지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 자연수 k에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \dfrac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \dfrac{1}{3}$의 모든 해의 합은? 〔2022년 4월 11〕

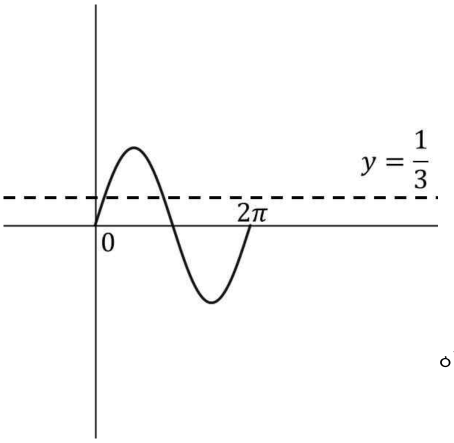
① 5π　　② 6π　　③ 7π　　④ 8π　　⑤ 9π

1. 정답 ③ 〔2022년 4월 11〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

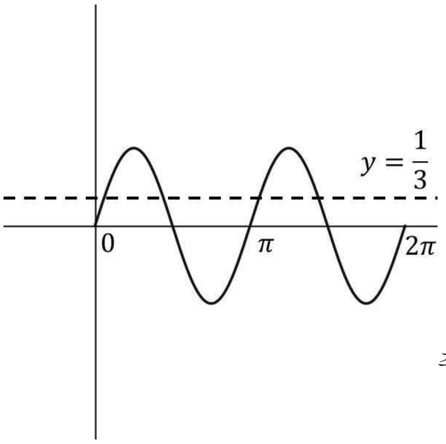
일단 k가 자연수라네요. k에 숫자를 넣을 준비는 하고 있어야겠어요. 그리고 $0 \leq x < 2\pi$에서 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이랍니다. 결국 $y = \sin kx$와 $y = \frac{1}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 8이라는 말이죠?

일단 생각을 좀 해볼게요. 평범한 $\sin x$의 그래프는 다들 아시죠?

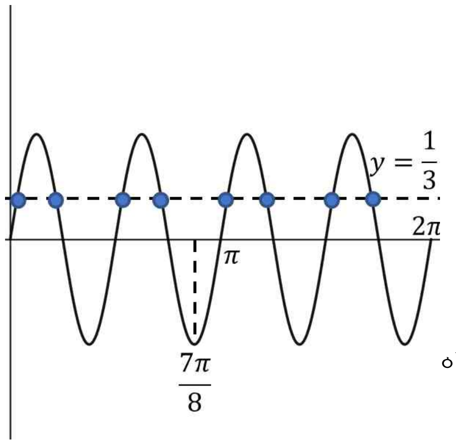


이런 그래프입니다. 지금은 $y = \frac{1}{3}$과 2개의 점에서 만나네요.

$\sin kx$는 주기만 k만큼 당긴 함수에요. 대충 숫자를 넣어서 그래프를 그려볼게요. 예를 들어 $k = 2$라면?



주기가 2배만큼 당겨지면서 꿀렁꿀렁하는 게 두 번이 되었어요. $y = \frac{1}{3}$과 만나는 점도 4개로 늘었구요. 만약 $k = 3$이라서 주기가 3배 당겨진다면? 꿀렁꿀렁하는 게 세 번이 되고 만나는 점의 개수도 6개가 되겠죠? 결국 개수가 8이 되려면 $k = 4$가 되어야 합니다.



이렇게 되겠네요.

이제 $0 \le x < 2\pi$에서 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합을 구해봅시다. 일단 보이는 그래프는 $x=\frac{7\pi}{8}$축 대칭이에요. $x=\frac{7\pi}{8}$축을 기준으로 점 8개가 왼쪽에 4개, 오른쪽에 4개가 있죠? 이 점들은 $x=\frac{7\pi}{8}$축을 기준으로 각각 왼쪽과 오른쪽에 대응되는 대칭점들이 있습니다. 대칭점들은 $x=\frac{7\pi}{8}$축 대칭이니까 x좌표의 중점이 $x=\frac{7\pi}{8}$이 나와야 하므로, 더하고 2로 나누면 $x=\frac{7\pi}{8}$이 나오게 됩니다. 2를 곱하면 단순 합은 $\frac{7\pi}{8}\times 2=\frac{7\pi}{4}$입니다. 그런데 이런 쌍이 4개가 있으니까 결국 $\frac{7\pi}{4}\times 4 = 7\pi$이겠네요. 답은 ③번입니다.

2. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x \le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때,
⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2022년 4월 14〕

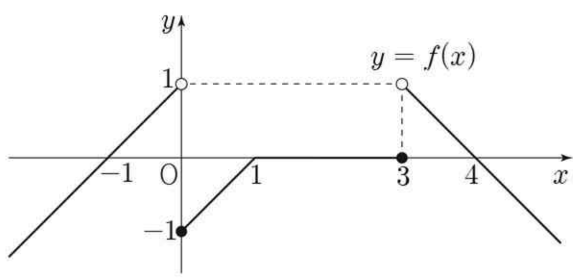
<보 기>

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x \to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

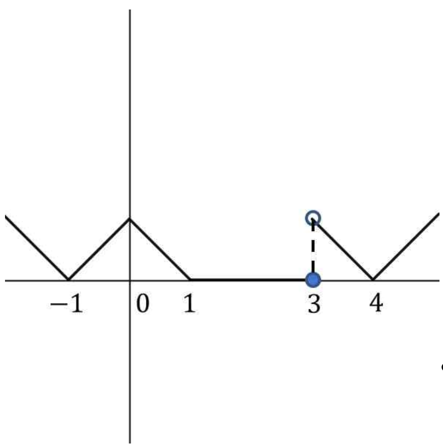


2. 정답 ④ 〔2022년 4월 14〕

1) 정수 보이면 숫자 넣을 준비, 좌극한 우극한

k가 정수이고 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x \le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$ 랍니다. 이때 $g(x)=|f(x-k)|$라고 하네요. 이건 $f(x)$를 절댓값을 씌워서 접어 올린 다음 x축의 방향으로 k만큼 움직인 함수네요.

ㄱ에서 $k=-3$일 때 $\lim_{x \to 0-} g(x)=g(0)$이냐고 물어봅니다. 일단 $g(x)=|f(x+3)|$인데 결국 $\lim_{x \to 0-}|f(x+3)|=|f(3)|$이냐고 물어보는 거죠? 이건 일단 $|f(x)|$부터 알아야겠어요.



이렇게 됩니다. 일단 $\lim_{x \to 0-}|f(x+3)|$을 편의상 $|f(3-)|$라고 표현할게요. $x=3$보다 작은 쪽에서의 함숫값이라는 표현이라고 해두죠. 그럼 지금 그래프를 보면 $x=3$에서의 $|f(x)|$의 함숫값과 $x=3$보다 작은 쪽에서의 함숫값이 같나요? 같네요! ㄱ은 맞습니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

ㄴ에서 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재하냐고 묻네요. 일단 $x=0$에서 연속이라는 건 $x=0$에서의 좌극한, 우극한 함숫값이 모두 같아야 한다는 거예요.

그러면 결국 $f(0-)+|f(-k-)|=f(0+)+|f(-k+)|=f(0)+|f(-k)|$이어야 합니다. 그래프에서 함숫값을 확인해서 넣어보면

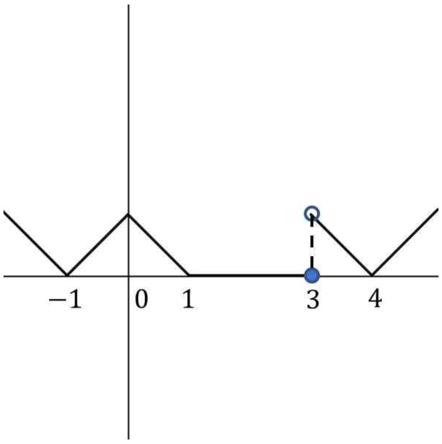
$1+|f(-k-)|$

$-1+|f(-k+)|$

$-1+|f(-k)|$

이 세 개가 모두 같아야 해요.

다시 $|f(x)|$ 그래프로 돌아가봅시다.



$1+|f(-k-)|$

$-1+|f(-k+)|$

$-1+|f(-k)|$

가 모두 같아야 하는데 만약 k가 $k=-3$을 제외한 정수라고 생각을 해볼게요. 그러면 $|f(-k-)|=|f(-k+)|=|f(-k)|$입니다. $|f(x)|$는 $x=3$을 제외하고는 연속이니까요. 그러면 위의 저 세 개의 값이 같아질 수 있을까요? 하나는 1을 더하고 나머지 두 개는 1을 빼는데 같아질 리가 없죠.

그러면 $k=-3$이라고 생각을 해봅시다. 각각 값을 계산하면

$1+|f(3-)|=1$

$-1+|f(3+)|=0$

$-1+|f(3)|=-1$

세 값이 모두 달라지네요. 결국 ㄴ은 옳지 않습니다.

3) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

ㄷ에서 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5라고 합니다. 이젠 곱한 함수까지 나오네요.

미분가능하기 위해서는 연속에 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 합니다. 일단 연속부터 확인해볼게요. 결국 $f(0-)g(0-)=f(0+)g(0+)=f(0)g(0)$이어야 하니까 $|f(-k-)|=-|f(-k+)|=-|f(-k)|$이어야 합니다. $|f(x)|$ 그래프에서 이걸 만족시키려면 $k=1,\ -1,\ -2,\ -4$입니다.

이제 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 해요. $k=1,\ -1,\ -2,\ -4$이라고 했으니까 각각 살펴봅시다.

$k=1$이라면 $x=0$보다 작은 쪽에서 일단 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x-1)|$인데 이건 $|f(x)|$ 그래프를 x축

방향으로 1만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$이므로 $f(x)g(x)=x(x-1)$입니다. 이 둘은 모두 다항함수니까 미분을 해서 도함수를 구한 후 $x=0$에서의 극한값이 같다고 해도 무방하겠죠? 좌미분계수는 $\lim_{x\to 0-}-2x-1=-1$이고, 우미분계수는 $\lim_{x\to 0+}2x-1=-1$입니다. 같네요! 미분가능합니다.

