(-5)=\frac{19}{4}\cdot 4=19$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n} = 1$

24. 곡선 $x^2 - y\ln x + x = e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$2x - \frac{dy}{dx}\ln x - \frac{y}{x} + 1 = 0$

$x=e,\ y=e^2$

$2e - \frac{dy}{dx}\cdot 1 - e + 1 = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = e+1$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

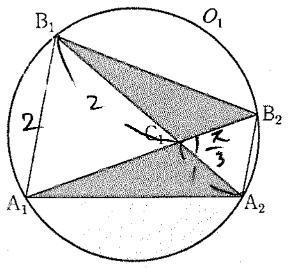
$f(0)=3 \quad g(3)=0 \quad g'(3)=\frac{1}{f'(0)}$

$f'(x)=3x^2+2 \quad f'(0)=2$

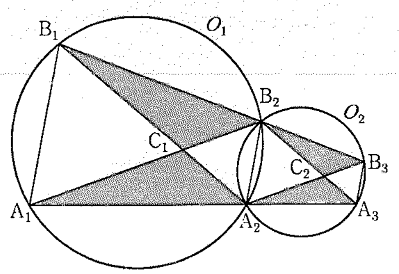
$\therefore g'(3)=\frac{1}{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⪤ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⪤ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮　　　⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$　② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\triangle A_1B_1C_1$은 정삼각형　닮음비 $\frac{1}{2}$　공비 $r=\frac{1}{4}$

$R_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot \sin 120° = \sqrt{3}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = 3n+1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\cdots=\frac{3}{2}$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

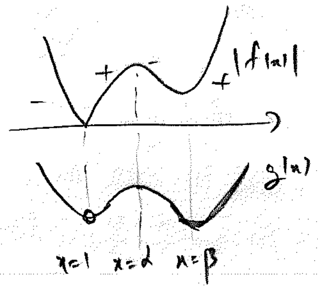
이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

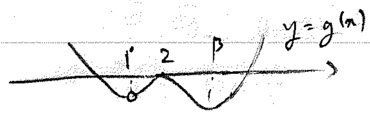
> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

$f(1)=0$ $g(1)=1$ $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+ax+b)$

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$





$g(2)=0$ $f'(2)=0$ $f(2)=1$

$f(2)=\frac{4+2a+b}{2}=1$ $2a+b=-2$

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2+2(a-1)x+b-a\right)$

$f'(2)=0$ $12+4(a-1)+b-a=0$

$3a+b=-8$ $\therefore a=-6$ $b=10$

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-14x+16)=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$

$\therefore \beta=\frac{8}{3}$ $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{64}{9}-16+10\right)$

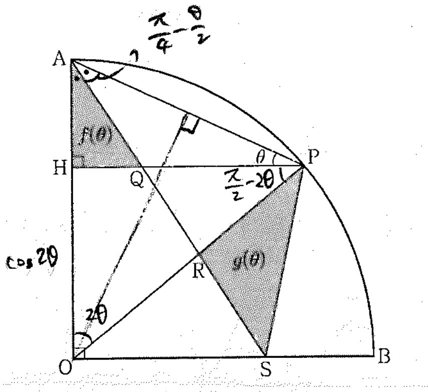
$=\frac{5}{6}\cdot\frac{10}{9}=\frac{25}{27}$

$\therefore g(x)$의 극솟값은 $\ln\frac{25}{27}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

50



$\overline{OH} = \cos 2\theta$ $\overline{PH} = \sin 2\theta$ $\overline{AH} = 1-\cos 2\theta$

$\overline{QH} = \overline{AH} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\overline{AP} = 2\cos\theta$ $\overline{OR} : \overline{RP} = 1 : 2\sin\theta$

$\triangle OSP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{OS} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{1}{2}\cos 2\theta \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$g(\theta) = \triangle OSP \cdot \frac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^3 \cdot g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{1}{2}\cos 2\theta \cancel{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2 \cancel{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}} \cdot \theta^3$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^3 \cdot 2\sin\theta}{(1-\cos 2\theta)^2} \cdot \frac{\cos 2\theta}{1+2\sin\theta} = 2\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\theta^2}{\underbrace{1-\cos 2\theta}_{\frac{(2\theta)^2}{2}}}\right)^2$$

$= \frac{1}{2}$ $100k = 50$

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

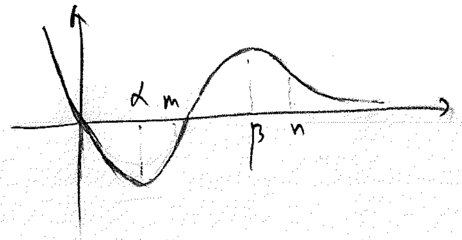
$$f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$$ $x=t$에서의 접선

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5) + \lim_{t \to 5} g(t) = 5$일 때, $\lim_{t \to k-} g(t) \neq \lim_{t \to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 16

$f'(x) = \frac{-x^2+(a+2)x-a}{e^x}$ 두 근 α, β $D>0$ $\alpha+\beta>0$ $\alpha\beta>0$

$f''(x) = \frac{x^2-(a+4)x+2a+2}{e^x}$ 두 근 m, n $D>0$ $m+n>0$ $mn>0$



$g(5) + \lim_{t \to 5} g(t) = 5$ $g(5)=2$ $\lim_{t \to 5} g(t) = 3$ $\therefore n=5$

$f''(5)=0$ $25-5(a+4)+2a+2=0$ $\therefore a=\frac{7}{3}$

$f'(x)=0$ $-x^2+\frac{13}{3}x-\frac{7}{3}=0$ $k=\alpha, \beta$

$\alpha+\beta = \frac{13}{3}$ $3+13=16$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.