제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4 \times 2^{-2} = 1$

2. 함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

$f'(2)$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$3x^2$

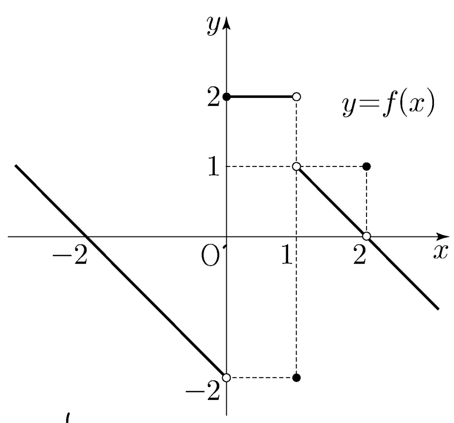
3. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \dfrac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ $-\frac{2}{3}$

① $-\dfrac{4}{9}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{2}{9}$ ④ $-\dfrac{1}{9}$ ⑤ 0

$\frac{5}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{1}{9}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



-2 1

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$a = \frac{1}{4}$

$ar + ar^2 = \frac{3}{2}$

$a(r + r^2) = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}(r + r^2) = \frac{3}{2}$

$r^2 + r = 6$

$r^2 + r - 6 = 0$

$(r+3)(r-2) = 0$

$\boxed{r = 2}$

$ar^5 + ar^6$

$a(r^5 + r^6)$

$\frac{1}{4}(32 + 64)$

$8 + 16 = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$|-1 + a| = |-1| = 1$ $\begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \ (X) \end{cases}$

$3 = |3b - 2|$ $\begin{cases} b = \frac{5}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \ (X) \end{cases}$

$3 = 3b - 2$

$5 = 3b$

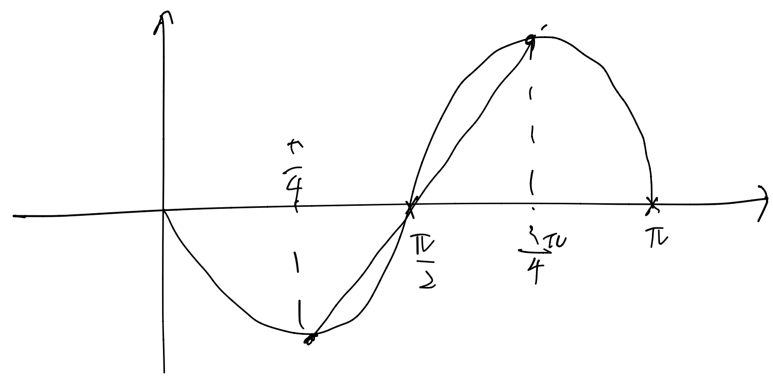
$-3 = 3b - 2$

$-1 = 3b$

$2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$



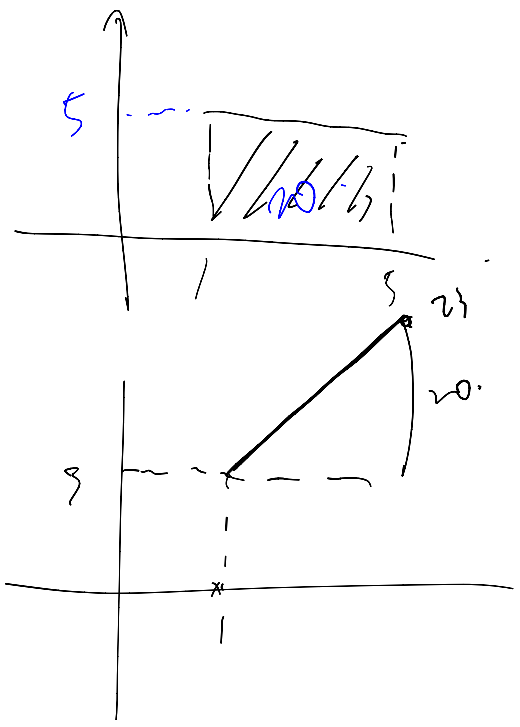
$(\frac{\pi}{4}, -1)$ $(\frac{3}{4}\pi, 1)$

$\frac{1 - (-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{2\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25



9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6, \quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \geq g(x)$$

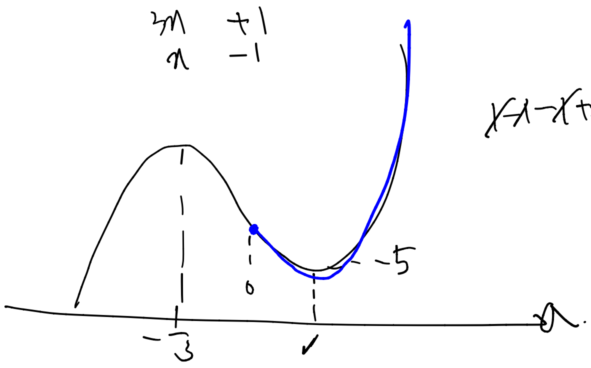
가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

