

[권구승/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사 연습(1/2) |

| 권구승 (서울대)

대찬학원(분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써
6모에서 기말까지 당면한 과제에 충실.

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

뭐 재미있는 거 없나.

hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.

smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.

유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ 의 값은? [2점]

- ① 12 ② 10 ③ 8
④ 6 ⑤ 4

2. 닫힌 구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의
최댓값은? [2점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

3. $\int_0^1 (2x + a) dx = 4$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 부등식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 \leq 0$ 를 만족시키는
모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

5. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 의 극댓값이 3일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 3

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+a & (x > 1) \\ 2x+10 & (x \leq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

7. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_9 의 값은? [3점]

(가) $a_5 + a_9 = 0$

(나) $|a_4| + |a_8| = 12$

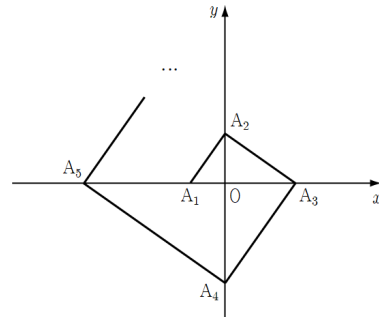
- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

8. 곡선 $y = x^3 - ax + b$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 은 다음을 만족시킨다.

(가) $A_1(-1, 0), A_2(0, \sqrt{2})$ 이다.
 (나) 점 A_n 은 n 이 홀수일 때는 x 축 위에,
 n 이 짝수일 때는 y 축 위에 존재한다.
 (다) 모든 자연수 n 에 대하여 두 선분 A_nA_{n+1} 과 $A_{n+1}A_{n+2}$ 은 서로 수직이다.

- 점 A_n 의 x 좌표를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은? [4점]



9. $0 < x < \pi$ 에서 방정식 $2\cos^2 x + a\sin x - \frac{9}{4} = 0$ 가 네 실근을 가지는 a 값의 범위는? [4점]
- ① $0 < a$ ② $\sqrt{2} < a$ ③ $0 < a < \frac{9}{4}$
 ④ $\sqrt{2} < a < \frac{9}{4}$ ⑤ $a < \frac{9}{4}$

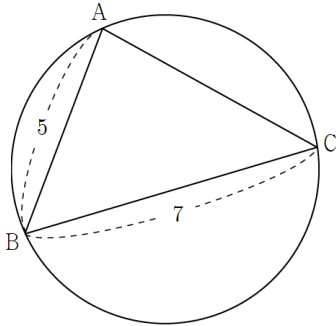
- ① $2^{10} - 1$ ② $4^{10} - 1$ ③ $\frac{2^{10} - 1}{3}$
 ④ $\frac{4^{10} - 1}{3}$ ⑤ $\frac{4^{20} - 1}{3}$

11. 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC는

$\overline{AB}=5, \overline{BC}=7$

을 만족시킨다. $\overline{AC}=a$ 일 때, a^2 의 값은?

(단, $\angle BAC < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① 30
- ② 32
- ③ 34
- ④ 36
- ⑤ 38

12. 다항함수 $f(x)$ 와 사차함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$ 이고 $g(0)=1$ 이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{g(x)}{(x-1)f(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3)$

$f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① -1
- ② $-\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{3}{2}$

13. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\int_1^x t f'(t) dt = 2x^3 + 3x^2 + ax + \int_0^1 f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

14. 함수 $f(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 2) \\ 1 & (x > 2) \end{cases}$ 와 실수 a 에 대하여
 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x (t^2 - 2t)f(t) dt$$

라고 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른
 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.
 ㄴ. 방정식 $g(x)=g(0)$ 는 하나의 근을 가진다.
 ㄷ. $a=-1$ 이면 방정식 $g(x)=0$ 의
 서로 다른 모든 실근의 합은 1이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $0 \leq x \leq 4\pi$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 방정식

$$\sin \frac{2x}{n} = \frac{1}{2}$$

의 근의 개수를 a_n 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 68 ② 66 ③ 64
 ④ 62 ⑤ 60

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+6) = 4$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하여라. [3점]

18. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3(t-2)(t-6)$$

이다. $t=2$ 부터 $t=8$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라. [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2n + 3 \text{이다.}$$

