2023학년도 6월 진주환 모의평가 1회 정답표

〈수학〉 영역

공통과목						선택과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	④	2	12	②	4	23	②	2	23	②	2	23	③	2
2	④	2	13	⑤	4	24	①	3	24	①	3	24	②	3
3	②	3	14	③	4	25	②	3	25	③	3	25	①	3
4	①	3	15	③	4	26	③	3	26	⑤	3	26	⑤	3
5	①	3	16	2	3	27	⑤	3	27	③	3	27	②	3
6	③	3	17	8	3	28	①	4	28	③	4	28	④	4
7	③	3	18	48	3	29	91	4	29	9	4	29	4	4
8	②	3	19	27	3	30	118	4	30	768	4	30	648	4
9	⑤	4	20	39	4									
10	③	4	21	42	4									
11	③	4	22	12	4									

진주환수학연구소

출제위원

진주환

한국수학올림피아드(KMO) 입상
서울특별시 과학전시관 영재교육원 수학과 25기수료
서강대 수학과
전) 대치우리학원 고등부 전임강사
현) ㈜Splanning 고등부 대표강사
현) 진주환수학연구소 대표

황석준

한양대 수학과
전) ㈜Splanning 고등부 전임강사
현) 진주환수학연구소 수석연구원

김한웅

한양대 수학과

KakaoTalk 플러스친구

YouTube

카카오톡 1:1 문의하기

Instagram

진주환수학연구소

출제범위 : 2023학년도 6월 평가원 모의평가와 同一

공통과목 : 수학Ⅰ, 수학Ⅱ 전범위
선택과목 : 확률과 통계 Ⅱ.확률, 미적분 Ⅱ.미분법, 기하 Ⅱ.평면벡터

출제근거

전 영역이 2015 개정 교육과정에 근거하여 출제

수능 시행기본계획(2022.3.22.)에서 발표한 바와 같이
EBS 수능교재 및 강의와 모의평가 출제의 연계비율은 문항 수 기준 50% 수준

※ 2023학년도 6월 평가원 모의평가 일시 : 2022년 6월 9일 목요일 ※

출제/검토 모집中 진주환수학연구소 문항 출제위원 & 검토위원 상시모집 자세한 사항은 우측 링크 (카카오톡 플러스친구) 공지글 참조

저작권 형식을 그대로 사용하면 돈거래가 이루어지는 상업적 행위를 제외하고 모두 허용

오류제보&문의 자유로운 의견과 문의은 우측 링크 (카카오톡 1:1 문의하기) 에서 언제나 환영

“ 수능수학은 결코 만만하지 않습니다.
여러분이 공부하고 있는 기출문항은 작년 선배들이 수능 시험장에서 맞이했던 신유형 문항이었습니다.
처음 문항을 겪었던 신선함을 기억하세요. ”
저희가 제공하는 당황스러운 상황에 익숙해지는 것이 여러분들의 성적을 확실하게 올릴 수 있는 유일한 방법입니다.
적어도 수능만큼은요.

2023학년도 6월
진주환 모의평가 1회 해설지
〈수학〉 영역

공통

문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	④	2	12	②	4
2	④	2	13	⑤	4
3	②	3	14	③	4
4	①	3	15	③	4
5	①	3	16	2	3
6	③	3	17	8	3
7	③	3	18	48	3
8	②	3	19	27	3
9	⑤	4	20	39	4
10	③	4	21	42	4
11	③	4	22	12	4

5지선다형

1. ④

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \times 6^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 6^2 = \frac{2^2}{3^2} \times 2^2 \times 3^2 = 2^4 = 16$ 이다.

2. ④ (EBS 수능특강 수2 77p 5번)

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^2 (3x^2-4x+2)\,dx \\ &= \left[x^3-2x^2+2x\right]_0^2 \\ &= (8-8+4)-0 \\ &= 4 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

3. ② (EBS 수능특강 수1 73p 4번)

$a_1 = S_1 = 2-1+3 = 4$ 이다.

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2-n+3)-\{2(n-1)^2-(n-1)+3\} \\ &= (2n^2-n+3)-(2n^2-5n+6) \\ &= 4n-3 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

$a_1 + a_5 = 4 + 4\times 5 - 3 = 4 + 20 - 3 = 21$ 이다.

4. ① (EBS 수능특강 수2 5p 2번)

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t}{t-1}\right) = \lim_{t\to\infty} f\left(2+\frac{2}{t-1}\right) = \lim_{x\to 2+} f(x) = 1$$

5. ① (EBS 수능특강 수1 39p 4번)

원과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 = 1$ 이므로

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 이다.

($\because$ 점 P는 제2사분면 위의 점)

즉, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ 이므로

$\cos\theta - \sin\theta = -\frac{3}{5} - \left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5}$ 이다.

6. ③ (EBS 수능특강 수2 49p 4번)

함수 $f(x)$는 역함수가 존재하므로 실수 전체의 범위에서 증가하거나 감소해야한다.

즉, $f'(x) = 0$의 근이 존재하지 않거나 한 개 존재한다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 12$ 에서 x축과 교점이 0개 또는 1개이므로

$D/4 = a^2 - 36 \leq 0$

즉, $-6 \leq a \leq 6$ 이다.

$f(1) = 1 + a + 12 + 2 = a + 15$ 이므로

$f(1)$ 의 최댓값은 $a = 6$ 일 때, 21 이다. ($\because$ a는 정수)

7. ③ (EBS 수능특강 수1 29p 10번)

진수가 $|x-3|$ 과 $|x-5|$ 이므로 $x \neq 3, 5$ 이다.

ⅰ) $x < 3$

$\log_2|x-3| < 3 - \log_2|x-5|$

$\Leftrightarrow \log_2\{-(x-3)\} < 3 - \log_2\{-(x-5)\}$

$\Leftrightarrow \log_2\{-(x-3)\} + \log_2\{-(x-5)\} < 3$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-8x+15) < \log_2 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 < 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 < 0$ 이므로 $1 < x < 7$ 이다.

