삼각형의 오심의 좌표

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

$$\text{삼각형 ABC : A}(x_1,\ y_1),\ \text{B}(x_2,\ y_2),\ \text{C}(x_3,\ y_3)\ \in \mathbb{R}^2$$
$$\overline{\text{BC}} = a,\ \overline{\text{CA}} = b,\ \overline{\text{AB}} = c$$

$$\overline{\text{BC}}\text{의 중점 L}\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$
$$\overline{\text{CA}}\text{의 중점 M}\left(\frac{x_3+x_1}{2},\ \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$
$$\overline{\text{AB}}\text{의 중점 N}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

- 아래 증명 과정에서 언급되는, 꼭짓점 A, B, C에서 그은 직선들 중 최소 두 개는 $x=k$ 꼴이 아니므로, 일반성을 잃지 않고 $y=mx+n$의 형태로 바꾸어 연립방정식을 풀 때는 이러한 직선들을 사용하기로 한다.

Ⅰ. 무게중심

직선 AL의 방정식 : $y = \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{2x_1-x_2-x_3}(x-x_1)+y_1$

직선 BM의 방정식 : $y = \dfrac{2y_2-y_1-y_3}{2x_2-x_1-x_3}(x-x_2)+y_2$

위 두 식을 연립하면

$$\frac{2y_1-y_2-y_3}{2x_1-x_2-x_3}(x-x_1)+y_1 = \frac{2y_2-y_1-y_3}{2x_2-x_1-x_3}(x-x_2)+y_2$$

$$\{(2x_2-x_1-x_3)(2y_1-y_2-y_3)-(2x_1-x_2-x_3)(2y_2-y_1-y_3)\}x$$

$$=(y_2-y_1)(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)+x_1(2x_2-x_1-x_3)(2y_1-y_2-y_3)-x_2(2x_1-x_2-x_3)(2y_2-y_1-y_3)$$

$$3\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}x = (x_1+x_2+x_3)\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}$$

$$\therefore G_x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

이를 다시 대입하면

$$G_y = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{2x_1 - x_2 - x_3}(G_x - x_1) + y_1$$

$$= \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{2x_1 - x_2 - x_3} \cdot \frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{3} + y_1$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$\therefore \mathrm{G}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$= \mathrm{G}\left(\frac{\sum_{cyc} x_1}{3},\ \frac{\sum_{cyc} y_1}{3}\right)$$

Ⅱ. 외심

점 L을 지나고 변 $\overline{\mathrm{BC}}$에 수직한 직선의 방정식 : $y = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}\left(x - \frac{x_2 + x_3}{2}\right) + \frac{y_2 + y_3}{2}$

점 M을 지나고 변 $\overline{\mathrm{CA}}$에 수직한 직선의 방정식 : $y = -\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}\left(x - \frac{x_3 + x_1}{2}\right) + \frac{y_3 + y_1}{2}$

위 두 식을 연립하면

$$-\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}\left(x - \frac{x_2 + x_3}{2}\right) + \frac{y_2 + y_3}{2} = -\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}\left(x - \frac{x_3 + x_1}{2}\right) + \frac{y_3 + y_1}{2}$$

$$\left(\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} - \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}\right)x = \frac{y_1 - y_2}{2} + \frac{x_3^2 - x_1^2}{2(y_3 - y_1)} - \frac{x_2^2 - x_3^2}{2(y_2 - y_3)}$$

$$\{(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_3 - y_1)\}x = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3^2 - x_1^2)(y_2 - y_3) - (x_2^2 - x_3^2)(y_3 - y_1)}{2}$$

$$\{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)\}x$$

$$= \frac{x_1^2(y_3 - y_2) + x_2^2(y_1 - y_3) + x_3^2(y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)(y_1 - y_3)}{2}$$

$$\therefore O_x = \frac{x_1^2(y_3-y_2)+x_2^2(y_1-y_3)+x_3^2(y_2-y_1)-(y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3)}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}$$

$$= \frac{(x_1^2+y_1^2)(y_3-y_2)+(x_2^2+y_2^2)(y_1-y_3)+(x_3^2+y_3^2)(y_2-y_1)}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}$$

$$= \frac{\sum_{cyc}(x_1^2+y_1^2)(y_3-y_2)}{2\sum_{cyc}x_1(y_3-y_2)}$$

이를 다시 대입하면

$$O_y = -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\left(O_x - \frac{x_2+x_3}{2}\right)+\frac{y_2+y_3}{2}$$

$$= -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\left(\frac{x_1^2(y_3-y_2)+x_2^2(y_1-y_3)+x_3^2(y_2-y_1)-(y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3)-(x_2+x_3)\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}\right)+\frac{y_2+y_3}{2}$$

$$= \frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}$$

$$= \frac{\sum_{cyc}(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)}{2\sum_{cyc}x_1(y_3-y_2)}$$

$$\therefore \mathrm{O}\left(\frac{(x_1^2+y_1^2)(y_3-y_2)+(x_2^2+y_2^2)(y_1-y_3)+(x_3^2+y_3^2)(y_2-y_1)}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}},\ \frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)}{2\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}}\right)$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{\sum_{cyc}(x_1^2+y_1^2)(y_3-y_2)}{2\sum_{cyc}x_1(y_3-y_2)},\ \frac{\sum_{cyc}(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)}{2\sum_{cyc}x_1(y_3-y_2)}\right)$$