(나) $\sum_{k=1}^{11} a_k = 79$

$a_m = 20$ 인 자연수 m 의 값을 구하여라. [3점]

20. $f(x) = 2\sin x + |\sin x|$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 6\pi$ 에서 방정식

$$f(x) = \cos x$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

이다. $m + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\tan \alpha_k}$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $k^2 + 1 \leq n \leq k^2 + 2k$ 일 때,

$$a_{n+1} = a_n + 2^k \text{이다.}$$

(나) $\sum_{n=1}^k a_n = (2k-3)2^k + 3$

a_{45} 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 이고 $x=0$ 에서 최솟값 0을 갖는 사차함수 $f(x)$ 와 양수 k 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2k, f(2k))$ 에서의 접선의 방정식은 $y=24(x-k)$ 이다.

(나) $f(k) \geq 16$

$f(2k)$ 의 최솟값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x 의 계수는? [2점]

- ① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

24. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B^c 은 서로 배반사건이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A^c \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

25. 한 개의 주사위를 네 번 던진다. 3의 배수의 눈이 2번 이상 나올 확률은? [3점]

① $\frac{11}{27}$

② $\frac{4}{9}$

③ $\frac{13}{27}$

④ $\frac{14}{27}$

⑤ $\frac{5}{9}$

26. 어느 반에서 후보로 추천된 A, B, C, D 네 학생 중에서 반장과 부반장을 각각 한 명씩 임의로 뽑으려고 한다. A 또는 B가 반장으로 뽑혔을 때, C가 부반장으로 뽑힐 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

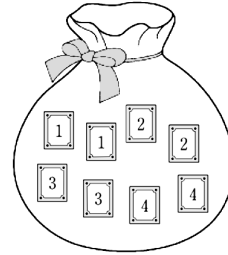
④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

27. 어느 스포츠용품점에서는 세 종류의 유니폼 A, B, C를 진열대에 전시하려고 한다. A유니폼 2벌, B유니폼 3벌, C유니폼 4벌 총 9벌의 유니폼을 진열대에 일렬로 배열할 때, A유니폼끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 유니폼은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

- ① 965 ② 970 ③ 975
 ④ 980 ⑤ 985

28. 그림과 같이 주머니에는 1부터 4까지의 자연수가 적힌 카드가 각각 2장씩 들어 있고, 두 사람 A, B가 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. A가 가진 카드에 적힌 수의 합이 B가 가진 카드에 적힌 수의 합보다 작을 확률은? (단, 한 번 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.) [4점]



- ① $\frac{27}{70}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{29}{70}$
 ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{31}{70}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=6$

(나) $(a+b)(c+d)$ 는 홀수가 아니다.

30. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 같은 종류의 사탕 8개와 서로 다른 종류의 초콜릿 4개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. [4점]

(가) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수는 그 학생이 받는 사탕의 개수보다 크지 않다.

(나) 아무것도 받지 못하는 학생은 없다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 삼각형 ABC에서 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ 라

하자. $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{4}{3}$ 일 때, $\tan \alpha$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{22}{7}$ ③ $\frac{23}{7}$
④ $\frac{24}{7}$ ⑤ $\frac{25}{7}$

25. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin x + 1$ 의

역함수를 $g(x)$ 라 하자. $g'(2)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

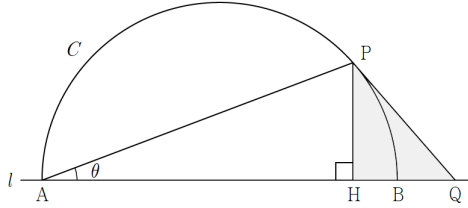
26. 자연수 k 에 대하여 $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot 5^n + k^n}{5^n + k^n}$ 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{7}{4}$
 ④ $\frac{15}{8}$ ⑤ 2

27. 그림과 같이 직선 l 위의 $\overline{AB}=2$ 인 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 반원 C 가 있다. 반원 위의 점 P에서 곡선 C 에 접하는 직선과 직선 l 이 만나는 점을 Q, 점 P에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 PHQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [3점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

28. 양의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = t \ln x + \frac{1}{t}$$