$x < 3$ 이므로 ⅰ)에서의 x값은 $1 < x < 3$ 이다.

ⅱ) $3 < x < 5$

$\log_2|x-3| < 3-\log_2|x-5|$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x-3) < 3-\log_2\{-(x-5)\}$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x-3)+\log_2\{-(x-5)\} < 3$

$\Leftrightarrow\ \log_2\{-x^2+8x-15\} < \log_2 8$

$\Leftrightarrow\ -x^2+8x-15 = -(x-4)^2+1 < 8$ 이므로

실수 전체 범위에서 성립한다. 즉, $3 < x < 5$이다.

ⅲ) $x > 5$

$\log_2|x-3| < 3-\log_2|x-5|$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x-3) < 3-\log(x-5)$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x-3)+\log_2(x-5) < 3$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x^2-8x+15) < \log_2 8$

$\Leftrightarrow\ x^2-8x+7 < 0$ 이므로 $1 < x < 7$이다.

$x > 5$이므로 ⅲ)에서의 x값은 $5 < x < 7$이다.

$x = 2, 4, 6$이므로 3개다.

8. ② (EBS 수능특강 수2 51p 7번)

$f(x) = x^3-6x^2+9x-k$이므로

$f'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$이다.

따라서 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

x축과의 교점의 개수가 3개이므로

$f(1) > 0$, $f(3) < 0$을 만족한다.

$f(1) = 1-6+9-k = 4-k > 0$이므로 $k < 4$,

$f(3) = 3^3-6\times 3^2+9\times 3-k = -k < 0$이므로 $k > 0$이다.

그러므로 $0 < k < 4$이므로 $k = 1, 2, 3$이다.

모든 정수 k의 합은 $1+2+3=6$이다.

9. ⑤ (EBS 수능특강 수1 32p 5번)

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 2 : 1 : \sqrt{5}$ 이므로

$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = \sqrt{5}$ 이다.

A $(0, 1+k)$ 이고 직선 $\overline{AB}$의 기울기가 -2이므로

B $(2, k-3)$ 이고

점 B는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$k-3 = \log_2 2 = 1$이다. 즉, $k=4$이다.

10. ③ (EBS 수능특강 수2 67p 7번)

$v(t) = t(t-2) = 0$이므로 $t=2$에서 운동방향이 바뀐다.

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + C$ 에서

$x(0)x(2) < 0 \Leftrightarrow C\left(C-\frac{4}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < C < \frac{4}{3}$,

$x(3) = C$이므로 $C=1$이다. ($\because x(3)$은 자연수)

따라서 점 P가 시각 $t=4$에서의 위치는 $x(4) = \frac{19}{3}$ 이다.

11. ③

B $(0, b)$라 하자

$\overline{OA_1} : \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_4} = 1:2:3$ 이므로

$\overline{OA_1} = \mathrm{k}$, $\overline{A_1A_2} = 2\mathrm{k}$, $\overline{A_2A_4} = 3\mathrm{k}$라 하면,

$\overline{A_2A_4} = 3\mathrm{k} = 2$이므로 $k = \frac{2}{3}$ 이다.

$2\overline{BA_1} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_2A_4} - \overline{A_1A_2} = k$이므로 $\overline{BA_1} = \frac{k}{2} = \frac{1}{3}$이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{OBA_1}$은 $\angle \mathrm{OA_1B} = \frac{\pi}{3}$ 인 직각삼각형이다.

$f\left(\frac{k}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

12. ②

점 $(0, 1)$과 $(2, 5)$에서의 접선은 $y = \frac{5-1}{2-0}x+1 = 2x+1$이므로

$f(x)-(2x+1) = kx^2(x-2)^2$이다. $(k>0)$

따라서 $f(x) = kx^2(x-2)^2+2x+1$이고,

$f'(x) = 2kx(x-2)^2+2kx^2(x-2)+2$

$= 4kx(x-1)(x-2)+2$

$(1, f(1))$에서의 접선의 방정식 l은 다음과 같다.

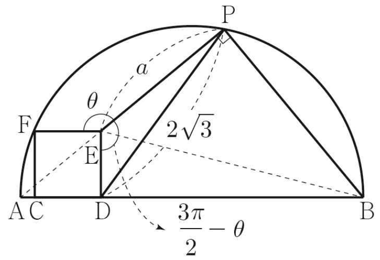
$l : y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2x+k+1$

따라서 $m = k+1$이다.

$\therefore f(1)-m = (k+3)-(k+1) = 2$

13. ⑤

그림과 같이 $\angle \mathrm{PED} = \frac{3}{2}\pi - \theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{PE}} = a$ 라 하자.



$\triangle \mathrm{PED}$ 에서 '코사인정리' 적용,

$(2\sqrt{3})^2 = 1^2 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 33 = (a-3)(3a+11) = 0$

이므로 $a = 3$ 이다.

한편, 사각형 PBDE 는 선분 BE 를 지름으로 하는 한원 위에 있으므로

$\triangle \mathrm{PED}$ 에서 '사인정리' 적용,

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)} = \overline{\mathrm{BE}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{BE}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

직각삼각형 PBE 에서 '피타고라스 정리' 적용,

$\overline{\mathrm{PB}}^2 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3^2 = \frac{9}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}\cos\angle \mathrm{ABP} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ 이다.

14. ③

함수 $y = x^2$ 의 도함수는 $y' = 2x$ 이므로 곡선 위의 점 P_{n+1} 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l_{n+1} : y &= 2a_{n+1}(x - a_{n+1}) + a_{n+1}^2 \\ &= 2a_{n+1}x - {a_{n+1}}^2 \end{aligned}$$

직선 l_{n+1} 과 x 축의 교점을 구하면

$0 = 2a_{n+1}x - {a_{n+1}}^2$ 이므로

직선 l_{n+1} 과 x 축의 교점을 Q_{n+1} 이라 하면,

$\mathrm{Q}_{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{2}, 0\right)$ 이다.

