출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통영역					
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	9	③	16	7
2	④	10	④	17	2
3	②	11	③	18	40
4	②	12	④	19	5
5	①	13	①	20	6
6	⑤	14	⑤	21	34
7	③	15	④	22	26
8	②				

2022년 3월 학력평가 대비 MC THE MATH 모의고사 해설 강의

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $2^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

2. 정답) ④ [수학Ⅱ 다항함수의 미분법]

해설 : $f'(x) = 3x^2 + 1$이므로

$f(1) + f'(1) = (1^3 + 1 - 2) + (3 \times 1^2 + 1)$

$= 0 + 4 = 4$이다.

3. 정답) ② [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : $a_3 + a_5 = 8$에서 등차중항에 의해 $a_4 = \dfrac{a_3 + a_5}{2} = 4$이고

$a_4 = a_1 + 3d$에서 $3d = a_4 - a_1 = 2$, $d = \dfrac{2}{3}$이다.

$a_2 = a_1 + d = \dfrac{8}{3}$

4. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x \to -1+} f(x) = -1$이고, $\lim_{x \to 2-} f(x) = 0$이므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = (-1) + 0 = -1$이다.

5. 정답) ① [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $g(1) = 4$이므로 $f(4) = 1$이다.

$f(4) = \log_2(4-3) + a = 1$이므로 $a = 1$,

$f(x) = \log_2(x-3) + 1$

에서 곡선 $y = f(x)$의 점근선이 $x = 3$이므로

곡선 $y = g(x)$의 점근선은 $y = 3$이다. 따라서 $b = 3$이고,

$a + b = 1 + 3 = 4$이다.

6. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면,

$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 3t^2 - 12t + 4$,

$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = 6t - 12$이다.

$a(t) = 6t - 12 = 0$,

$6t = 12$,

$t = 2$

에서 점 P의 가속도가 0이므로 이 시각에서의 점 P의 속도는

$v(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 4 = -8$이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : (ⅰ) $\cos x + 1 > 0$일 때,

부등식 $(2\sin x - 1)(\cos x + 1) \geq 0$의 양변을 $\cos x + 1$로 나누면

$2\sin x - 1 \geq 0$, $\sin x \geq \frac{1}{2}$이고

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$일 때,

주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$이다.

(ⅱ) $\cos x + 1 = 0$일 때,

$(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$이므로

부등식 $(2\sin x - 1)(\cos x + 1) \geq 0$는 항상 성립한다.

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$일 때,

주어진 부등식의 해는 $x = \pi$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $0 \leq x \leq 2\pi$일 때, 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \pi$이므로

$M = \pi$, $m = \frac{\pi}{6}$이다.

따라서 $M + m = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$이다.

8. 정답) ② [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 $(1, 2)$에서 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$에 그은 접선이

x축과 평행하므로 접선의 방정식은 $y = 2$이다.

접선의 접점을 $(k, f(k))$라 할 때,

$f(k) = 2$, $f'(k) = 0$이다.

$f'(k) = -3k^2 + 6k = 0$에서 $k = 0$ 또는 $k = 2$이고

$f(k) = 2$에서

$k = 0$일 때, $f(0) = a = 2$이고

$k = 2$일 때, $f(2) = a + 4 = 2$에서 $a = -2$이다.

a는 양수이므로 $a = 2$이고

$f(3) = -3^3 + 3 \times 3^2 + 2 = 2$이다.

9. 정답) ③ [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : 두 곡선 $y = x^3 + x + 1$, $y = x^2 + 2x$의 교점의 x좌표는

방정식 $x^3 + x + 1 = x^2 + 2x$의 근과 같고

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2 = 0$에서

$x = -1$, $x = 1$이다.