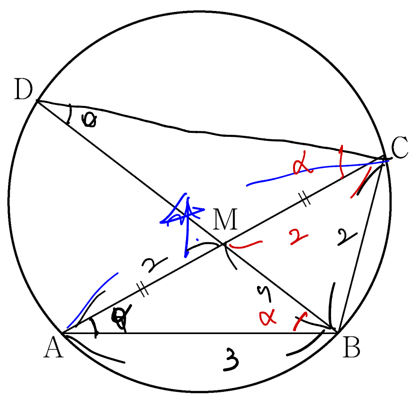
$x^3-x+6 \geq x^2+a$

$x^3-x^2-x+6 \geq a$

$5 \geq a$



10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\triangle MCD$

$\frac{\overline{MD}}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\theta}$

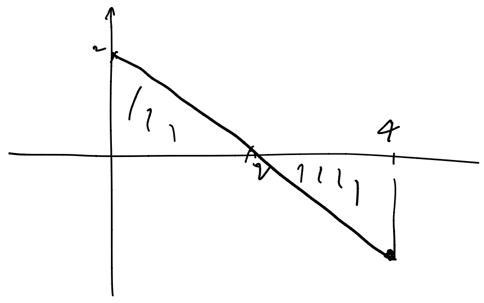
$\Rightarrow \overline{MD} = \frac{2}{\sin\theta} \times \sin\alpha = \frac{16}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점] 4초

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24



$$\int_0^4 |v_2(t)|\,dt = \int_0^4 3t\,dt = \left[\frac{3t^2}{2}\right]_0^4 = 24$$

$\frac{3\times16}{2}$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점] $a+(n-1)3$

(가) $a_5\times a_7<0$ a_5 a_6 a_7

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$|a_7|+\cancel{|a_8|}+|a_9|+\cancel{|a_{10}|}+|a_{11}|+\cancel{|a_{12}|}$

$=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cancel{|a_8|}+\cancel{|a_{10}|}+\cancel{|a_{12}|}$

$|a_7|+|a_9|+|a_{11}| = 6+|a_2|+|a_4|+|a_6|$

$a_7+a_9+a_{11} = 6-a_2-a_4+|a_6|$

$\cancel{a}+6d+\cancel{a}+8d+\cancel{a}+10d=6-a-d-\cancel{a}-3d+|a_6|$

$3a+24d=6-2a-4d+|a_6|$

28 ×3 84

$5a+28d=6+|a_6|$ $a+5d$

$5a+84=6+|a+15|$

$a\ge-15$: $5a+84=6+a+15$ 21 −84

$4a=-63$

$a=-\frac{63}{4}$ (×)

$a<-15$: $5a+84=6-a-15$ −9−84

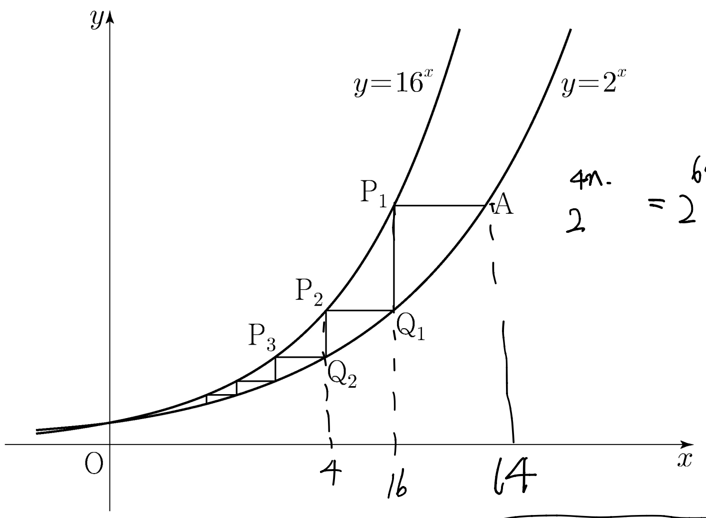
$6a=-93$

$a=-\frac{93}{6}=-\frac{31}{2}$ (✓)

$a+9d=-\frac{31}{2}+27=\frac{-31}{2}+\frac{54}{2}=\frac{23}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$16\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{k}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} < \frac{1}{k}$

$n-3 > \log_4 k$

$n > \log_4 k + 3$

$5 \le \log_4 k + 3 < 6$

$2 \le \log_4 k < 3$

$16 \le k < 64$

$64-16=48$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$k=1$

$k=3$

$k=10$

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{k+1}$

$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$

$\frac{2}{k+1} > \frac{1}{k} \Rightarrow 2k > k+1$, $k > 1$ $k=1$일 때. 3사이클 (O)

$a_5 = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$

$a_6 = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k}$

$3k > 2k+2$, $k > 2$ (X) $k=2$일 때 0 $\Rightarrow$ 5사이클 (X)