원 C_n 의 중심을 O_n 이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{H}_n} = \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_{n+1}}$,

$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1} = \angle \mathrm{O}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1} = \frac{\pi}{2}$,

그리고 $\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{O}_n}$ 은 공통변이므로

$$\triangle \mathrm{O}_n\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1} \equiv \triangle \mathrm{O}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$$

을 만족한다. 즉, $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} = \overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1}}$ 이다.

점 H_n 과 Q_{n+1} 은 x 축 위의 두 점이므로

$\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1}}$ 은 x 좌표의 차이다.

$\therefore \overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = a_n - \frac{a_{n+1}}{2}$

점 P_{n+1} 은 x 좌표가 a_{n+1} 이고, 함수 $y = x^2$ 위의 한 점이므로 점 P_{n+1} 의 좌표는

$(a_{n+1}, {a_{n+1}}^2)$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore\ & \overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} \\ &= \sqrt{\left(a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{2}\right)^2 + \left({a_{n+1}}^2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{{a_{n+1}}^2}{4} + {a_{n+1}}^4} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} = \overline{\mathrm{H}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \boxed{(\text{가})\ a_n - \frac{a_{n+1}}{2}}$

…… ㉠

양변을 제곱하여 a_n 에 대하여 ㉠을 내림차순 전개하면,

$$\sqrt{\frac{{a_{n+1}}^2}{4} + {a_{n+1}}^4} = a_n - \frac{a_{n+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{{a_{n+1}}^2}{4} + {a_{n+1}}^4 = {a_n}^2 - a_n a_{n+1} + \frac{{a_{n+1}}^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad {a_n}^2 - a_{n+1}a_n - {a_{n+1}}^4 = 0$$

이므로 a_n 에 대하여 근의 공식을 사용하면

$$\Leftrightarrow\ a_n = \frac{a_{n+1} + \sqrt{{a_{n+1}}^2 + 4{a_{n+1}}^4}}{2}$$

($\because$ $a_n > 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1+\sqrt{\boxed{(\text{나})\ 1+4{a_{n+1}}^2}}}{2}$$

…… ㉡

이다.

$a_2 = 2a_3$ 이므로

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{1+\sqrt{1+4{a_3}^2}}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1+4{a_3}^2 = 9$$

$a_3 = \sqrt{2}$ ($\because$ $a_3 > 0$)이다.

$a_2 = 2a_3 = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{a_2 + \sqrt{{a_2}^2 + 4{a_2}^4}}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2+64} = \sqrt{2} + \sqrt{\boxed{(\text{다})\ 66}}$$

이다.

(가) $f(n) = a_n - \frac{a_{n+1}}{2}$ 이므로

$$f(2) = a_2 - \frac{a_3}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(나) $g(n) = 1+4{a_{n+1}}^2$ 이므로

$$g(1) = 1+4{a_2}^2 = 1+4\times(2\sqrt{2})^2 = 33$$

(다) $p = 66$

$$\therefore \frac{\{f(2)\}^2\times p}{g(1)} = \frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2\times 66}{33} = \frac{\frac{9}{2}\times 66}{33} = 9$$

15. ③

'로그의 정의'에 의해

$g(x) \le 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)$ 는 정의되지 않는다. 그러므로 $g(x) > 0$, $g(x) \ne 1$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 정의할 수 있다.

$g(x) = 1$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여

$g(x)^{h(x)} = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \Leftrightarrow 1^{h(x)} = |f(x)|$ 이므로

$f(x) = \pm 1$ 이면 $h(x)$ 의 y 값은 무한개이고

$f(x) \ne \pm 1$ 이면 $h(x)$ 는 정의할 수 없다.

즉, 함수가 아니므로 $g(x) = 1$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)$ 는 불연속이다. …… ㉠

한편, 함수

$h(x) = \log_{g(x)}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \log_{g(x)}|f(x)| - 1$ 이다.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 을 만족하는 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\log_{g(x)}|f(x)| = -\infty$$

(단, $g(a) \ne 1$)

이므로 $f(x) = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)$ 는 불연속이다. …… ㉡

㉠, ㉡을 통해, $f(x) = 0$ 또는 $g(x) = 1$ 을 만족하는 실수 x 는 $x = 1$ 그리고 $x = 2\alpha$ 뿐이다.

가능한 함수 $g(x)$ 는 다음과 같은 세 가지이다.

(i) $g(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2+1 \Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{1}{4}(\alpha-1)^2+1$

(ii) $g(x) = \frac{1}{4}(x-2\alpha)^2+1 \Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^2+1$

(iii) $g(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-2\alpha)+1$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{1}{4}(1-\alpha)\alpha+1$$

$\alpha > 1$ 이므로 $g(\alpha) = \frac{1}{4}(1-\alpha)\alpha+1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$f(1) = f(2\alpha) = 0$ 이고 $f'(\alpha) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 2\alpha$ 에서 x 축에 접한다.

$f(x) = (x-1)(x-2\alpha)^2$, $f'(x) = 3(x-\alpha)(x-2\alpha)$ 이므로 이를 계산하면 $\alpha = 2$ 이다.

따라서,

$f(\alpha)g(\alpha) \ge 4\times\left(\frac{1}{4}\times(-1)\times 2+1\right) = 4\times\frac{1}{2} = 2$ 이다.

단답형

16. 2

$\log_2 25 \times \log_5 2 = \dfrac{2\log 5}{\log 2} \times \dfrac{\log 2}{\log 5} = 2$이다.

17. 8

$f(x) = x^3 - 4x + 3$에서 $f'(x) = 3x^2 - 4$이므로

$f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$이다.

18. 48 (EBS 수능특강 수1 77p 7번)

공비를 $r\ (r \neq 1)$이라 하면 $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$이다.