$k=-1$일 때를 볼게요. $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+1)|$인데 이건 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)=0$입니다. 좌미분계수는 $\lim_{x\to 0-}-2x-1=-1$이고, 우미분계수는 $\lim_{x\to 0+}0=0$입니다. 다르네요. 미분불가능합니다.

$k=-2$일 때는 $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+2)|$인데 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=0$입니다. $f(x)g(x)=0$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)=0$입니다. 이건 뭐 왼쪽 오른쪽 둘다 0이니까 미분가능하네요.

$k=-4$일 때는 $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+4)|$인데 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -4만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$이므로 $f(x)g(x)=x(x-1)$입니다. 이거 아까 $k=1$일 때랑 똑같지 않나요? 미분가능하네요.

가능한 k는 $k=1$, -2, -4이고 합은 -5이네요. ㄷ은 맞습니다. 따라서 옳은 건 ㄱ, ㄷ이고 답은 ④번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$,
$(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가
곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는
$t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) 〔2022년 4월 20〕

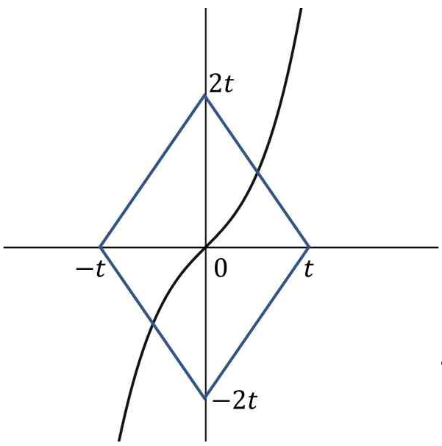
3. 정답 240 〔2022년 4월 20〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

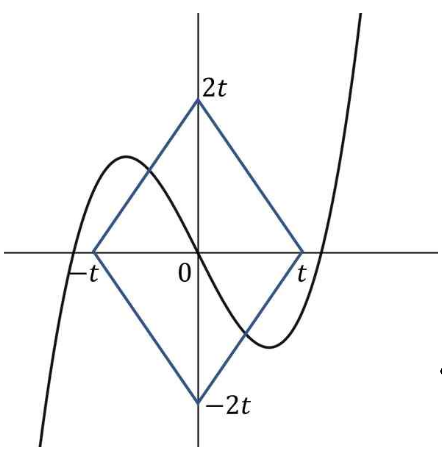
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다네요. x에서의 함숫값과 정확히 반대에 있는 $-x$에서의 함숫값은 서로 부호도 반대라는 거죠? $f(-x)+f(x)=0$이고 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=0$로 x에서의 함숫값과 $-x$에서의 함숫값의 중점은 0이 된다는 거로도 표현할 수 있어요. 원점 $(0,\ 0)$ 대칭이라는 의미입니다. 기함수라고도 부르죠.

기함수라는 건 홀수차항만 존재해야 하잖아요? 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 홀수차항만 존재한다면 $f(x)=x^3+ax$로 둘 수 있습니다.

이때 $t>0$인데 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라고 한답니다. 이거 그래프에 그려서 해석해볼게요.
일단 $f(x)$의 개형은 두 가지입니다.



일단 이 개형이 가능해요. 아까 $g(t)$는 마름모와 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수라고 했었죠? 그림에서는 2점에서 만나니까 $g(t)=2$이네요.



이런 개형도 가능해요. 지금 그래프에서도 2개의 점에서 만나니까

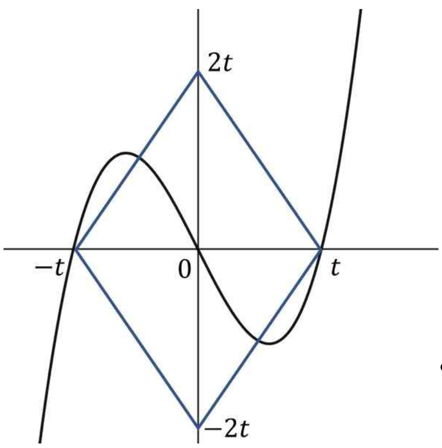
$g(t) = 2$입니다. $g(t)$의 해석은 대충 끝난 것 같아요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

그런데 $g(t)$가 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이라고 하네요. $0<\alpha<8$이구요. $g(t)$는 마름모가 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수인데 이 함수가 불연속이라는 건 t가 변함에 따라 만나는 점의 개수에도 변동이 있다는 말이겠죠? 계속 k개의 점에서만 만난다면 그건 연속이잖아요.

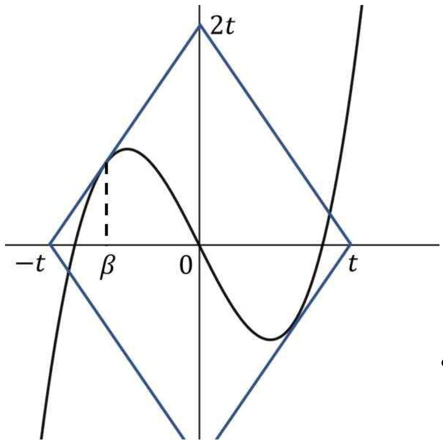
우리 처음 살펴봤던 개형을 보면 t를 증가시켜도 계속 2개의 점에서 만나는 걸 알 수 있어요. 따라서 두 번째 개형으로 가야 합니다.