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1} \{(x^3 + x + 1) - (x^2 + 2x)\}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)$$

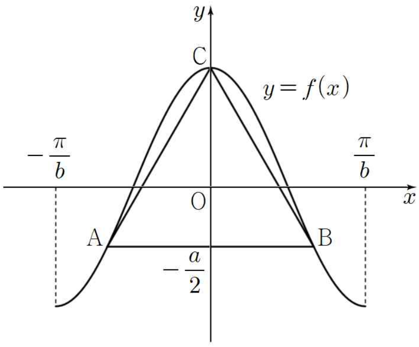
$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

10. 정답) ④ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : 함수 $a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이고,

주어진 상황을 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.

(점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하자.)



두 점 A, B의 x좌표는 각각

방정식 $a\cos bx=-\frac{a}{2}\left(-\frac{\pi}{b}<x<\frac{\pi}{b}\right)$의 실근이므로

$\cos bx=-\frac{1}{2}$에서 $x=-\frac{2\pi}{3b}$ 또는 $x=\frac{2\pi}{3b}$이다.

$\mathrm{A}\left(-\frac{2\pi}{3b},\ -\frac{a}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2\pi}{3b},\ -\frac{a}{2}\right)$인데

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$2\times\frac{2\pi}{3b}=4$, $b=\frac{\pi}{3}$이다.

선분 AB가 y축과 만나는 점의 좌표를 D라 하면

선분 CD의 길이는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4$, $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 $ab=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$이다.

11. 정답) ③ [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $f(x)=a^{x-1}$, $g(x)=\log_a(x+1)$이라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 선분 AB와 만나므로

$2\le f(3)\le 8$이고 $2\le g(3)\le 8$이다.

$2\le f(3)=a^2\le 8$에서

$\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

이고,

$2\le g(3)=\log_a 4\le 8$에서 $1\le \log_a 2\le 4$이고

로그의 밑의 변환에 의해

$1\le\frac{1}{\log_2 a}\le 4$,

$\frac{1}{4}\le\log_2 a\le 1$

$2^{\frac{1}{4}}\le a\le 2$ ⋯ ㉡

이다. ㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는

$\sqrt{2}\le a\le 2$

이므로 $M=2$, $m=\sqrt{2}$, $Mm=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$이다.

12. 정답) ④ [수학Ⅱ 함수의 연속]

해설 : $\{f(x)-x-1\}\{f(x)-x^2+1\}=0$에서

$f(x)=x+1$ 또는 $f(x)=x^2-1$이다.

$x+1=x^2-1 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$에서

직선 $y=x+1$과 곡선 $y=x^2-1$의 두 교점의 x좌표는

각각 -1, 2이다.

이때, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 닫힌구간

$[-2,\ 3]$에서 $-1\le x+1\le 4$, $-1\le x^2-1\le 8$이므로

닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 되려면

열린구간 $(-2,\ -1)$에서 $f(x)=x^2-1$,

열린구간 $(-1,\ 0)$에서 $f(x)=x+1$이어야 하고,

닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 8이 되려면

$f(3)=8$이어야 하므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<-1) \\ x+1 & (-1\le x<2) \\ x^2-1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다. 따라서 $f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f(4)=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+15=18$이다.

13. 정답) ① [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 조건 (나)에 의해 $A(a^2, 2)$, $B(a^8, 8)$이고,

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C,

원 C의 중심을 점 C라 하자.

점 C는 선분 AB의 중점이므로

점 C의 y좌표는 $\frac{2+8}{2}=5$인데,

조건 (가)에서 원 C가 x축에 접하므로

원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심의 y좌표와 같고

따라서 원 C의 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\overline{AB}=10$이고,

$$\overline{AB}^2=(a^8-a^2)^2+36=100$$

에서

$$(a^8-a^2)^2=64,$$

$$a^8-a^2=8 \ (\because\ a>1\text{이므로 } a^8>a^2)$$

이다. 이때 $k=a^2$이므로 $k^4-k=a^8-a^2=8$이다.

14. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수이고,

$g(x)=F(x)-F(a)$이다.