$S_4 = \dfrac{a(r^4 - 1)}{r-1} = 15a_1$이므로

$\dfrac{r^4 - 1}{r-1} = r^3 + r^2 + r + 1 = 15$이다.

$r^3 + r^2 + r - 14 = (r-2)(r^2 + 3r + 7) = 0$이므로

$r = 2$이고, $a_2 = 3$이므로 $a_1 = \dfrac{3}{2}$ 이다.

$a_6 = ar^5 = \dfrac{3}{2} \times 2^5 = 48$이다.

19. 27 (EBS 수능특강 수1 75p 4번)

$g(x) = \displaystyle\int f(x^3)dx$ 라 하자.

준식$= \displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3} g'(1) = \frac{1}{3} f(1) = 9$

이므로 $f(1) = 27$이다.

20. 39

조건 (가)에서 닫힌구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자.

조건 (나)에 의해 $f(1) = 0$이므로 $c = 0$이다.

또한 $xf(x+1) = f(x)$ 이므로

$f(x+1) = x^2 + ax + b$이다. $(0 < x \leq 1)$

이때 $f'(x+1) = 2x + a$이므로

$\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x+1) = f'(1) = a$이다.

한편, $f'(1) = 3 + 2a + b$이므로 두 식을 연립하면, $a + b = -3$이다. … ㉠

닫힌구간 $[-1, 0]$에서

$f(x) = xf(x+1)$ 이므로

$f'(x) = f(x+1) + xf'(x+1)$ 이다.

따라서 $f'(0) = f(1) = 1 + a + b$이다.

$f'(0) = b$이므로 두 식을 연립하면,

$1 + a = 0$이다. … ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a = -1, b = -2$이다.

따라서 $0 \leq x \leq 1$에서 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$이다.

$$\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^1 x^3 - x^2 - 2x\,dx - \int_0^1 x^2 - x - 2\,dx$$
$$= \frac{13}{12} + \frac{13}{6} = \frac{39}{12}$$

따라서 $12 \times \displaystyle\int_0^2 |f(x)|\,dx = 39$

21. 42

$n = 1$; $S_1 = a_1 = a_2 = k$ (k는 자연수)

$n = 2$; $S_1 + S_2 = 2a_1 + a_2 = a_4 = 3k$

$n = 3$; $S_1 + S_2 + S_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 = a_6 = 4k$ 또는 $6k$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	k	k	$3k$	$3k$	$6k$
		$-k$		$-3k$	$4k$

○ 의 합은 $7k$, ● 의 합은 $3k$,

$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 2k$ 또는 $8k$

이므로 가능한 $S_6 = 5k, 9k, 11k, 15k$ 이다.

따라서 가능한 자연수 k는 2, 6이다.

a_7	a_8
$6k$	$12k$
$-6k$	
$4k$	$8k$
$-4k$	

$S_8 = 15k + (-6k) + 12k = 21k = 42$

$S_8 = 5k + (-4k) + 8k = 9k = 54$

이므로 S_8의 최솟값은 42이다.

22. 12

조건 (가)에서 $g(x)$는 최댓값을 가지므로 함수 $f(x)$는 최고차항이 음수인 삼차함수이다.

$f(1) = 0$이고, 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = 0$ 이다.

조건 (나)에서 $\int_m^{m+3} g(t)\,dt = 1$의 근이

$0 \le m \le 1$ 이므로 $f(p) = 0$인 p가 닫힌구간 $[1, 3]$에 존재한다. 또한 $\int_{-2}^{m} g(t)dt = 1$의 근은 $0 \le m \le 1$ 이므로

$f(q) = 0$인 q가 닫힌구간 $[-2, 0]$에 존재한다. ⋯ ㉠

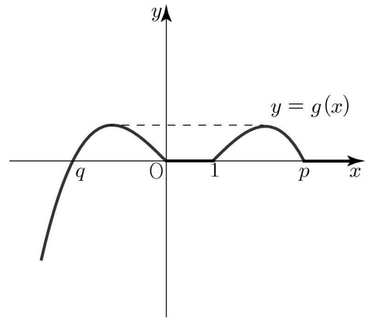
$g(x) = 0$의 근은 $0 \le x \le 1,\, p \le x$이다.

조건 (가)에서 두 개의 최댓값이 같고

$$g(x) = \begin{cases} kf(x+1) & (-2 < x < 0) \\ 2f(x) & (1 < x < 3) \end{cases}$$

이므로 $k = -2$ 이다.

따라서 $g(x)$의 개형은 다음과 같고



$|g(-4)| = -g(-4)$의 최솟값은 $g(-4)$의 최댓값이므로

$p = 3,\, q = -2$ 이다.

㉠에서 $\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$ 이므로

$f(x) = t(x+1)(x-1)(x-3)$이라 하면,

$$t\int_1^3 x^3 - 3x^2 - x + 3\,dx = t \times \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^3 + 3x\Big]_1^3$$

$$= -4t = \frac{1}{2}$$

이므로 $t = -\frac{1}{8}$이다.

따라서 $f(x) = -\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-3)$ 이므로

$|g(-4)| \le -kf(-3)$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) \times (-2) \times (-4) \times (-6)$$

$$= 12$$

2023학년도 6월
진주환 모의평가 1회 해설지
〈수학〉 영역

확률과 통계

문항번호	정답	배점
23	②	2
24	①	3
25	②	3
26	③	3
27	⑤	3
28	①	4
29	91	4
30	118	4

5지선다형

23. ② (EBS 수능특강 확률과통계 49p 4번)

$P(A)=k$라 하면, $\left(\text{단}, \dfrac{1}{2} \le k \le 1\right)$

$P(B)=k-\dfrac{1}{2}$이고,

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$이므로 $k\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{9}$

따라서 이를 만족하는 $k=\dfrac{2}{3}$이다.