이다. 0 이상의 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \leq mx$$

이 되도록 하는 실수 m 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, $g'(2)$ 의 값은? [4점]

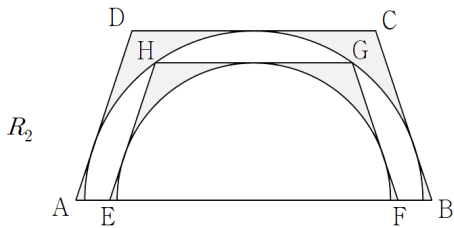
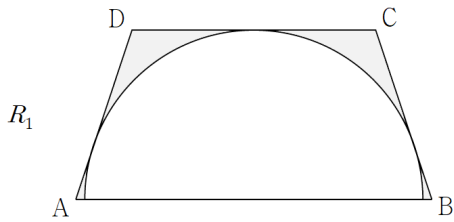
- ① $\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}}$ ② $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ ③ $\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}}$
 ④ $\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$ ⑤ $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

단답형

29. 그림과 같이 사각형 ABCD는 선분 AB와 선분 CD가 서로 평행하고 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ 이며 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 지름이 선분 AB 위에 놓이는 반원 C의 호에 세 선분 BC, CD, DA가 모두 접한다. 사각형 ABCD의 내부와 반원 C의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

선분 AB 위의 두 점 E, F, 반원 C의 호 위의 두 점 G, H에 대하여 세 선분 FG, GH, HE는 각각 선분 BC, CD, DA와 평행하다. 그림 R_1 의 반원 C와 같은 방법으로 사각형 EFGH의 내부에 반원 D를 그리고 사각형 EFGH의 내부와 반원 D의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은 $a\sqrt{2}-b\pi$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a 와 b 는 정수이다.) [4점]



30. $e^{-a-1}=a$ 를 만족시키는 상수 a 에 대하여 $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)=kx(x-1)e^{-ax}$ 가 있다. $t > 0$ 인 실수 t 에 대하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 (p, q) 가 $pt+qf(t)=0$ 를 만족시킨다. 점 (p, q) 의 자취의 길이가 $\frac{2}{3}\pi$ 일 때, $60k^2$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(-1, 4)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]
- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

24. 타원 $x^2-8x+10y^2+6=0$ 의 두 초점 사이의 거리는? [3점]
- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3}, \quad \frac{x+4}{-1} = \frac{y}{3}$$

이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$
 ④ $\frac{\sqrt{7}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{10}$

26. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 이고 두 점근선이 서로 수직인 쌍곡선에 접하고 기울기가 2인 한 직선이 x 축, y 축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, c 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

27. 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 두 점 A, B와 점 P에 대하여

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -2, \quad 3\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$$

이 성립할 때, 삼각형 OPA의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

28. 두 양수 a, p 에 대하여 점 $A(0, a)$ 에서 포물선 $y^2 = 4px$ 에 그은 y 축이 아닌 접선 l 의 접점과 x 축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하고, 점 A를 지나면서 l 과 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 D라 하자.

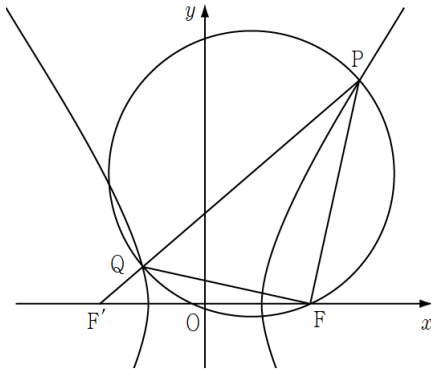
$\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ 이고, 두 점 C, D를 초점으로 하고

점 B를 지나는 타원의 장축의 길이가 $8\sqrt{3} + 8$ 일 때, $a^2 + p$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

단답형

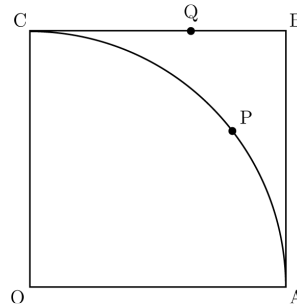
29. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P 가 있다. 직선 $F'P$ 와 쌍곡선이 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하고 선분 PQ 를 지름으로 하는 원을 C 라 하자. 원 C 가 점 F 를 지날 때, 삼각형 FPQ 와 삼각형 $FF'Q$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 하면 $S_1 = 5S_2$ 이다. $10c^2$ 의 값을 구하여라. [4점]



30. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 $OABC$ 의 내부에 점 O 를 중심으로 하는 부채꼴 OAC 가 있다. 호 AC 위의 점 D 에 대하여 두 벡터 \vec{OD} 와 $4\vec{OA} + 3\vec{OC}$ 가 서로 평행하다. 두 점 P , Q 는 각각 호 AC , 선분 BC 위를 움직일 때,

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{OQ}$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 영역을 S 라 하자. 영역 S 에 속하는 점 X 에 대하여 $\vec{OD} \cdot \vec{OX}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. [4점]



[권구승/한성은 모의고사 6월 연습(1/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	①	03	③	04	⑤	05	③
06	①	07	③	08	②	09	④	10	④
11	②	12	④	13	⑤	14	⑤	15	②
16	10	17	9	18	64	19	17	20	18
21	192	22	48						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	①	26	②	27	④
28	③	29	150	30	978				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	②	26	③	27	⑤
28	②	29	42	30	20				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	⑤	25	①	26	②	27	②
28	④	29	136	30	90				

COMMENT 10

짝수 항들은 죽고, 홀수 항들은 등비수열이당.
 $-1+2-4+8-16+\dots$

COMMENT 11

$\overline{AC}=b$, $\angle ABC=\theta$ 라 하자. 외접원의 반지름은 $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 이므로 사인법칙에 의해 $\frac{b}{\sin\theta}=5\sqrt{2}$,
 코사인법칙에 의해 $b^2=74-70\cos\theta$ 이다. 연립하면 $50\sin^2\theta=74-70\cos\theta$ 이고 풀면 $\cos\theta=\frac{3}{5}$ 또는 $\cos\theta=\frac{4}{5}$ 이다.
 이 중 $\angle BAC$ 가 예각이 되는 것은 $\cos\theta=\frac{4}{5}$ 인 경우이다.

COMMENT 12

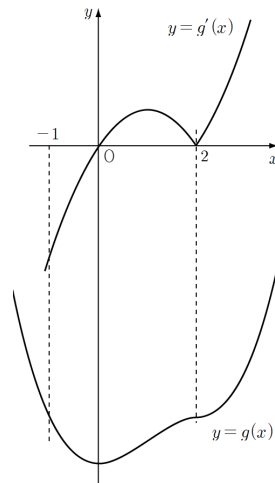
$$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^3(x-2)$$

COMMENT 13

준 식 $\int_1^x tf'(t)dt=2x^3+3x^2+ax+\int_0^1 f(t)dt$ 를 보면 일단 $x=1$ 대입이다. $0=5+a+\int_0^1 f(t)dt$ 를 얻었다.
 양 변을 미분하면 $xf'(x)=6x^2+6x+a$ 이다. $x=0$ 을 대입하면 $a=0$ 이군. x 로 나누면 $f'(x)=6x+6$ 이므로
 $f(x)=3x^2+6x+c$ 이다. 상수 c 는 위의 식 $\int_0^1 f(t)dt=-5$ 에서 얻을 수 있다. $\int_0^1 (3t^2+6t+c)dt=-5$ 에서 $c=-9$ 다.

COMMENT 14

$g(a)=0$ 이고 $g'(x)=(x^2-2x)f(x)$ 이다.



COMMENT 15

x 값이 0에서 4π 까지 변할 때, $\frac{2x}{n}$ 은 0에서 $\frac{8\pi}{n}$ 까지 변한다.
 $a_1=8, a_2=4, a_3=3, a_4=a_5=\dots=a_9=2,$
 $a_{10}=a_{11}=\dots=a_{48}=1, a_{49}=a_{50}=0$
 이다.

COMMENT 19

$\sum_{k=1}^{11} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{10} + a_{11}) = a_1 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23$ 이므로 $a_1 = 4$ 이다.
 식 $a_n + a_{n+1} = 2n + 3$ 를 짚어보면 수열 $\{a_n\}$ 은 4, 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, ...로 간다.