$a_7 = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$

$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k}$

$4k > 3k+3$, $k > 3 \Rightarrow k=3$일 때 0 $\Rightarrow$ 7사이클 (O)

$a_9 = \frac{4}{k+1} - \frac{4}{k}$

$a_{10} = \frac{5}{k+1} - \frac{4}{k}$ $k=4$ 일때 $\Rightarrow$ 9사이클 (X)

$a_{11} =$

$a_{12} = \frac{6}{k+1} - \frac{5}{k}$ $k=5 \Rightarrow$ 11사이클 (X)

a_{13}

$a_{14} = \frac{7}{k+1} - \frac{6}{k}$ $k=6 \Rightarrow$ 13사이클 (X)

a_{15}

$a_{16} = \frac{8}{k+1} - \frac{7}{k}$ $k=7 \Rightarrow$ 15사이클 (X)

a_{17}

$a_{18} = \frac{9}{k+1} - \frac{8}{k}$ $k=8 \Rightarrow$ 17사이클 (X).

a_{19}

$a_{20} = \frac{10}{k+1} - \frac{9}{k} \Rightarrow k=9 \Rightarrow$ 19사이클 (X)

$\Rightarrow a_{22} = \frac{11}{k+1} - \frac{10}{k} \Rightarrow k=10$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x+2>0$

$x-2>0$

$\boxed{x>2}$

$\log_2(x^2-4) = \log_2 2^5$

$x^2-4=32$

$x^2=36$

6

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = \frac{8x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 1$

$= 2x^4+2x^3-1$

$2\times16-16-1$

$32-16-1$

15

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

$\cancel{4} \times \dfrac{10 \times 11}{\cancel{2}} + 10a = 250$

$\cancel{220} + 10a = 2\cancel{5}0$

30

$\boxed{3}$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

$f'(x) = 4x^3 + 2ax$

$f'(1) = 4 + 2a = 0.$

$a = -2$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$
$4x(x-1)(x+1)$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + b$

$f(0) = b = 4$

$b = 4$

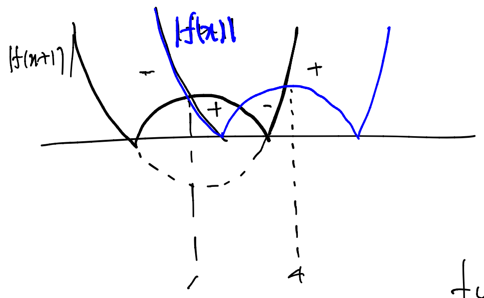
2

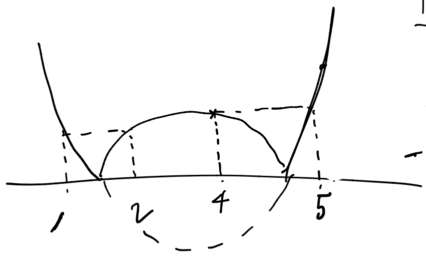
20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|\,dt$ 는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다.
$f(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$g'(x) = |f(x+1)| - |f(x)|$

$|f(2)| = |f(1)|$

$|f(5)| = |f(4)|$





$f(x) = 2x^2 + ax + b$

$\boxed{3a+2b=-10}$

$f(1) = -f(2) \Rightarrow 2+a+b = -8-2a-b \Rightarrow$

$-f(4) = f(5) \Rightarrow -32-4a-b = 50+5a+b$

-36

26

$3a+2b=-10$
$+\ -9a-2b=82$

$-6a = 72$

$a = -12$

$b = 13$

-26
108

$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$

13

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$4\log_{2^6}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = k$ 정수

$\log_2 \frac{3}{4n+16} = 3m$

$\frac{3}{4n+16} = 2^{3m}$

$\frac{3}{2^{3m}} = 4n+16$

$\frac{3}{2^{3m}} - 16 = 4n$

$\frac{3}{2^{3m+2}} - 4 = n$

$3 \times 2^{-3m-2} - 4 = n$

$1 \le \frac{3}{2^{3m+2}} - 4 \le 1000$

$5 \le \frac{3}{2^{3m+2}} \le 1004$

$5 \le 3 \cdot 2^{-3m-2} \le 1004$

$n=2$, $n=44$, $n=380$

426

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

$g(-3)=0$

$g(6)=0$

$f(x)=(x+3)(x-c)$

$f(x)=(x+3)^2$

$\Rightarrow b=9$

$x=0$에서 연속 $\Rightarrow 27 = a(36)$

$a=\frac{3}{4}$

$\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-6)^2$

19

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

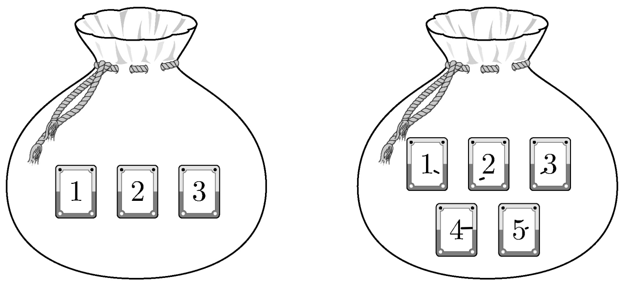
23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$\frac{5!}{3!} = 5\times4 = 20$