24. ①

$x=0$일 때, $y=\pm 9$이다. (2개)
$x=\pm 1$일 때, $y=\pm 8$이다. (4개)
$x=\pm 2$일 때, $y=\pm 5$이다. (4개)
$x=\pm 3$일 때, $y=0$이다. (2개)

따라서 12 개이다.

25. ② (EBS 수능특강 확률과통계 40p 2번)

전체 경우의 수 : $6^3=216$
$a\le b\le c$을 만족하는 경우의 수 : ${}_6\mathrm{H}_3=56$
$a=b\le c$를 만족하는 경우의 수 : ${}_6\mathrm{H}_2=21$

$\therefore \dfrac{56-21}{216}=\dfrac{35}{216}$

26. ③ (EBS 수능특강 확률과통계 11p 7번)

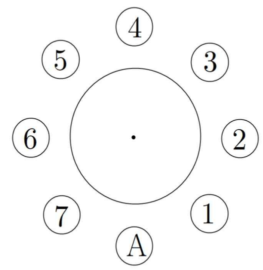
$\sum_{k=1}^{3} kf(2k-1)=f(1)+2f(3)+3f(5)=9$를
만족하는 순서쌍
$(f(1), f(3), f(5))$는 $(0,0,3)$, $(0,3,1)$, $(3,3,0)$이다.

이 세 가지 경우 순서쌍 $(f(2), f(4))$는
총 $3^2=9$가지 이므로

$\therefore 9\times 3=27$이다.

27. ⑤ (EBS 수능특강 확률과통계 10p 1번)

원순열이므로 학생 A의 위치를 다음 그림과 같이 고정하자.



학생 C가 앉을 수 있는 자리는 1번, 7번 자리이므로 경우를 나누어 살펴보면 다음과 같다.

(ⅰ) 학생 C가 1번자리에 앉는 경우
학생 B가 앉을 수 있는 자리 : 2, 3, 5, 6, 7 (5자리)

(ⅱ) 학생 C가 7번자리에 앉는 경우
학생 B가 앉을 수 있는 자리 : 1, 2, 3, 5, 6 (5자리)

따라서 학생 A, B, C의 자리배치 : 10가지
나머지 학생 5명의 자리배치 : 5!가지

$\therefore 10\times 5!=1200$

28. ①

$(x+1)^{n+1}(x-1)^{n-1}=(x+1)^2(x^2-1)^{n-1}$이므로
x^n의 계수는 '이항정리'에 의해

(ⅰ) n이 홀수일 때, $n=2k-1$라 하자 (단, k는 자연수)
$a_{2k-1}=2\,{}_{2k-2}\mathrm{C}_{k-1}(-1)^{k-1}$

(ⅱ) n이 짝수일 때, $n=2k$라 하자 (단, k는 자연수)
$a_{2k}={}_{2k-1}\mathrm{C}_{k}(-1)^{k-1}+{}_{2k-1}\mathrm{C}_{k-1}(-1)^{k}$
$=(-1)^{k-1}({}_{2k-1}\mathrm{C}_{k}-{}_{2k-1}\mathrm{C}_{k-1})=0$

$a_1=2,\ a_3=-4,\ a_5=12,\ a_7=-40,\ a_9=140$
이므로 $S_n>10$을 만족시키는 n의 최솟값은 9이다.

단답형

29. 91

상자 A에 들어가는 노란 공, 파란 공, 빨간 공의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

$a+b+c=15$ 이므로 ${}_3\mathrm{H}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$
이때 $a>10$인 경우의 수는
$a=11 \rightarrow b+c=4$: ${}_2\mathrm{H}_4=5$
$a=12 \rightarrow b+c=3$: ${}_2\mathrm{H}_3=4$
$\vdots$
$a=15 \rightarrow b+c=0$: ${}_2\mathrm{H}_0=1$
이므로 $1+2+\cdots+5=15$
마찬가지로 $b>10,\ c>10$인 경우도 각각 15가지이므로
$\therefore 136-3\times15=91$

30. 118

시행이 2회에 종료될 확률은 수정이가 2회 구슬의 개수를 맞춰야 하므로 (1회, 2회)에서 가져오는 구슬의
순서쌍은 $(2,3),\ (3,2),\ (3,3)$ 이다.

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\times3$ 이다.

시행이 3회에 종료될 확률은 수정이가 1회 못 맞추고 2회 맞추는 경우와 3회 모두 맞추는 경우가 있으므로 경우를 나누어 살펴보자.

(ⅰ) 3회 모두 맞추는 경우 : $\left(\frac{1}{3}\right)^6\times14$
$(1,1,3),\ (1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,3,1),\ (1,3,2),\ (1,3,3)$: $\left(\frac{1}{3}\right)^6\times6$
$(2,1,2),\ (2,1,3),\ (2,2,1),\ (2,2,2),\ (2,2,3)$: $\left(\frac{1}{3}\right)^6\times5$
$(3,1,1),\ (3,1,2),\ (3,1,3)$: $\left(\frac{1}{3}\right)^6\times3$

(ⅱ) 3회 중 2회 맞추는 경우 : $\left(\frac{1}{3}\right)^4\times4$
$(0,2,3),\ (0,3,2),\ (0,3,3)$: $\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times3$
$(2,0,3),\ (3,0,2),\ (3,0,3)$: $\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times3$

$$\therefore \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^4+14\left(\frac{1}{3}\right)^6}{3\left(\frac{1}{3}\right)^4+14\left(\frac{1}{3}\right)^6+4\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{27+14}{27+14+36}=\frac{41}{77}$$

따라서 $p+q=41+77=118$이다.

2023학년도 6월
진주환 모의평가 1회 해설지
〈수학〉 영역

미적분

문항번호	정답	배점
23	②	2
24	①	3
25	③	3
26	⑤	3
27	③	3
28	③	4
29	9	4
30	768	4

5지선다형

23. ② (EBS 수능특강 미적분 10p 3번)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2$$

24. ① (EBS 수능특강 미적분 33p 5번)

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 이다.