COMMENT 21

n^2 까지 끊어야 하기에 1개, 3개, 5개, 7개, ... 씩 등차수열을 이룬다.
 $a, b-2, b, b+2, c-8, c-4, c, c+4, c+8, d-24, d-16, d-8, d, d+8, d+16, d+24, \dots$
 (나)의 식에서 $\sum_{n=1}^{k^2} a_n - \sum_{n=1}^{(k-1)^2} a_n$ 을 조사해보면, 요 항 들은 등차수열을 이루기 때문에,
 $a=1, b=2, c=4, d=8, \dots$
 인 것을 확인할 수 있다. 군수열 뺄 문항이다. 수능도 이렇게 막 내더라구.

COMMENT 22

$f(x) = \frac{1}{4}x^2(x^2 + ax + b)$ 이다. $f'(2k) = 24$, $f(2k) = 24k$ 를 연립하면

$$a = -4k, \quad b = 4k^2 + \frac{24}{k}$$

를 얻는다. 조건 $f(k) \geq 16$ 는 $k \geq 2$ 가 된다.

COMMENT 확률과 통계 28

그냥 세면 개 많다. $\frac{1-P(\text{합이 같음})}{2}$ 으로 계산하자.

합이 3으로 서로 같은 경우의 수는 4, 합이 4로 서로 같은 경우의 수는 12, 합이 5로 서로 같은 경우의 수는 40, 합이 6으로 서로 같은 경우의 수는 12, 합이 7로 서로 같은 경우의 수는 4이다.

COMMENT 확률과 통계 29

${}_5H_6 = 210$ 에서 여사건을 빼자. 여사건은 모두 60가지이다. 아래와 같다.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Case1) $a+b=1$ 이고 $c+d=1$: 4가지 | Case2) $a+b=1$ 이고 $c+d=3$: 8가지 |
| Case3) $a+b=1$ 이고 $c+d=5$: 12가지 | Case4) $a+b=3$ 이고 $c+d=1$: 8가지 |
| Case5) $a+b=3$ 이고 $c+d=3$: 16가지 | Case6) $a+b=5$ 이고 $c+d=1$: 12가지 |

COMMENT 확률과 통계 30

초콜릿의 묶음마다의 개수에 따라 분류하면

- Case1) [4, 0, 0]인 경우 : $3 \times {}_3H_2 = 18$
- Case2) [3, 1, 0]인 경우 : $({}_4C_3) \times (3 \times 2) \times {}_3H_3 = 240$
- Case3) [2, 2, 0]인 경우 : $({}_4C_2 \times \frac{1}{2}) \times (3 \times 2) \times {}_3H_3 = 180$
- Case4) [2, 1, 1]인 경우 : $({}_4C_2 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2}) \times (3 \times 2 \times 1) \times {}_3H_4 = 540$

COMMENT 미적분 27

선분 AB의 중점을 O라 하자. $\angle POQ = 2\theta$ 이다.

$\overline{PH} = \sin 2\theta$ 이고 $\overline{QH} = \sec 2\theta - \cos 2\theta$ 이므로 $S(\theta) = \frac{1}{2}(\sec 2\theta - \cos 2\theta)\sin 2\theta$ 이다.

COMMENT 미적분 28

m 의 최솟값은 접할 때다. $x = u$ 에서 접한다고 하면

$$t \ln u + \frac{1}{t} = mu, \quad \frac{t}{u} = m$$

을 만족시킨다. 풀면 $u = e^{1 - \frac{1}{t^2}}$, $m = te^{\frac{1}{t^2} - 1}$ 이다.

$g(t) = te^{\frac{1}{t^2} - 1}$ 이므로 $g'(t) = e^{\frac{1}{t^2} - 1} - \frac{2}{t^2}e^{\frac{1}{t^2} - 1}$ 이다.

COMMENT 미적분 29

$\overline{CD} = 4$ 이다. 배각공식이나 피타 두 번 치면 나온다.

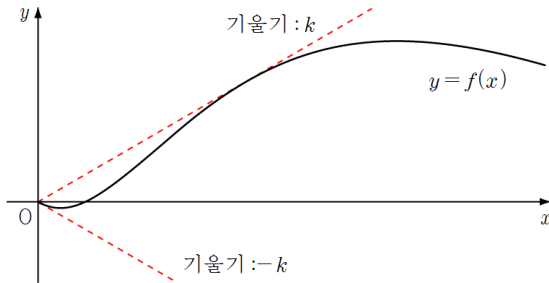
답음 비는 $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ 넓이 비는 3 : 2, 구하는 넓이는 $30\sqrt{2} - 12\pi$ 이다.