생각을 해볼게요. 어떻게 되어야 $g(t)$, 즉 마름모와 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 변할까요? 일단 t가 작을 때는 $g(t) = 2$입니다. 그래프로도 살펴봤었죠. 이제 t를 증가시켜볼게요.

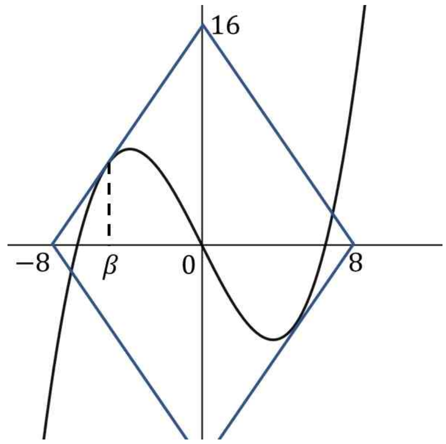


여기서 처음으로 개수가 변합니다. 4개가 되죠? 따라서 이 지점에서의 t의 좌표가 α가 됩니다. $f(x)$의 함숫값은 0이 되니까 $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$이 되네요. 이미 $f(0) = 0$인 것까지 고려하면 인수정리에 의하여 $f(x)$는 x, $(x-\alpha)$, $(x+\alpha)$라는 인수를 각각 적어도 하나씩 가져야 하고, $f(x) = x(x-\alpha)(x+\alpha) = x^3 - \alpha^2 x$입니다.

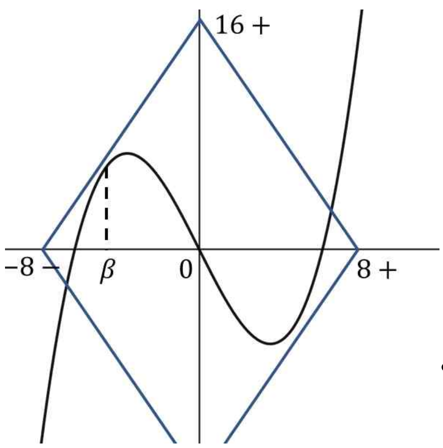
계속 증가시켜보죠. 다음으로 개수가 변하는 지점은



여기네요. 이때 $t=8$이므로



이렇게 됩니다. 정확히 접할 때는 $g(t)=4$로 개수가 변하지 않지만 t가 살짝 커진다면?



이렇게 2개의 점에서 만나게 되죠. 이러면 $g(t)=2$로 개수가 변하니까 불연속이 됩니다. 이러면 결국 $f(x)=x^3-\alpha^2 x$가 $y=2x+16$과 $x=\beta$에서 접하는 걸로 파악하면 되겠군요.

일단 함숫값이 같아야 하니까 $\beta^3-\alpha^2\beta=2\beta+16$입니다. 그리고 $x=\beta$에서 접선의 기울기가 2여야 하니까 $3\beta^2-\alpha^2=2$입니다. $\alpha^2=3\beta^2-2$를 $\beta^3-\alpha^2\beta=2\beta+16$에 넣으면 $\beta^3=-8$이고 $\beta=-2$입니다.
$\alpha^2=10$이네요.

이제 $\alpha^2\times f(4)$를 구해볼게요. 일단 $\alpha^2=10$라는 건 알구요. $f(x)=x^3-\alpha^2 x$이므로
$f(4)=64-4\alpha^2=24$입니다. 곱하면 240이네요.

4. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.
〔2022년 4월 21〕

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} \lvert a_k \rvert = 128$인 자연수 m이 존재한다.

4. 정답 170 〔2022년 4월 21〕

1) 등차수열 a_n은 $a+(n-1)d$로 놓기, 조건해석

일단 등차수열 $\{a_n\}$이 공차가 자연수 d이고, 모든 항이 정수라고 합니다. 그럼 첫 항도 정수여야겠네요. 그래야 정수끼리 더했을 때 정수가 나오죠. 일단 $a_n = a+(n-1)d$라고 놓고 a는 정수, d는 자연수라고 해놓을게요. 또한 공차가 자연수니까 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이라는 걸 알 수 있네요.

(가)조건에서 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라고 합니다.

(나)조건에서 $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다네요. 일단 생각을 좀 해볼게요.

$a_{2m} = -a_m$이라는 건 a_{2m}과 a_m의 부호가 반대라는 거잖아요? 그런데 a_{2m}의 값은 a_m보다 무조건 커야 해요. 공차가 자연수니까 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이거든요. $\{a_n\}$의 모든 항은 0이 아니니까 a_m은 음수이고 a_{2m}은 양수입니다.