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ 이므로 $\sin\beta=-\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$ 이다.

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$ 이다.

25. ③ (EBS 수능특강 미적분 54p 4번)

$x=a\ln t$, $y=t-\frac{9}{t}$ 이므로

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{9}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{t}$ 이다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{a}{t}}{1+\frac{9}{t^2}}=\frac{a}{t+\frac{9}{t}}\text{ 이다.}$$

$t+\frac{9}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{9}{t}}=2\sqrt{9}=6$ 이므로

$\frac{dy}{dx}$ 의 최댓값은 $\frac{a}{6}=2$ 이다. (산술기하평균부등식)

$\therefore a=12$

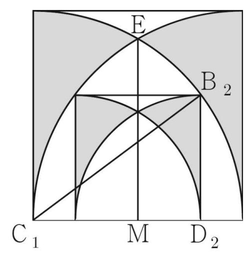
26. ⑤

호 A_1D_1 와 호B_1C_1 의 교점을 E 라 하면,
S_1 의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$2\times$(부채꼴 $A_1C_1D_1-$(2$\times$부채꼴 $C_1E_1D_1-$삼각형 EC_1D_1)

$\therefore S_1=2\times\left(\frac{\pi}{4}-\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

한편, 그림과 같이 점 E 에서 선분 C_1D_1 에 내린 수선의 발을 M 이라 하자.



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한변의 길이를 m 이라 하면,

$\overline{C_1D_2}=\frac{m+1}{2}$, $\overline{B_2D_2}=m$, $\overline{C_1B_2}=1$ 이므로

직각삼각형 $C_1B_2D_2$ 에서 '피타고라스 정리'를 적용하면,

$1^2=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+m^2\Leftrightarrow 5m^2+2m-3=0$

즉, $m=\frac{3}{5}$ 이다. 따라서 공비는 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25(3\sqrt{3}-\pi)}{96}$$

27. ③

ㄱ. (참) $f(e)=e^{\ln e}=e^1=e$

ㄴ. (참) $\ln f(x)=(\ln x)^2$ 이므로 $f(x)=e^{(\ln x)^2}$ 이다.

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}e^{(\ln x)^2}$ 이므로 $f'(1)=0,\ f'(e)=2$

$y=f'(x)$ 는 $x>0$ 에서 연속이므로

$g(x)=f'(x)-1$ 라 하면, $g(x)$ 도 연속함수이고,

$g(1)=-1,\ g(e)=1$ 이므로

'사잇값의 정리'에 의해 $g(c)=0$ 인 c 가 $(1,\ e)$ 에 존재한다.

〔다른 풀이〕

$\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=1$ 이므로 '평균값의 정리'에 의해

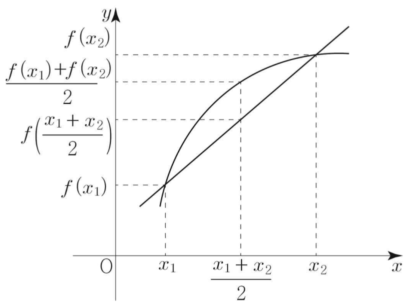
$f'(c)=1$ 인 c가 열린구간 $(1,e)$ 에 존재한다.

ㄷ. (거짓) (ㄴ)에서 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}e^{(\ln x)^2}$ 이므로

이계도함수 $f''(x)=e^{(\ln x)^2}\times\dfrac{2+(\ln x)^2}{x^3}$ 는 $x>0$ 에서 항상 양수이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 아래로 볼록하다.

한편, 그림과 같이

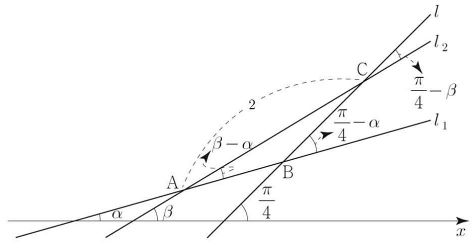


$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 은 위로볼록이므로

거짓이다.

28. ③

$m_1=\tan\alpha,\ m_2=\tan\beta$ 라 하면, 그림과 같이



$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{4}\pi+\alpha$ 이다.

$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 외접원의 반지름은 $\sqrt{5}$ 이므로

'사인정리'를 이용하면,

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\alpha\right)}=2\sqrt{5}$ 이다.

$\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\alpha\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\tan\left(\dfrac{3}{4}\pi+\alpha\right)=-\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\left(\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{3}{4}\pi+\alpha<\pi\right)$

'탄젠트의 덧셈정리'에 의해

$\tan\left(\dfrac{3}{4}\pi+\alpha\right)=\dfrac{-1+\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 이다.

따라서 $m_1=\dfrac{1}{3}$ 이다.

단답형

29. 9 (EBS 수능특강 미적분 42p 3번)

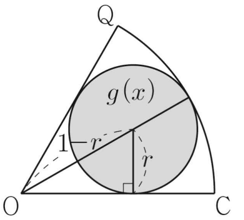
$\angle OPQ = \alpha$ 라 하면, 삼각형 AOP 에서
사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{OP}}{\sin\theta} = \dfrac{\overline{AO}}{\sin\alpha}$ 이므로 $\sin\alpha = 2\sin\theta$ 이다. $\cdots$ (ⅰ)

$\therefore f(\theta) = \dfrac{1}{2}\overline{OP}\,\overline{OQ}\sin(\pi - 2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

한편, 그림과 같이 반지름을 r 이라 하면,



$\angle COQ = \angle OAQ + \angle AQO = \theta + \alpha$ 이므로

$\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2} = \dfrac{r}{1-r}$

즉, $r = \dfrac{\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}}$ 이다.

$$\therefore g(\theta) = r^2\pi = \frac{1-\cos(\theta+\alpha)}{2\left(1+\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\right)^2}\pi$$

$$= \frac{(1-\cos\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}) + 2\sin^2\theta}{2\left(1+\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\right)^2}\pi$$

$$= \frac{(1-\cos\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}) + 2\sin^2\theta}{2\left(1+\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\right)^2}\pi$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{2f(\theta)g(\theta)}{\theta^3\pi}$$

$$= 2\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}$$
$$\times\left(\frac{(1-\cos^2\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta)\pi}{2\theta^2\pi(1+\cos\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta})} + \frac{2\sin^2\theta\pi}{2\theta^2\pi}\right)$$

$$= 2\times2\times\left(\frac{5}{4}+1\right) = 9$$

30. 768

$y=f(x)$ 의 미분불가능한 점은 $x = -\dfrac{b}{a}$ 이므로

$y=h(x)$의 미분불가능한 점은 $g(x) = -\dfrac{b}{a}$ 이다.