따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

방정식 $F(x)=F(a)$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3보다 작으면,

함수 $F(x)$는 극댓값을 가지지 않을 때,

방정식 $F(x)=F(a)$가 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a의 값이 존재하지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

ㄴ. (참)

ㄱ에 의해 함수 $F(x)$는 한 개의 극댓값과 두 극솟값을 가지고,

(ⅰ) 두 극솟값이 다를 때,

방정식 $F(x)=F(a)$이 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a의 개수가 3보다 크다.

(ⅱ) 두 극솟값이 같을 때,

방정식 $F(x)=F(a)$이 서로 다른 세 실근을 가지는 실수

a는 $F(a)$의 값이 함수 $F(x)$의 극댓값과 같은 경우이다.

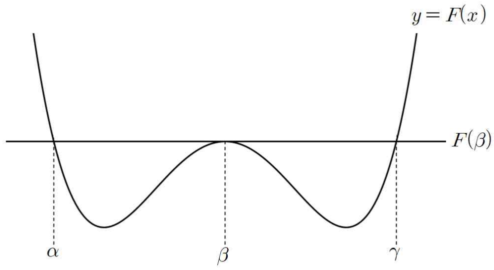
따라서 함수 $F(x)$의 두 극솟값은 같고,

함수 $F(x)$가 $x=\beta$에서 극댓값을 가질 때,

방정식 $F(x)=F(\beta)$의 서로 다른 세 실근을 각각

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$

라 하고 함수 $y=F(x)$의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같으므로

$y=F(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 $k>2$이면 $\alpha=0$, $\beta=2$이고 $k=\gamma=4$이다.

ㄷ. (참)

$0<k<2$이면 $\alpha=0$, $\gamma=2$이고 $k=\beta=1$이므로

함수 $y=F(x)$의 그래프는

직선 $x=1$에 대하여 대칭인 그래프이고

$F'(x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭인 그래프이다.

또, 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$F'(1)=f(1)=0$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(2-x)$가 성립한다.

따라서 $f(-1)=-f(3)$이므로 $f(-1)+f(3)=0$이다.

15. 정답) ④ [수학 I 삼각함수의 활용]

해설 : 두 삼각형 ABD, ACD의 외접원의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2이므로 사인법칙을 이용하면

$\angle \mathrm{ADB}=120^\circ$, $\angle \mathrm{ADC}=60^\circ$ 에서

$\overline{\mathrm{AB}}=2\times r_1\times\sin(\angle \mathrm{ADB})=\sqrt{3}r_1$

$\overline{\mathrm{AC}}=2\times r_2\times\sin(\angle \mathrm{ADC})=\sqrt{3}r_2$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}r_1:\sqrt{3}r_2=r_1:r_2$이고

$r_1:r_2=7:\sqrt{19}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=7:\sqrt{19}$이다.

이에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}=7t$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{19}t$ $(t>0)$ 라 둘 수 있다.

점 D는 선분 BC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=s$라 할 때,
두 삼각형 ABD, ACD에서 각각 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2=3^2+s^2-2\times3\times s\times\cos(\angle \mathrm{ADB})$,

$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+s^2-2\times3\times s\times\cos(\angle \mathrm{ADC})$

$\Leftrightarrow$ $49t^2=9+s^2+3s$ ⋯ ㉠

$19t^2=9+s^2-3s$ ⋯ ㉡

이다.

㉠ − ㉡을 하면,

$30t^2=6s$, $t^2=\frac{s}{5}$이고 ㉡에 대입하면,

$\frac{19}{5}s=9+s^2-3s$에서

$5s^2-34s+45=(5s-9)(s-5)=0$이고

$s=5$이다. ($\because$ $\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{BD}}$)

삼각형 ABC의 넓이는
두 삼각형 ABD, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin60^\circ$

$=3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

16. 정답) 7 [수학 II 부정적분]

해설 : $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2+3)dx=2x^3+3x+C$ (C는 적분상수)

에서 $f(0)=2$이므로 $C=2$,

$f(x)=2x^3+3x+2$

이므로 $f(1)=2+3+2=7$이다.