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



A B

1 2 → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$

2 < 1, 3 ⇒ $\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$

3 < 2, 4 ⇒ $\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$

$\frac{1+2+2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1 2 3 6

6의 약수 ○ $\frac{2}{3}$ → +1

〃 X $\frac{1}{3}$ → 0

전체 − (0번, +1)

$1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right)$

$1 - \left(\frac{1}{81} + \frac{8}{81} \right)$

$\left(\frac{9}{81}\right)$

$\frac{1}{9}$

$\frac{8}{9}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$(x^4+2x^2+1)^2 \ (x^3+1)^n$

$x^8+4x^4+1+2(2x^6+x^4+2x^2)$

$(x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)(x^3+1)^3$

$4x^2 \times nC_1(x^3) =$

$4 \times n = 12 \Rightarrow n=3$

$1 \times 3C_2 (x^3)^2 \quad x^6$

$4+3$

7

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
>
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

$2^2 \times {}_4C_1 \times 3^3$

(a 들어갈 자리)

$4 \times 4 \times 27$

$27 \times 16 = 432$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

A B

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{4 \times 3! + 4 \times 3! \times 2}{5 \times 4!}$

$\frac{4 \times 3! \times 3}{5 \times 4!} = \frac{3}{5}$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

$f(1)=1 \Rightarrow X$

$f(1)=2 \Rightarrow f(2)=4 \rightarrow {}_4H_2 \times 5$

$f(1)=3 \Rightarrow f(3)=4 \rightarrow 2 \times 5^2$

$f(1)=4 \Rightarrow f(4)=4 \rightarrow {}_2H_2 \times 5$

$f(1)=5 \Rightarrow f(5)=4 \Rightarrow X$

${}_4H_2={}_5C_2$

${}_5C_2=10$

2×25

${}_2H_2={}_3C_2$

${}_3C_2 \times 5$

$50+50+15$

115

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \ge 5$일 때, $c-a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{16}{56}$

$X \ge 5$, $X+Y \ge 10$

$\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

9

a	b
1	6~11
2	7~11
3	8~11
4	9~11
5	10~11
6	11

$21+15+10+6+3+1$

36, 46, $52+4=56$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{\cancel{n^2}+3n-\cancel{n^2}-n} \quad \frac{2n}{2n}$$

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$2x - y'\ln x - \frac{y}{x} + 1 = 0$

$\cancel{2}e - y' - \cancel{e} + 1 = 0$

$e + 1 = y'$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$f(g(x))=x$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$=\frac{1}{f'(g(3))}$

$\underbrace{x^3+2x+3=3}_{}$, $x^3+2x=0$

$x(x^2+2)=0$

$x=0$

$3x^2+2$

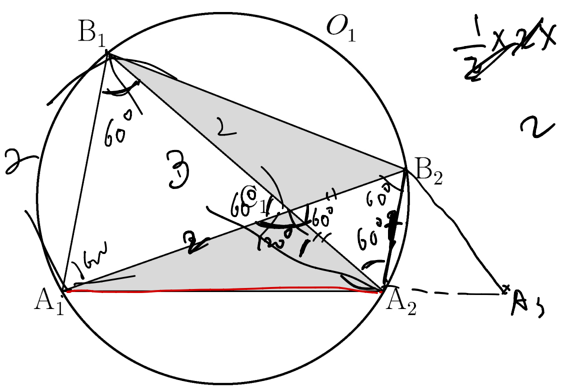
$=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$

$\frac{a}{1-r}$

$1-\frac{1}{4}$

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⧖ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

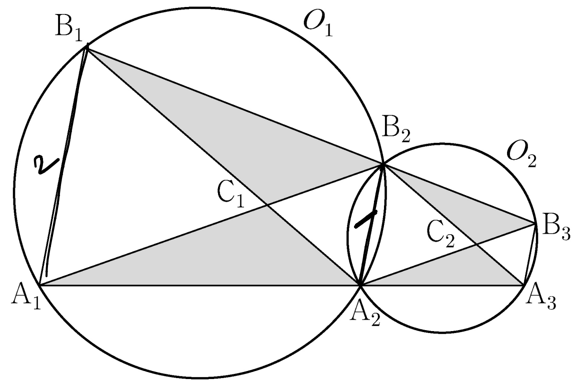


$\frac{1}{2}\times 2\times 1\times \sin 120°\times 2$

$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$a=\sqrt{3}$

R_2



$\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right) = S$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$$

a_n의

$a_n = 3n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$\left(\cancel{3}+\frac{1}{n}-\cancel{3}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$3+\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$1+\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