따라서 $g(\alpha)=g(\beta) = -\dfrac{b}{a}$ 이다.

조건 (나)에서

$x^2+kx+k = \left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2 + 2k - \dfrac{k^2}{4}$ 이고 $|\alpha-\beta| = 1$ 이므로

$\alpha = -\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2},\ \beta = -\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

$\therefore g(\alpha)=g(\beta)=\ln\left(\dfrac{-k^2+8k+1}{4}\right) = -\dfrac{b}{a}$ $\cdots$(ⅰ)

조건 (가)에서

$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \pm a\times\dfrac{2x+k}{x^2+kx+2k}$ 이므로

$h'(-k) = -1 \Leftrightarrow |a| = 2$이다.

한편, $f(0) = 2g(-1) \Leftrightarrow |b| = 2\ln(1+k)$ $\cdots$(ⅱ) 이므로

(ⅰ), (ⅱ)를 연립하면,

$\ln\left(\dfrac{-k^2+8k+1}{4}\right) = \pm\ln(1+k)$ 이고, 이를 만족하는 자연수 k는 3이다.

(ⅰ)에서 $2\ln2 = -\dfrac{b}{a}$ 이므로 a와 b는 부호가 반대이다.

$\therefore \dfrac{k}{e^{ab}} = \dfrac{3}{e^{-8\ln2}} = 768$

2023학년도 6월
진주환 모의평가 1회 해설지
〈수학〉 영역

기하

문항번호	정답	배점
23	③	2
24	②	3
25	①	3
26	⑤	3
27	②	3
28	④	4
29	4	4
30	648	4

5지선다형

23. ③

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3,2) \cdot (-1,3) = 3\times(-1) + 2\times 3 = 3$

24. ② (EBS 수능특강 기하 7p 4번)

직선 $y = kx+1$ 은 k 값에 관계없이 항상 $(0,1)$ 을 지난다.
포물선과 직선이 접할 때의 기울기를 구해보면

$k^2x^2 + 2kx + 1 = 12x$

$\Leftrightarrow\ k^2x^2 + 2(k-6)x + 1 = 0$ 이므로

$D/4 = (k-6)^2 - k^2 = -12k + 36 = 0$ 이다.

즉, 포물선에 접하는 직선은 $y = 3x+1$ 이다.

따라서 점 $(0,1)$ 에서 포물선 $y^2 = 12x$ 에 그은 접선의 기울기는 3 이므로

$f(k) = \begin{cases} 2 & (k<3) \\ 1 & (k=3) \\ 0 & (k>3) \end{cases}$ 이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{5} kf(k) = 1\times 2 + 2\times 2 + 3\times 1 + 0 = 9$

25. ① (EBS 수능특강 기하 23p 6번)

직선과 타원이 접하므로 x 에 대하여
내림차순으로 식을 정리하면 판별식이 0 이다.

$\dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2a^2$

$x^2 + 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + (x^2 - 8x + 16) = 2a^2$

$\therefore\ 2x^2 - 8x + 16 - 2a^2 = 0$ 이므로

$D/4 = 16 - 2(16 - 2a^2) = 4a^2 - 16 = 0$

$\therefore a = 2$

26. ⑤ (EBS 수능특강 기하 65p 9번)

직선 $\dfrac{x-3}{a} = \dfrac{3-2y}{3}$ 의 방향벡터를

$\vec{u} = \left(a, -\dfrac{3}{2}\right)$ 라 하고

직선 $x+2 = \dfrac{y-4}{2}$ 의 방향벡터를

$\vec{v} = (1,2)$ 라 하자.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(a, -\dfrac{3}{2}\right) \cdot (1,2)$

$= a\times 1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)\times 2 = a - 3$ 이다.

한편,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos\theta$

$= \sqrt{a^2 + \dfrac{9}{4}} \times \sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

이므로 $\sqrt{a^2 + \dfrac{9}{4}} = a - 3$ 이다.

$\therefore\ a^2 + \dfrac{9}{4} = a^2 - 6a + 9$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{9 - \dfrac{9}{4}}{6} = \dfrac{\dfrac{27}{4}}{6} = \dfrac{9}{8}$

27. ② (EBS 수능특강 기하 37p 4번)

점 P 를 (x_1, y_1) 라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}=\frac{|2x_1-y_1|}{\sqrt{2^2+1^2}},\ \overline{\mathrm{PB}}=\frac{|x_1-2y_1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PA}}^2$, $\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

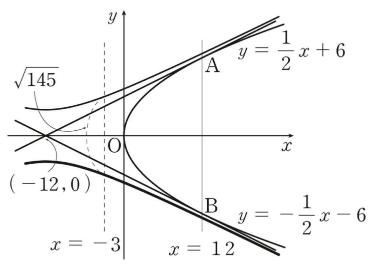
$3(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=3(\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{PA}}^2)$
$=\frac{9}{5}(-x_1^2+y_1^2)$ 이다.