그런데 또 여기서 생각해봐야 하는 건 m이 만약 짝수라면? $a_{2m} + a_m = 0$이기 때문에

$$\frac{a_{2m}+a_m}{2} = \frac{a+(2m-1)d+a+(m-1)d}{2} = \frac{2a+(3m-2)d}{2} = \frac{2\left(a+\left(\frac{3}{2}m-1\right)d\right)}{2} = \frac{2a_{\frac{3}{2}m}}{2} = a_{\frac{3}{2}m} = 0$$이

됩니다. m은 짝수니까 $2\times b$ (b는 자연수)의 형태로 표현할 수 있으니까 $a_{\frac{3}{2}m} = a_{3b} = 0$의 형태로 표현할 수 있죠? 아까 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라면서요? m은 무조건 홀수여야 합니다. $m = 2b-1$ (b는 자연수)로 표현할 수 있겠네요.

2) 시그마 펼치기

그리고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$라고 했었죠? $a_{2m} = -a_m$와 연결지어서 생각해봅시다. 왜 하필 m과 $2m$항을 줬을까요? 그리고 왜 하필 m부터 $2m$까지의 합을 줬을까요? 절댓값까지 씌워서 말이죠.

아까 우리가 알아낸 건 a_m은 음수이고 a_{2m}은 양수라는 것, 서로 부호만 다른 값이라는 것, m은 홀수라는 거예요. 일단 $m=2b-1$을 다 넣어보면 a_m과 a_{2m}은 a_{2b-1}, a_{4b-2}로 표현할 수 있어요. 그리고 $\sum_{k=2b-1}^{4b-2} |a_k| = 128$이구요. 이거 시그마를 펼쳐보면 $|a_{2b-1}| + |a_{2b}| + \cdots + |a_{4b-3}| + |a_{4b-2}| = 128$이 됩니다.

여기서 우리는 $|a_{2b-1}|$과 $|a_{4b-2}|$가 같은 값이라는 걸 알 수 있어요. 아까 a_m과 a_{2m}은 서로 부호만 다른 값이라고 했었잖아요. 그러면 절댓값 씌우면 같아지죠. 그런데 $|a_{2b-1}|$의 다음 항인 $|a_{2b}|$와 $|a_{4b-2}|$의 전 항인 $|a_{4b-3}|$ 역시 값이 같습니다. $|a_{2b}|$은 음수인 a_{2b-1}에 공차 d를 더하고 값이 커진 상태에서 절댓값을 씌운 값이고, $|a_{4b-3}|$은 양수인 a_{4b-2}에 공차 d를 빼고 값이 작아진 상태에서 절댓값을 씌웠잖아요. a_{2b-1}와 a_{4b-2}의 부호가 반대라는 걸 생각해보면 a_{2b}와 a_{4b-3}의 부호 역시 반대가 되어야죠.

수식으로 확인해볼게요. $|a_{2b}|=|a+(2b-1)d|$이고, $|a_{4b-3}|=|a+(4b-4)d|$인데 $a_{4b-2}+a_{2b-1}=0$이므로 $a_{4b-2}-d+a_{2b-1}+d=a_{4b-3}+a_{2b}=0$가 됩니다. d를 빼고 더해도 어차피 0이니까 등식에는 영향이 없죠? a_{4b-2}에 d를 빼면 전 항인 a_{4b-3}이 나오고, a_{2b-1}에 d를 더하면 다음 항인 a_{2b}가 됩니다. 따라서 이 둘의 부호가 반대이므로 절댓값을 씌우면 값이 같아지네요.

그런데 마찬가지의 논리로 a_{2b}의 다음 항인 a_{2b+1}과 a_{4b-3}의 전 항인 a_{4b-4} 역시 절댓값 씌우면 값이 같아지는 거 아닌가요? d를 빼고 더하면 $a_{4b-3}-d+a_{2b}+d=a_{4b-4}+a_{2b+1}=0$이잖아요. 부호가 반대니까 절댓값 씌우면 값이 같아지죠. 이렇게 쭈욱 $|a_{2b-1}|+|a_{2b}|+\ \cdots\ +|a_{4b-3}|+|a_{4b-2}|=128$의 양쪽의 대응되는 값이 같아집니다.

언제까지일까요? $2b-1$과 $4b-2$의 평균은 $3b-\dfrac{3}{2}$입니다. 그런데 이런 자연수는 존재하지 않죠. 따라서 $3b-\dfrac{3}{2}$과 가장 가까운 자연수인 $3b-1$과 $3b-2$가 대응되는 값입니다. $a_{3b-2}+a_{3b-1}=0$이므로 a_{3b-2}이 가장 마지막 음수가 되는 거고, a_{3b-1}이 첫 번째 양수가 되는 거죠.

결국 $|a_{2b-1}|+|a_{2b}|+\ \cdots\ +|a_{4b-3}|+|a_{4b-2}|=128$를 정리해보면
$(|a_{2b-1}|+|a_{4b-2}|)+(|a_{2b}|+|a_{4b-3}|)+\cdots+(|a_{3b-2}|+|a_{3b-1}|)=128$이 됩니다. 괄호 안의 값은 같은 값이니까 결국 구하는 값은 $2\times(|a_{3b-1}|+|a_{3b}|+\cdots\ |a_{4b-2}|)=128$입니다. 그런데 a_{3b-1}은 첫 번째 양수이고, 그 이후로 자연수를 계속 더하는 거니까 계속 양수죠? 따라서 $a_{3b-1}+a_{3b}+\cdots+a_{4b-2}=64$입니다.