17. 정답) 2 [수학 I 삼각함수]

해설 : $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{12}$에서 $\sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta$이고

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{144}\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$이다.

따라서 $2\sin\theta-3\cos\theta=-\frac{10}{13}+\frac{36}{13}=\frac{26}{13}=2$이다.

18. 정답) 40 [수학 I 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면,

$$\frac{S_6}{S_2}=\frac{\frac{\frac{1}{3}(r^6-1)}{r-1}}{\frac{\frac{1}{3}(r^2-1)}{r-1}}=1+r^2+r^4,$$

$$a_2+a_4+a_6=\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{3}r^5$$

이므로

$$1+r^2+r^4=\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{3}r^5$$
$$=\frac{1}{3}r(1+r^2+r^4)$$

에서 $r=3$이다. 따라서

$$3S_4=3\times\frac{\frac{1}{3}(3^4-1)}{3-1}=\frac{80}{2}=40$$

이다.

19. 정답) 5 [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 함수 $f(x)=x^3+kx^2+2x$가 역함수를 가지므로

삼차함수 $f(x)$는 극값을 가지지 않는다.

$f'(x)=3x^2+2kx+2\ge 0$에서

모든 실수 x에 대하여 부등식

$3x^2+2kx+2\ge 0$이 성립해야 하므로

$k^2-6\le 0$,

$-\sqrt{6}\le k\le \sqrt{6}$이다.

$f(1)=k+3$,

$3-\sqrt{6}\le k+3=f(1)\le 3+\sqrt{6}$이고, $2<\sqrt{6}<3$이므로

가능한 모든 정수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개다.

20. 정답) 6 [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면,

$f(x)=g(x)+xg'(x)$ ⋯ ㉠

$g(0)=g(4)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은

직선 $x=2$이고, 0이 아닌 실수 a에 대하여

$g(x)=a(x-2)^2+b=ax^2-4ax+c$ $(c=4a+b)$

라 할 수 있다. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=0$이므로

$g(x)=ax^2-4ax+3a$, $g'(x)=2ax-4a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=g(x)+xg'(x)$

$=(ax^2-4ax+3a)+x(2ax-4a)$

$=3ax^2-8ax+3a$

에서 $f'(x)=6ax-8a$

$\dfrac{g'(3)}{f'(3)}=\dfrac{2a}{10a}=\dfrac{1}{5}$이고, $p+q=6$

21. 정답) 34 [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : $a_5>0$이면 $a_6=2-a_5$인데 $a_6=-a_5$이므로 모순이다.

따라서 $a_5\le 0$이고, $a_6=a_5+4$이므로 $a_5=-2$이다.

$a_4>0$이면 $a_5=2-a_4$이므로 $a_4=4$이고,

$a_4\le 0$이면 $a_5=a_4+4$이므로 $a_4=-6$이다.

같은 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항으로 가능한 값들을

5항부터 1항까지의 순서로 나열하면 아래와 같다.

<table>
<tr><td>a_5</td><td colspan="6">-2</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">-6</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td colspan="3">0</td><td>8</td><td colspan="2">-10</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>2</td><td colspan="2">-4</td><td rowspan="2">×</td><td>12</td><td>-14</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>-2</td><td>6</td><td>-8</td><td>×</td><td>16 | -18</td></tr>
</table>

따라서 $M=16$, $m=-18$이므로 $M-m=16-(-18)=34$이다.

* $a_3=8$일 때,

$a_2>0$이면 $a_3=2-a_2$에서 $a_2=-6$이므로 모순이고,

$a_2\le 0$이면 $a_3=a_2+4$에서 $a_2=4$이므로 모순이다.

* $a_2=12$일 때,

$a_1>0$이면 $a_2=2-a_1$에서 $a_2=-10$이므로 모순이고,

$a_1\le 0$이면 $a_2=a_1+4$에서 $a_2=8$이므로 모순이다.