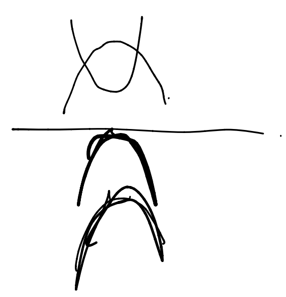
① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

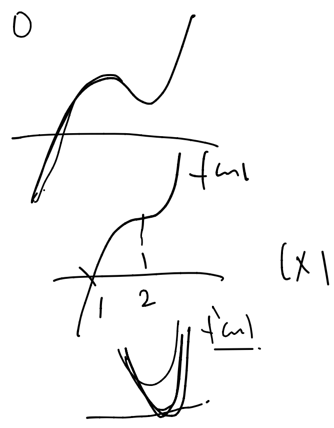
$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

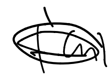
$f(1)=0$

$f'(2)=0$

$|f(2)|<1$

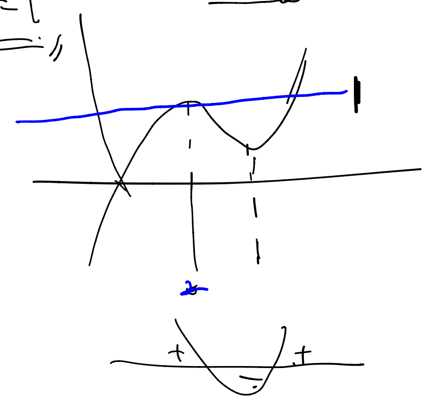


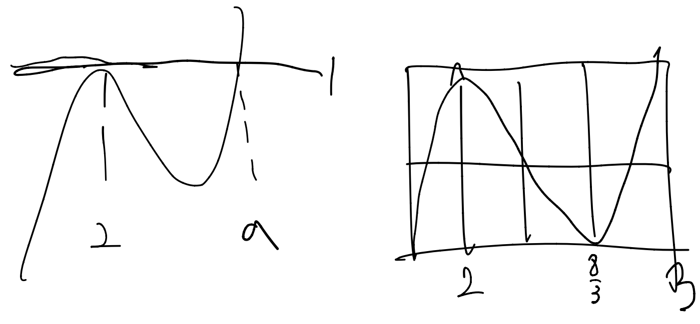




$-1<f(x)<1$

$\ln|f(x)|=0$





$g(\frac{8}{3}) = \ln|f(\frac{8}{3})|$

$= \ln\frac{25}{27}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-a)+1$

$f(1) = \frac{1}{2}(-1)^2(1-a)+1 = 0$

$\frac{1}{2}(1-a) = -1$

$1-a=-2$

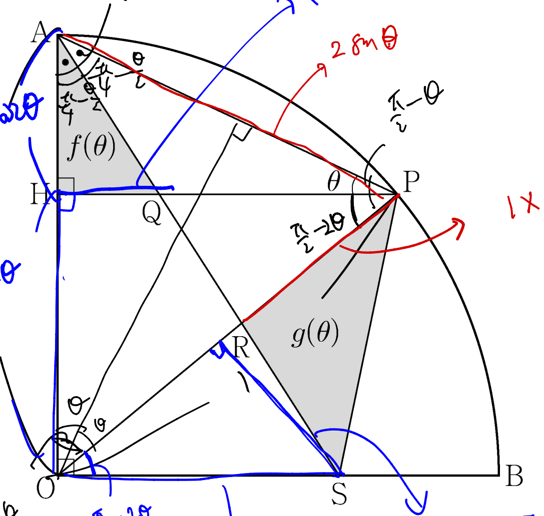
$a=3$

$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)+1$

$= -\frac{2}{27}+1 = \frac{25}{27}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. ∠APH $=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$(1-\cos 2\theta)\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$2\sin\theta$

$1\times\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

$\cos 2\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos 2\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos 2\theta$

$\frac{2\sin\theta\times\theta^3}{(1-\cos 2\theta)(1-\cos 2\theta)}\times\frac{1}{16\theta^4}$

$=\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}}\times\frac{1}{16}$

$8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

50

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(-x^2+ax)e^{-x}$

$=(-x^2+(a+2)x-a)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+a+2)e^{-x}+(x^2-(a+2)x+a)e^{-x}$