등차수열의 합을 구해볼게요.
$\dfrac{(a_{3b-1}+a_{4b-2})}{2}\times b=\dfrac{(a+(3b-2)d+a+(4b-3)d)}{2}\times b=\dfrac{b(2a+(7b-5)d)}{2}=64$입니다. 이때 $a_{3b-2}+a_{3b-1}=a+(3b-3)d+a+(3b-2)d=2a+(6b-5)d=0$이므로 $\dfrac{b(2a+(7b-5)d)}{2}=\dfrac{b^2d}{2}=64$이고

$b^2d=128$입니다.

3) 자연수 보이면 숫자 넣기

b랑 d모두 자연수이죠? $b^2d=128$가 되는 조합을 찾아봅시다.

$(b^2=1,\ d=128)$, $(b^2=4,\ d=32)$, $(b^2=16,\ d=8)$, $(b^2=64,\ d=2)$가 가능하네요. 모든 d의 합은 $128+32+8+2=170$입니다.

5. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. 〔2022년 4월 22〕

5. 정답 30 〔2022년 4월 22〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

$a>0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$랍니다. 일단 정적분의 위끝에 변수가 있네요. 먼저 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$입니다. 이후 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$이네요. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수였으니까 그걸 미분한 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이죠? 그거 두 개를 곱했으니까 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 9인 사차함수입니다.

이때 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다고 합니다. 일단 극값을 갖는다라는 건 뭐죠? 그 부분에서 도함수의 부호가 바뀌어야 해요. $g'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{13}{2}\right)=0$입니다.

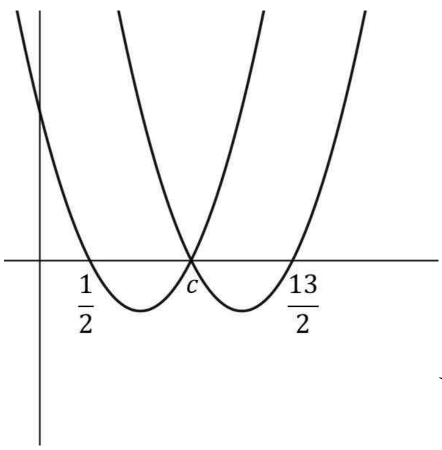
아까 살펴봤듯이 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 9인 사차함수입니다. $g'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{13}{2}\right)=0$이구요. 여기서 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다고 했으니까 다른 부분에서는 아예 x축과 만나지 않거나, 아니면 만나더라도 x축에 접해야 합니다. 그러면 도함수의 부호가 바뀌지 않죠. 부드럽게 접어 올라갈 테니까요. 결국 정리하면 $g'(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서는 더 이상 인수를 가지지 않아야 하고, 다른 부분에서는 아예 인수를 가지지 않거나 인수를 가지더라도 두 개를 가져야 합니다.

그런데 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$입니다. $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$는 전부 $f'(x)$를 x축 방향으로 평행이동한 함수이죠. x축 방향 평행이동의 특징은 x좌표의 위치만 변화할 뿐 함수의 형태는 건드리지 않는다는 거예요. $f'(x)$가 x축과 아예 만나지 않는다면 평행이동을 하더라도 여전히 x축과 만나지 않습니다. 그러면 $g'(x)$의 인수가 존재할 리가 없겠죠?

만약 $f'(x)$가 x축에 접한다면 $f'(x)$는 같은 인수를 두 개 가집니다. 예를 들어 $f'(x)=3(x-b)^2$라고 해보면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)=3(x-b+a)^2\times 3(x-b-a)^2$이죠? 이때 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{13}{2}\right)=0$이므로 무조건 $g'(x)=9\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{13}{2}\right)^2$가 됩니다. 그런데 이러면 극값이라는 게 없죠. $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$ 둘 다 x축에 접어 올라가니까 부호가 바뀌지 않잖아요.

결국 $f'(x)$는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 합니다. 그런데 생각을 해볼게요. 만약 $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$가 모두 서로 다른 인수를 가진다면? 둘을 곱한 $g'(x)$가 $g'(x)=9(x-q)(x-w)(x-e)(x-r)$ 뭐 이런 식으로 되었다고 하면 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 가질 수가 없죠. 극값을 갖는 부분이 4개가 생기는데요?

아까 $g'(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서는 더 이상 인수를 가지지 않아야 하고, 다른 부분에서는 아예 인수를 가지지 않거나 인수를 가지더라도 두 개를 가져야 한다고 했었죠. 그럼 만약 $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$가 겹치는 인수를 가지고 있다면? 예를 들어 $(x-c)$를 가지고 있다면 $g'(x)=9\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{13}{2}\right)(x-c)^2$가 되면서 $x=c$에서는 부드럽게 접하면서 올라가니까 부호가 바뀌지 않게 돼요. 정확히 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 가지게 되는 거죠.