22. **정답)** 26 **[수학Ⅱ 도함수의 활용]**

해설 : 함수 $f'(x)$는 일차항의 계수가 양수인 일차함수이고,

함수 $xf'(x)$는 이차항의 계수가 양수인 이차함수이므로

$g(x)=\int_a^x tf'(t)dt$는 삼차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

$g(a)=0$이므로 양수 m에 대하여

$g(x)=m(x-a)(x^2+qx+r)$

이라 할 수 있고,

함수 $|(x-a)g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

함수 $|x^2+qx+r|$이 미분가능해야하고,

방정식 $x^2+qx+r=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

따라서 방정식 $g(x)=g(a)=0$의 근이

① $x=a$로 유일하거나

② $x=a$와 $x=b\ (a\neq b)$인 중근

일 때, 함수 $|(x-a)g(x)|$가 미분가능하므로

주어진 조건을 만족하려면

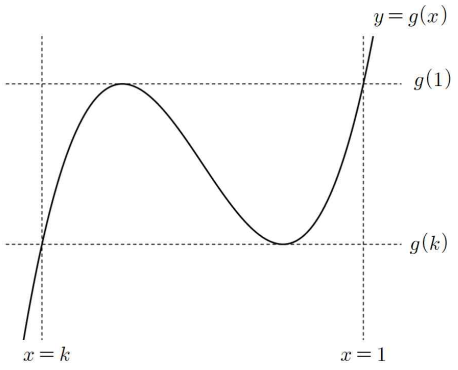
함수 $g(x)$는 $x=k$에서 극값을 가지지 않고,

$g(k)$는 함수 $g(x)$의 극솟값과 같아야 하고,

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지지 않고,

$g(1)$은 함수 $g(x)$의 극댓값과 같아야 한다.

위의 결과를 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.



이때, $g(x)=\int_a^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf'(x)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지고 $f'(0)\neq 0$이다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가질 때,

$g(x)=mx^2(x-1)=mx^3-mx^2$이므로

$g'(x)=3mx^2-2mx$에서 $f'(x)=3mx-2m$이다.

$f(x)=\frac{3}{2}mx^2-2mx+C_1$ (C_1은 적분상수)라 하면

$f(1)=1$이므로 $C_1=\frac{m}{2}+1$이다.

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}mx^2-2mx+\frac{m}{2}+1$이고

방정식 $f(x)=g'(x)$가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x)-xf'(x)=0$이 중근을 가진다.

$$f(x)-xf'(x)=\left(\frac{3}{2}mx^2-2mx+\frac{m}{2}+1\right)-(3mx^2-2mx)$$

$$=-\frac{3}{2}mx^2+\frac{m}{2}+1$$

에서 $\frac{m}{2}+1=0$, $m=-2$인데 m는 양수이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때,

$g(x)=mx^2(x-k)=mx^3-mkx^2$이므로

$g'(x)=3mx^2-2mkx$에서 $f'(x)=3mx-2mk$이다.

$f'\left(\frac{2}{3}k\right)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{2}{3}k$에서 극댓값을 가지고,

$g\left(\frac{2}{3}k\right)=g(1)$이므로 $-\frac{4}{27}k^3=1-k$에서 $k=-3$이다.

$f(x)=\frac{3}{2}mx^2+6mx+C_2$ (C_2는 적분상수)라 하면

$f(1)=1$이므로 $C_2=-\frac{15}{2}m+1$이다.

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}mx^2+6mx-\frac{15}{2}m+1$이고

방정식 $f(x)=g'(x)$가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x)-xf'(x)=0$이 중근을 가진다.

$$f(x)-xf'(x)=\left(\frac{3}{2}mx^2+6mx-\frac{15}{2}m+1\right)-(3mx^2+6mx)$$

$$=-\frac{3}{2}mx^2-\frac{15}{2}m+1$$

에서 $-\frac{15}{2}m+1=0$, $m=\frac{2}{15}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x$이므로

$f(3)=\frac{21}{5}$이고, $p+q=21+5=26$이다.