$=(x^2-(a+4)x+2a+2)e^{-x}$

$f(x)=(x^2-ax)e^{-x}$

$x(x-a)e^{-x}$

접선의 교점개수

$25-(a+4)5+2a+2=0$

$-5a+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\frac{7}{3}$

$-x^2+\frac{13}{3}x-\frac{9}{3}$

$\frac{14}{3}+$

$x^2-\left(\frac{7}{3}+4\right)x+\frac{20}{3}$

$\frac{14}{3}+\frac{6}{3}$

$x^2-\frac{19}{3}x+\frac{20}{3}$

$3x^2-19x+20$

$3x\quad -4$

$x\quad -5$

$\alpha+\beta=\frac{13}{3}$

16

$\frac{1}{16\theta^4}$

α

β

$\frac{4}{3}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

6

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

$2a=6$

$a=3$

$\dfrac{b}{3}=2$

$b=6$

$a^2+b^2=45$

$9+36$

$3\sqrt{5}$

$6\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

$(4,3)\ (1,-3)$

$$\frac{|4-9|}{5\sqrt{1+9}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

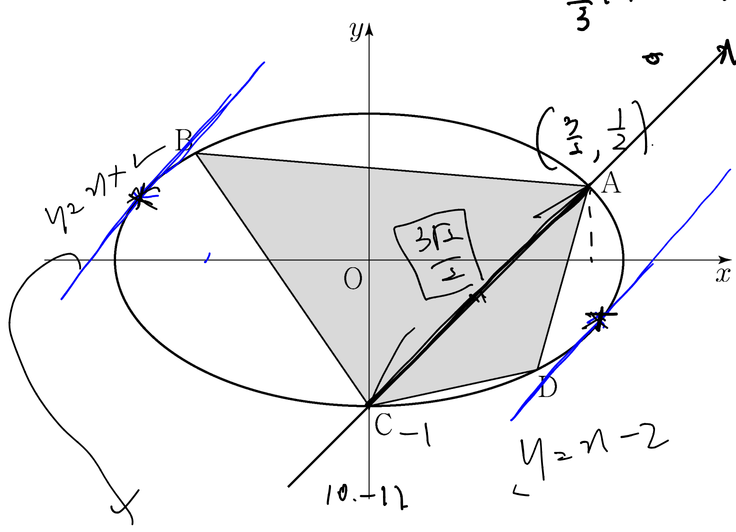
$\frac{x^2}{3}+x^2-2x+1=1$

$x^2+3x^2-6x=0$

$4x^2-6x=0$

$2x-3=0$

$x=\frac{3}{2}$



$y=x\pm\sqrt{3+1}\ \Rightarrow\ y=x\pm 2$

$x-y+2=0 \quad (0,-1)$

$\frac{|3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\overline{AC}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$-1-\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2}$

$x-y-2=0 \quad (0,-1)$

$\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

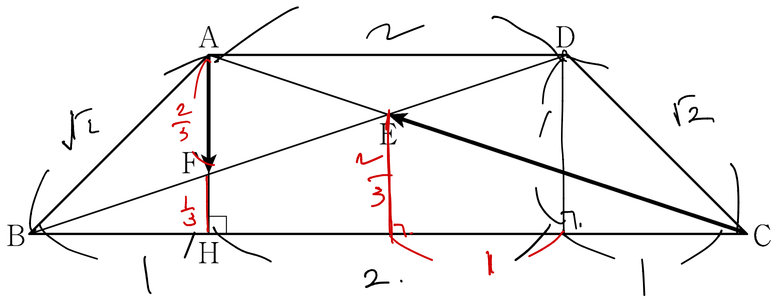
$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}$

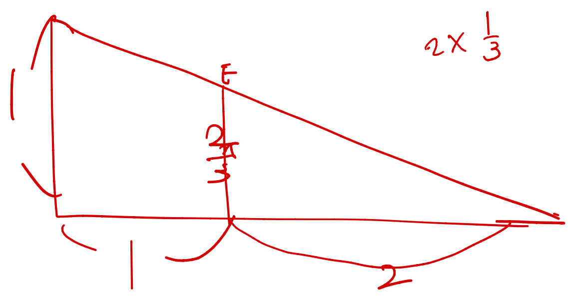
$\frac{1}{2}\times\frac{12}{2}=3$

27. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45°$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



$\overrightarrow{AF}=(0,-\frac{2}{3})$ $\overrightarrow{CE}=(-2,\frac{2}{3})$



$2\times\frac{1}{3}$

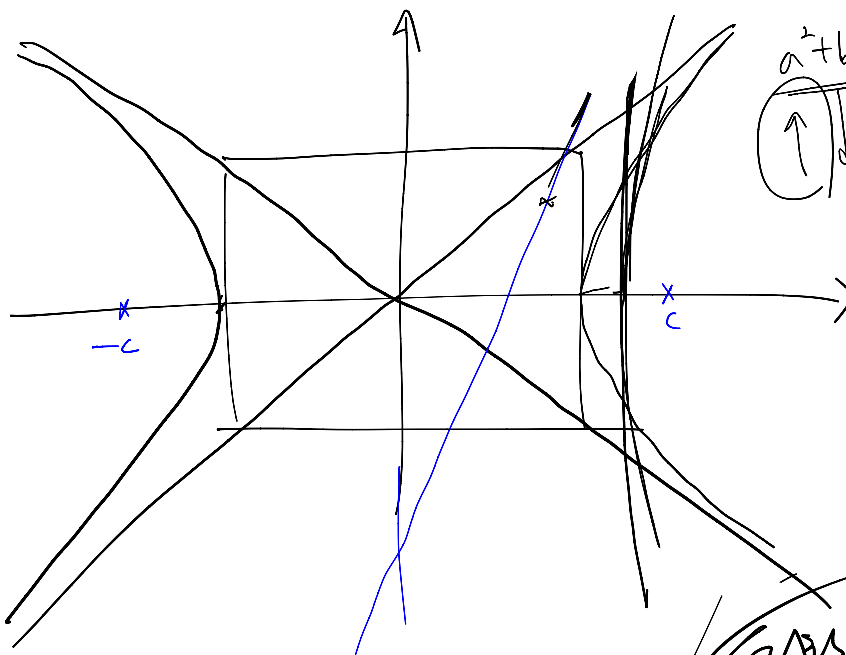
$-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$