요런 느낌입니다.

그럼 일단 $f'(x+a)$는 $f'(x)$를 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 건데 $a>0$이니까 무조건 왼쪽으로 가야 하죠? 그럼 왼쪽에 있는 함수가 $f'(x+a)$이고 오른쪽에 있는 함수가 $f'(x-a)$이네요.

$f'(x+a)=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-c)$, $f'(x-a)=3\left(x-\dfrac{13}{2}\right)(x-c)$입니다.

지금 $f'(x-a)$은 $f'(x+a)$를 x축 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것으로 볼 수도 있잖아요? $f'(x+a)$의 x자리에 $x-2a$를 넣으면 $f'(x-a)=3\left(x-2a-\dfrac{1}{2}\right)(x-2a-c)$입니다. 이때 $x=\dfrac{1}{2}+2a$는 $x=c$와 대응되고, $x=2a+c$는 $x=\dfrac{13}{2}$와 대응이 됩니다. 그대로 오른쪽으로 옮겨 온 거니까요. 따라서 $\dfrac{1}{2}+2a=c$이고 $2a+c=\dfrac{13}{2}$입니다. 연립하면 $a=\dfrac{3}{2}$, $c=\dfrac{7}{2}$이네요. $f'\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=3\left(x-\dfrac{13}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$이므로

x 자리에 $x+\dfrac{3}{2}$를 넣으면 $f'(x)=3(x-5)(x-2)=3x^2-21x+30$입니다.

이제 $a\times f(1)$를 구해야 하죠? 일단 $a=\dfrac{3}{2}$라는 건 알구요. $f(0)=-\dfrac{1}{2}$이니까 $f'(x)=3x^2-21x+30$를 적분해서 $f(x)$ 구한 다음 $x=1$ 넣으면 되겠네요. $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$인데 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $C=-\dfrac{1}{2}$이고 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$입니다. $f(1)=20$이네요. $a\times f(1)=30$입니다.

확통

6. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는? 〔2022년 4월 확통 28〕

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) $\lvert a-b+c-d+e \rvert \le 2$

① 359　② 363　③ 367　④ 371　⑤ 375

6. 정답 371 〔2022년 4월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

일단 a, b, c, d, e가 음이 아닌 정수인데 (가)조건에서 $a+b+c+d+e=10$랍니다. 일단 중복조합을 쓰는 경우이죠?

(나)조건에서 $|a-b+c-d+e| \le 2$라고 합니다. 이건 굉장히 특이하네요? 조금 예쁘게 정리해보면 $|a+c+e-(b+d)| \le 2$이죠. 결국 $a+c+e$와 $b+d$를 따로따로 떼어내서 생각해야겠네요.

$a+c+e$와 $b+d$를 더했을 땐 10이 나오고 $a+c+e$와 $b+d$의 차이는 최대가 2가 되도록 하는 순서쌍을 먼저 구하는 게 맞을 것 같아요.

일단 차이를 기준으로 나눠보죠. 차이가 2라면 $a+c+e=4$, $b+d=6$과 $a+c+e=6$, $b+d=4$이 가능합니다. $a+c+e=4$, $b+d=6$인 경우는 선택종류 3가지에 선택횟수 4번, 선택종류 2가지에 선택횟수 6번이니까 ${}_3H_4 \times {}_2H_6 = {}_6C_2 \times {}_7C_1 = 105$이고, $a+c+e=6$, $b+d=4$인 경우는 선택종류 3가지에 선택횟수 6번, 선택종류 2가지에 선택횟수 4번이니까 ${}_3H_6 \times {}_2H_4 = {}_8C_2 \times {}_5C_1 = 140$입니다.

차이가 1은 안 되고, 차이가 0이면 $a+c+e=5$, $b+d=5$이네요. 이것도 마찬가지로 해보면 선택종류 3가지에 선택횟수 5번, 선택종류 2가지에 선택횟수 5번이니까 ${}_3H_5 \times {}_2H_5 = {}_7C_2 \times {}_6C_1 = 126$이네요. 모두 더하면 $140+105+126=371$입니다.

7. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. 〔2022년 4월 확통 29〕

7. 정답 115 〔2022년 4월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

일단 다섯 자리 자연수를 만드는데 각 자리마다 0, 1, 2를 선택할 수 있다고 합니다. 이때 0과 1은 1개 이상 있어야 한다고 하네요. 일단 가장 앞의 숫자는 0이 나올 수 없죠? 그러면 네 자리 자연수가 되니까요. 일단 다섯 자리 각각을 1, 2, 3, 4, 5라고 이름 붙이고 시작할게요.

아까 말했듯이 1번자리에는 0이 나올 수 없습니다. 그럼 가능한 건 1과 2죠?