Ⅲ. 내심

삼각형 ABC에서 $\angle$BAC의 이등분선과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 교점을 D라 하면, 각의 이등분선의 성질에 의해 점 D는 변 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = c : b$로 내분한다. 따라서 점 D의 좌표는

$$\mathrm{D}\left(\frac{bx_2+cx_3}{b+c},\ \frac{by_2+cy_3}{b+c}\right)$$

로 구해진다. $\angle \mathrm{ABC}$의 이등분선과 $\overline{\mathrm{AD}}$의 교점을 I라 하면, 각의 이등분선의 성질에 의해

$$\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{ID}} = \overline{\mathrm{BA}} : \overline{\mathrm{BD}} = c : \frac{ac}{b+c} = b+c : a$$

가 성립하고, 이때 두 내각의 이등분선의 교점 I는 삼각형 ABC의 내심이다. 따라서 점 I의 좌표는

$$\therefore \mathrm{I}\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\ \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$$

$$= \mathrm{I}\left(\frac{\sum_{cyc} ax_1}{\sum_{cyc} a},\ \frac{\sum_{cyc} ay_1}{\sum_{cyc} a}\right)$$

$$\left(a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},\ b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2},\ c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$$

이다.

Ⅳ. 수심

A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발 $\mathrm{H_A}$, B에서 $\overline{\mathrm{CA}}$에 내린 수선의 발 $\mathrm{H_B}$라 하자.

직선 $\mathrm{AH_A}$의 방정식 : $y=-\dfrac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1$

직선 $\mathrm{BH_B}$의 방정식 : $y=-\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2$

위 두 식을 연립하면

$$-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1=-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2$$

$$-(x_2-x_3)(y_1-y_3)(x-x_1)+(x_1-x_3)(y_2-y_3)(x-x_2)=(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_1-y_3)$$

$$\{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\}x=(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)(y_2-y_3)-x_1(x_2-x_3)(y_1-y_3)$$

$$\left\{\sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)\right\} x = \sum_{cyc} x_1 x_2 (y_2-y_1) - (y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3)$$

이므로

$$\therefore H_x = \frac{x_1x_2(y_2-y_1)+x_2x_3(y_3-y_2)+x_3x_1(y_1-y_3)-(y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)(y_2-y_1)+(x_2x_3+y_2y_3)(y_3-y_2)+(x_3x_1+y_3y_1)(y_1-y_3)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}$$

$$= \frac{\sum_{cyc}(x_1x_2+y_1y_2)(y_2-y_1)}{\sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)}$$

이다. 이를 직선 $\mathrm{AH_A}$의 방정식에 다시 대입하면

$$H_y = -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(H_x - x_1) + y_1$$

$$= -\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3} \cdot \frac{\sum_{cyc} x_1x_2(y_2-y_1) - (y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3) - x_1 \sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)} + y_1$$

$$= \frac{x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2^2x_3 - x_2x_3^2 + x_3^2x_1 - x_3x_1^2 - x_2y_1y_2 + x_2y_2y_3 - x_3y_2y_3 + x_3y_1y_3 + x_1y_1y_2 - x_1y_1y_3}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)(x_1-x_2)+(x_2x_3+y_2y_3)(x_2-x_3)+(x_3x_1+y_3y_1)(x_3-x_1)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}$$

$$= \frac{\sum_{cyc}(x_1x_2+y_1y_2)(x_1-x_2)}{\sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)}$$

$$\therefore \mathrm{H}\left(\frac{(x_1x_2+y_1y_2)(y_2-y_1)+(x_2x_3+y_2y_3)(y_3-y_2)+(x_3x_1+y_3y_1)(y_1-y_3)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)},\ \frac{(x_1x_2+y_1y_2)(x_1-x_2)+(x_2x_3+y_2y_3)(x_2-x_3)+(x_3x_1+y_3y_1)(x_3-x_1)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}\right)$$

$$= \mathrm{H}\left(\frac{\sum_{cyc}(x_1x_2+y_1y_2)(y_2-y_1)}{\sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)},\ \frac{\sum_{cyc}(x_1x_2+y_1y_2)(x_1-x_2)}{\sum_{cyc} x_1(y_2-y_3)}\right)$$

Ⅴ. 방심

삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{BAC}$의 이등분선과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 교점을 D라 하면, 외각의 이등분선의 성질에 의해 점 A와 마주보는 방심 $\mathrm{I_A}$는 $\overline{\mathrm{AD}}$를

$$\overline{\mathrm{BA}} : \overline{\mathrm{BD}} = c : \frac{ac}{b+c} = b+c : a$$

로 외분하는 점이다. 이때 점 D의 좌표는

$$\mathrm{D}\left(\frac{bx_2+cx_3}{b+c},\ \frac{by_2+cy_3}{b+c}\right)$$

이므로 방심 $\mathrm{I_A}$의 좌표는

$$\mathrm{I_A}\left(\frac{-ax_1+bx_2+cx_3}{-a+b+c},\ \frac{-ay_1+by_2+cy_3}{-a+b+c}\right)$$

이다. 마찬가지로 꼭짓점 B, C에 대한 방심 $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$는

$$\mathrm{I_B}\left(\frac{ax_1-bx_2+cx_3}{a-b+c},\ \frac{ay_1-by_2+cy_3}{a-b+c}\right),\ \mathrm{I_C}\left(\frac{ax_1+bx_2-cx_3}{a+b-c},\ \frac{ay_1+by_2-cy_3}{a+b-c}\right)$$

$$\left(a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},\ b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2},\ c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$$

이다.