28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $A(c,\,0)$, $B(-c,\,0)\,(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\,3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

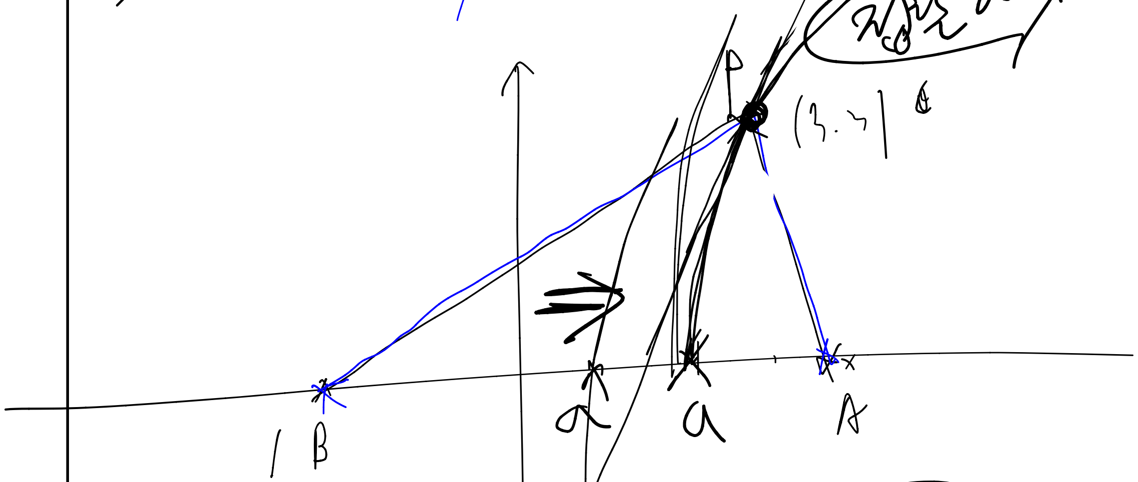
2a.

$a^2+b^2=c^2$ 상수



접한다

(3, 3)



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{9}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$

$\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$

$\frac{3y}{b^2}=\frac{3x}{a^2}-1$

$y=2x-3$

$y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$

$\frac{a}{a^2}=2$

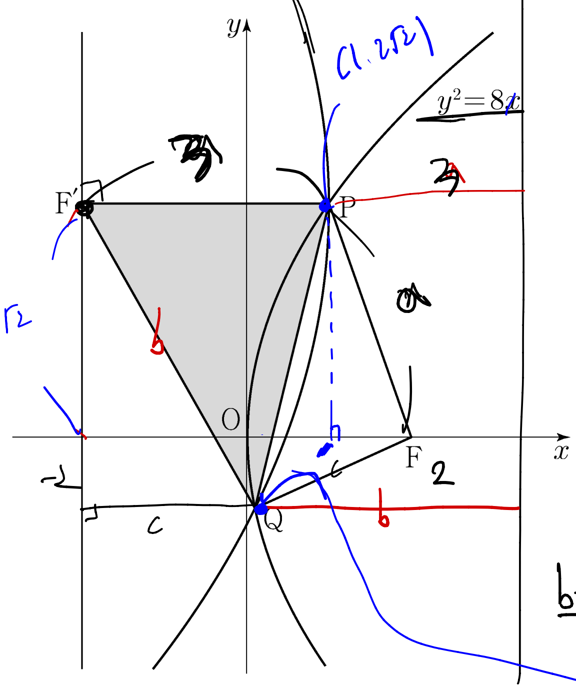
$b=3$

$\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

단답형

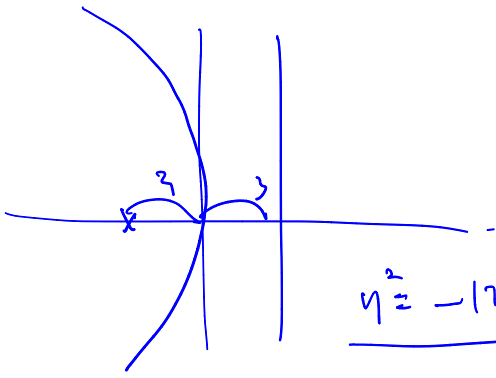
29. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$b+c=2a$