만약 1번자리에 1을 넣는다면 이미 1은 1개 이상 있으니까 조건을 신경쓰지 않아도 됩니다. 그러면 나머지 2, 3, 4, 5번 자리에 0이 1개 이상 있도록 배열하면 되겠네요. 근데 이건 여사건을 이용해서 2, 3, 4, 5번 자리에 각각 0, 1, 2을 넣는데 0이 하나도 없는 경우를 제외하면 되지 않나요? 2, 3, 4, 5번 각각은 0, 1, 2이 가능하니까 경우의 수는 $3^4 = 81$인데 0이 하나도 없고 1과 2만 넣는 경우는 $2^4 = 16$입니다. 경우의 수는 $81 - 16 = 65$이네요.

만약 1번 자리에 2를 넣는다면 0과 1은 각각 적어도 하나씩 있어야 합니다. 이거는 여사건으로 가도 되고 그냥 나열해도 될 것 같아요.

2-1) 여사건

그러면 나머지 2, 3, 4, 5번 자리에 0, 1, 2을 넣는 전체 경우의 수에서 0이 없는 경우를 빼고, 1이 없는 경우를 빼면 0과 1이 적어도 하나씩 있는 경우가 되지 않나요? 그런데 여기서 조심해야 하는 건 0과 1이 모두 없는 경우가 겹친다는 거예요. 두 번이나 빼버리면 안 되니까 이 경우는 더해주는 거죠. 가봅시다.

2, 3, 4, 5번에 0, 1, 2을 넣는 경우의 수는 $3^4 = 81$인데 0이 없는 경우는 1, 2만 넣는 경우니까 $2^4 = 16$이고, 1이 없는 경우는 0, 2만 넣는 경우니까 $2^4 = 16$입니다. 이때 0과 1이 모두 없는 경우는 2만 넣는 경우니까 경우의 수는 1이네요. 따라서 $81 - 16 - 16 + 1 = 50$입니다. 구하는 경우의 수는 $65 + 50 = 115$이네요.

2-2) 기준 잡고 분류

그냥 나열해봅시다. 나머지 2, 3, 4, 5번 자리에 0과 1이 적어도 하나가 있도록 해볼게요. 일단 01을 기본으로 두고, 나머지 두 자리에는 0100, 0101, 0102, 0111, 0112, 0122 이렇게 6가지가 가능합니다. 다음은 각각 배열하면 됩니다. 처음부터 $\frac{4!}{3!} = 4$, $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$, $\frac{4!}{2!} = 12$, $\frac{4!}{3!} = 4$, $\frac{4!}{2!} = 12$, $\frac{4!}{2!} = 12$이니까 모두 더하면 50이네요. 구하는 경우의 수는 $65 + 50 = 115$입니다.

8. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X \to X$의 개수를 구하시오. 〔2022년 4월 확통 30〕

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

8. 정답 720 〔2022년 4월 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$인데 $f:X \to X$랍니다. (가)조건에서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수라네요.
음... 일단 가능한 조합부터 살펴볼게요. 짝짝짝짝짝은 가능하죠. 그 다음 짝짝짝홀홀도 가능합니다.
짝홀홀홀홀도 가능하네요. 이렇게 3개 가능합니다. 이러면 이걸 바탕으로 기준 잡고 분류할 수 있겠죠?

(나)조건에서 f의 치역의 원소의 개수는 3이랍니다. 그러니까 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 선택해 나눠가져야 한다는 거죠?

아까 나눠놨던 걸 기준으로 분류해봅시다. 만약 짝짝짝짝짝이라면? 짝수는 2와 4인데 이러면 치역의 개수가 3개가 되지 않죠?

짝짝짝홀홀이라면 일단 생각을 좀 해봐야겠네요. 짝수는 2, 4이고 홀수는 1, 3, 5입니다. 이 중에서 3개를 선택해야 해요. 만약 서로 다른 홀수 2개를 골랐다면 짝수는 1개만 골라야 합니다. 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_2C_1=6$이네요. 예를 들어 1, 2, 3을 골랐다고 해보죠. 그러면 22213을 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$에 배열해주면 됩니다. $\dfrac{5!}{3!}=20$이네요. 총 $6\times 20=120$입니다.

만약 홀수를 하나만 골랐다면 짝수는 2개 골라야 해요. 그런데 2와 4 중에 어느 걸 2개 고를지 정해야겠어요. 경우의 수는 ${}_3C_1 \times 2=6$입니다. 예를 들어 11224라고 해볼게요. 배열해주면 $\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$입니다. 총 $6\times 30=180$이네요.

이제 마지막으로 짝홀홀홀홀로 가볼게요. 짝수는 2, 4 중에 하나, 홀수는 1, 3, 5 중에 두 개를 골라야 해요. 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_3C_2=6$입니다. 예를 들어 1, 2, 3을 골랐다고 해볼게요.
이때 홀수 4개를 1을 1개, 3을 3개로 할지, 아니면 1, 3을 각각 2개로 할지, 아니면 1을 3개, 3을 1개로 할지를 정해야 합니다. 각각의 경우를 볼게요.

1이 1개, 3이 3개라면 12333입니다. 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$이네요. 1, 3이 각각 2개라면 11233입니다. 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$이네요. 1이 3개, 3이 1개라면 11123입니다. 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $6\times(20+30+20)=420$입니다.
지금까지 모든 경우의 수를 더하면 $120+180+420=720$이네요.