COMMENT 미적분 30

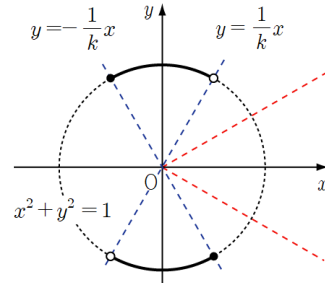
$P(t, f(t)), Q(p, q)$ 라 하자. $pt + qf(t) = 0$ 는 $\frac{q}{p} \times \frac{f(t)}{t} = -1$ 이므로 $OP \perp OQ$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 살펴보면 OP 의 기울기는 원점에서의 기울기보다 크고 원점 지나는 접선일 때 최대이다.

원점에서의 기울기는 $-k$ 이다. 저 접선의 접점은 $x = 1 + \frac{1}{a}$ 일 때이고 기울기는 k 이다. [그림2]의 붉은 선이 점 Q 의 자취이다.



[그림1]



[그림2]

COMMENT 기하 28

$B\left(\frac{a^2}{p}, 2a\right), C\left(-\frac{a^2}{p}, 0\right), D(p, 0)$ 이다. $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ 에서 $a = \sqrt{3}p$ 이므로

타원의 장축의 길이는 $4\sqrt{3}p + 4p$ 이다. 따라서 $p = 2, a = 2\sqrt{3}$ 이다.

COMMENT 기하 29

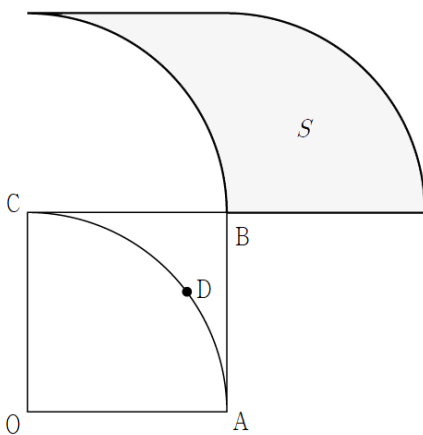
$S_1 : S_2 = \overline{F'Q} : \overline{QP}$ 이므로 $\overline{F'Q} = a$ 라 하면 $\overline{PQ} = 5a$ 이다.

쌍곡선의 정의에서 $\overline{FQ} = a + 4, \overline{FP} = 6a - 4$, 삼각형 FPQ 에서 피타고라스 돌리면 $a = 2$ 이다.

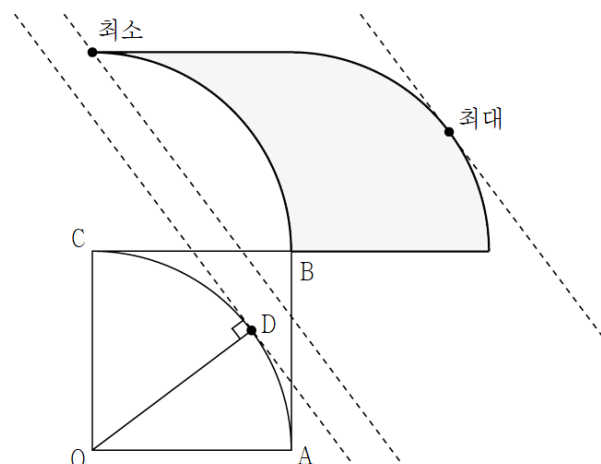
삼각형 $FF'Q$ 에서 $\overline{F'Q} = 2, \overline{FQ} = 6, \cos(\angle F'QF) = -\frac{3}{5}$ 이므로 $\overline{FF'}^2 = \frac{272}{2}$ 이다. $c^2 = \frac{68}{5}$ 이다.

COMMENT 기하 30

점 D 와 영역 S 를 나타낸 그림은 [그림1]과 같다. 최대최소는 [그림2]을 살펴보자.



[그림1]



[그림2]