따라서 $3(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+1$
$\Leftrightarrow \frac{9}{5}(-x_1^2+y_1^2)=x_1^2+y_1^2+1$
$\Leftrightarrow \frac{14x_1^2}{5}-\frac{4y_1^2}{5}+1=0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{\frac{5}{14}}-\frac{y_1^2}{\frac{5}{4}}=-1$ 이므로

점 P 의 자취는 초점이 y 축 위에 존재하는 쌍곡선이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ 의 최솟값은
점 P 가 꼭짓점 위에 존재할 때 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

28. ④



점 A 는 (12, 12), 점 B 는 (12, −12) 이므로
점 A 에서의 접선의 방정식은
$12y=12\left(\frac{x+12}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+12)$ 이고

점 B 에서의 접선의 방정식은
$-12y=12\left(\frac{x+12}{2}\right) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}(x+12)$ 이다.
점근선의 교점이 (−12, 0) 이므로 구하고자 하는
쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x+12)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ 이다. (단, $a, b>0$)

점근선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. 즉, $a^2=4b^2$ 이다.

한편, 포물선 $y^2=12x$ 의 준선은 $x=-3$ 이다.
두 점근선과 준선의 교점은 $\left(-3, \pm\frac{9}{2}\right)$ 이므로
교점의 거리는 $\frac{9}{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)=9<\sqrt{145}$ 이다.

그러므로 쌍곡선은 점근선을 기준으로 오른쪽과 왼쪽이 아닌 위와 아래에 존재한다.

따라서 구하고자 하는 쌍곡선은
$\frac{(x+12)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 이다.

$x=-3$ 을 대입해보면
$\frac{81}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2(81+a^2)}{a^2}$ 이므로
길이는 $2\times\frac{b}{a}\sqrt{81+a^2}=\sqrt{145}$ 이다.
$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ 이므로
$81+a^2=145 \Leftrightarrow a^2=64$ 이다.

즉, $a=8$, $b=4$ 이다.

쌍곡선의 두 초점은 $(-12, \pm 4\sqrt{5})$ 이므로
두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{5}-(-4\sqrt{5})=8\sqrt{5}$ 이다.

단답형

29. 4

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})=\frac{3}{5}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

점 F 는 선분 DE 를 1 : 4 로 내분하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{5}$$
$$=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})}{5}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+23\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{25}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 23\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{25} - \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$
$$= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 23\overrightarrow{\mathrm{AD}} - 15\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 15\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{25}$$
$$= \frac{-12\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 8\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{25}$$

$\therefore 5\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\frac{12}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ 이므로

$m = -\frac{12}{5}$, $n = \frac{8}{5}$,

즉, $n - m = \frac{8}{5} - \left(-\frac{12}{5}\right) = 4$ 이다.

30. 648

$\left|x\vec{a} + y\vec{b}\right| = 12$의 양변을 제곱하면

$\left|\vec{a}\right|^2 x^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}xy + |b|^2 y^2$
$= |a|^2 x^2 + |b|^2 y^2 = 144$ 이다.

그러므로

$\frac{x^2}{|b|^2} + \frac{y^2}{|a|^2} = \frac{144}{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2} = \frac{144}{16} = 9$ 이다.

점 A가 제1 사분면 위의 점이라 하면
점 A는 $\left(2\sqrt{2}\left|\vec{b}\right|, \left|\vec{a}\right|\right)$ 이므로
점 A에서의 접선은

$\frac{2\sqrt{2}\left|\vec{b}\right|x}{\left|\vec{b}\right|^2} + \frac{\left|\vec{a}\right|y}{\left|\vec{a}\right|^2} = \frac{2\sqrt{2}x}{\left|\vec{b}\right|} + \frac{y}{\left|\vec{a}\right|} = 9$ 이다.

그러므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}}, 3\left|\vec{a}\right|\right)$ 이다.

직선 OP의 기울기는 $\frac{3\left|\vec{a}\right|}{\frac{3\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 최대일 때의 점 Q를 Q′라 하면
점 Q′에서의 접선이 직선 OP와 수직이고 점 Q′은
제1 사분면 위에 있다.

점 Q′에서의 접선의 기울기가 $-\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}$ 이므로

접선의 방정식은

$y = -\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}x + \frac{3\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}$ 이다.

($\because$ 점 Q′은 제1 사분면 위의 점이다.)

점 Q′의 좌표를 (x_1, y_1)라 하면 (단, $x_1, y_1 > 0$ 이다.)

$y_1 = -\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}x_1 + \frac{3\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}{\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|}$ 와

$\frac{x_1^2}{|b|^2} + \frac{y_1^2}{|a|^2} = 9$ 를 동시에 만족한다.

그러므로 점 Q는 $\left(\frac{3\left|\vec{b}\right|^3}{\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}, \frac{3\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|^3}{\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \le \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$
$$= \left(\frac{3\left|\vec{b}\right|}{\sqrt{2}}, 3\left|\vec{a}\right|\right) \cdot \left(\frac{3\left|\vec{b}\right|^3}{\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}, \frac{3\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|^3}{\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}\right)$$
$$= \frac{9\left|\vec{b}\right|^4}{\sqrt{2} \times \sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}} + \frac{9\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|^4}{\sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}$$
$$= \frac{9\left(2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4\right)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4}}$$
$$= \frac{9}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4} \text{ 이다.}$$

한편, $\left|\vec{a}\right|^4$과 $\left|\vec{b}\right|^4$은 양수이므로 '산술기하평균부등식' 의해

$$2\left|\vec{a}\right|^4 + \left|\vec{b}\right|^4 \ge 2\sqrt{2 \times \left|\vec{a}\right|^4 \times \left|\vec{b}\right|^4}$$
$$= 2\sqrt{2 \times \left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^4}$$
$$= 2\sqrt{2 \times 2^8} = 2^5\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

그러므로 $m = \frac{9}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2^5\sqrt{2}}$ 이고,

$\frac{m^2}{2\sqrt{2}} = \frac{81 \times 2^5 \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 81 \times 8 = 648$ 이다.