$2a+b+c=2a+2a=4a=12$

$a=3$



$y^2=-12x$

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

$y^2=8x$

$\frac{y^2}{8}=x$

$y^2-4\sqrt{2}y+8=-12x+12$

$=-\frac{3}{2}y^2+12$

$\frac{5}{2}y^2-4\sqrt{2}y-4=0$

$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$

$5y \quad +2\sqrt{2}$

$y \quad -2\sqrt{2}$

$y=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\frac{1}{2}\times 3\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}+2\sqrt{2}\right)$

$\frac{1}{2}\times 3\times\frac{12}{5}\sqrt{2}=\frac{18\sqrt{2}}{5}$

23

30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

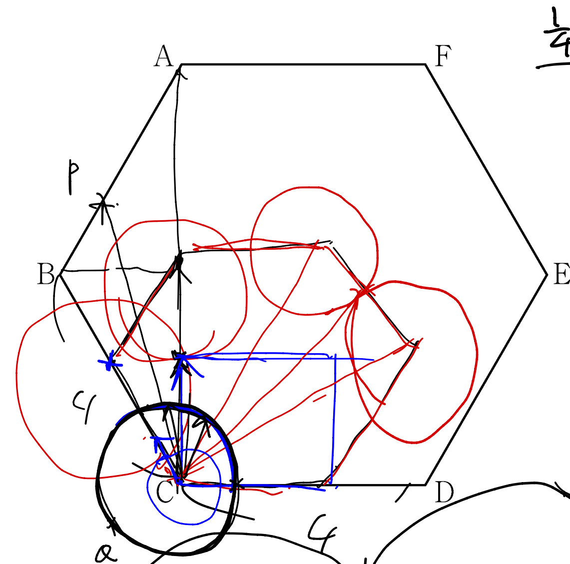
(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

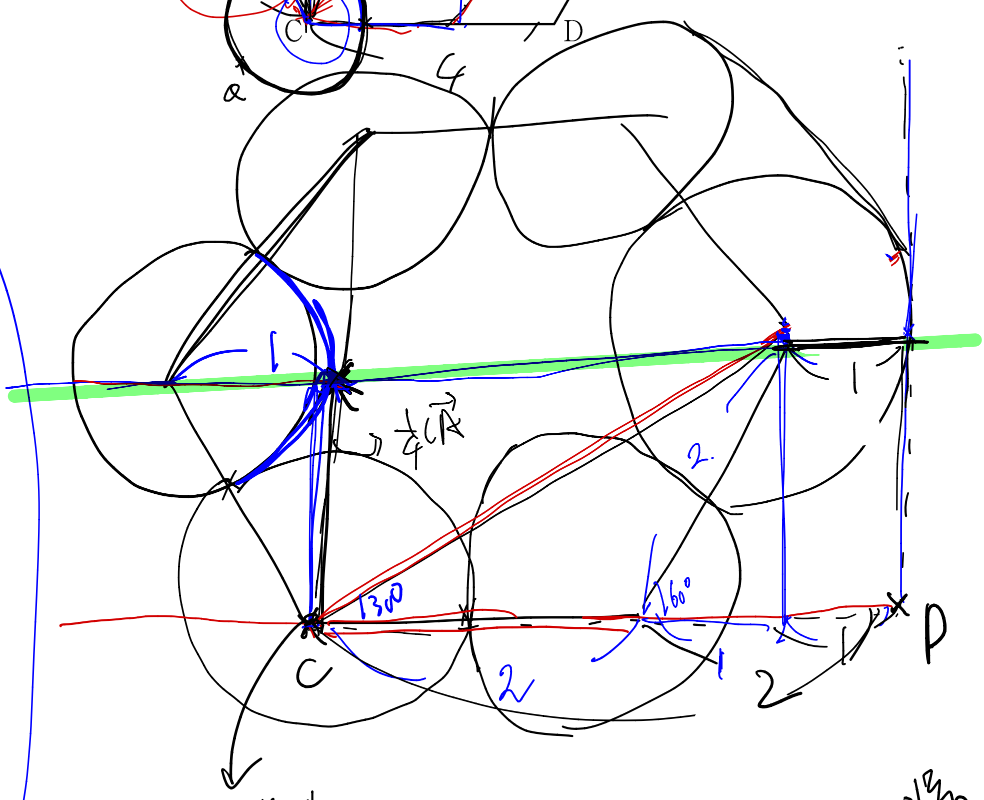
$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX}-\overrightarrow{CX}+2\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CX}=k\overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{CX}=(k-2)\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{CX}$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CX}$





기울 이동X

$k=2$일때 최소

$\alpha=2$

$4+4=8$

$\overrightarrow{CD}$ 1만큼 이동

$\frac{2-k}{4}=1$

$2-k=4$

$k=-2$

β

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.