수능특강 수학영역 **수학 I**

정답과 풀이

www.ebsi.co.kr

한눈에 보는 정답

01 지수와 로그

유제 — 본문 5~13쪽

1 ②	2 ②	3 ②	4 ③	5 ②
6 ②	7 ①	8 ②	9 4	10 ②

Level 1 기초 연습 — 본문 14쪽

1 ①	2 ④	3 ④	4 ④	5 ④

Level 2 기본 연습 — 본문 15~16쪽

1 ②	2 ④	3 ②	4 ①	5 ⑤
6 8	7 ③	8 ②		

Level 3 실력 완성 — 본문 17~18쪽

1 ③	2 ②	3 2	4 512	5 ⑤
6 ③				

02 지수함수와 로그함수

유제 — 본문 21~29쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ⑤	5 6
6 ④	7 ④	8 ③	9 ④	10 16

Level 1 기초 연습 — 본문 30쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ②	5 ④

Level 2 기본 연습 — 본문 31~32쪽

1 ①	2 ④	3 5	4 ②	5 8
6 ②	7 ④	8 ④		

Level 3 실력 완성 — 본문 33~34쪽

1 ⑤	2 ①	3 ②	4 ②	5 ⑤
6 ④				

03 삼각함수

유제 — 본문 37~45쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ①
6 ①	7 ④	8 ①	9 ②	10 ⑤

Level 1 기초 연습 — 본문 46~47쪽

1 ②	2 ④	3 ①	4 ④	5 ③
6 ⑤	7 ④	8 ⑤		

Level 2 기본 연습 — 본문 48~50쪽

1 ③	2 ⑤	3 ①	4 ①	5 ④
6 9	7 31	8 30	9 ③	10 3
11 ②	12 ①			

Level 3 실력 완성 — 본문 51쪽

1 3	2 ⑤	3 ③

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 55~61쪽

1 ④	2 ①	3 7	4 45	5 8
6 ②	7 ③	8 8		

Level 1 기초 연습 본문 62~63쪽

1 ①	2 ②	3 ②	4 ①	5 ③
6 7	7 5	8 108		

Level 2 기본 연습 본문 64~66쪽

1 ②	2 ②	3 20	4 ③	5 550
6 ②	7 ③	8 ④	9 ②	

Level 3 실력 완성 본문 67쪽

1 ④	2 ②	3 ③

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 71~77쪽

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ④
6 100	7 ③	8 ⑤		

Level 1 기초 연습 본문 78~79쪽

1 ②	2 5	3 6	4 ④	5 ③
6 ②	7 64	8 ①		

Level 2 기본 연습 본문 80~81쪽

1 ①	2 ②	3 ②	4 ②	5 ③
6 8	7 75	8 ③		

Level 3 실력 완성 본문 82쪽

1 ②	2 21	3 ②

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 85~95쪽

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 15	5 18
6 ⑤	7 16	8 ②	9 ①	10 10
11 ③				

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 890	5 22
6 ①	7 ③	8 ③		

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ④	2 ②	3 ②	4 22	5 ⑤
6 81	7 ②	8 8		

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 825	2 ⑤	3 6	4 ④	5 56

01 지수와 로그

유제				본문 5~13쪽
1 ②	2 ②	3 ②	4 ③	5 ②
6 ②	7 ①	8 ②	9 4	10 ②

1 $\sqrt[3]{-27}$은 방정식 $x^3=-27$의 실근이다.
한편, 이 방정식의 실근은 1개이므로
$x=-3$
즉, $\sqrt[3]{-27}=-3$
또 $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}$이므로 이 수는 방정식 $x^4=2^4$의 실근 중 양수이다.
한편, 방정식 $x^4=2^4$의 실근은 -2, 2이므로
$x=2$
즉, $\sqrt[4]{(-2)^4}=2$
따라서 $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{(-2)^4}=(-3)+2=-1$

답 ②

2 24의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로
$a=\sqrt[3]{24}$
또 3의 여섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$이므로 모든 실수인 근의 곱은
$$b=\sqrt[6]{3}\times(-\sqrt[6]{3})=-\sqrt[6]{3^2}=-\sqrt[3]{3}$$
따라서
$$\frac{a\times b}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[3]{24}\times(-\sqrt[3]{3})}{\sqrt[3]{9}}=-\sqrt[3]{\frac{24\times3}{9}}=-\sqrt[3]{2^3}=-2$$

답 ②

3 $\sqrt[3]{2\times\sqrt{2}}\times4^{-\frac{3}{4}}$
$$=(2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{3}{4}}$$
$$=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{3}{4}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)}$$
$$=2^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

4 $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}}\times\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$
$$=\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$$
$$=(2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$$
$$=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

답 ③

다른 풀이

$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}}\times\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$
$$=\frac{2^3}{2^{\sqrt{3}}}\times\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$$
$$=\frac{2^3}{2}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

5 $2^y=\sqrt{6}$에서
$y=\log_2\sqrt{6}$
이고 $x=\log_2 3$이므로
$$x-2y=\log_2 3-2\log_2\sqrt{6}$$
$$=\log_2 3-\log_2(\sqrt{6})^2$$
$$=\log_2 3-\log_2 6$$
$$=\log_2\frac{3}{6}$$
$$=\log_2 2^{-1}$$
$$=-1$$

답 ②

다른 풀이

$x=\log_2 3$에서
$2^x=3$
이고 $2^y=\sqrt{6}$이므로

$2^x \div (2^y)^2 = 3 \div (\sqrt{6})^2$
$= \frac{1}{2}$
$= 2^{-1}$
따라서 $x-2y=-1$

6 $(\log_2 \sqrt{2}) \times (\log_2 6) - \log_2 \sqrt{3}$
$= (\log_2 2^{\frac{1}{2}}) \times \{\log_2 (2 \times 3)\} - \log_2 3^{\frac{1}{2}}$
$= \left(\frac{1}{2} \log_2 2\right) \times (\log_2 2 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3$
$= \frac{1}{2} \times (1 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3$
$= \frac{1}{2}$

답 ②

7 $\log_4 \frac{1}{3} \times \log_{\sqrt{3}} 8$
$= \log_{2^2} 3^{-1} \times \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^3$
$= \left(\frac{-1}{2} \log_2 3\right) \times \left(\frac{3}{\frac{1}{2}} \log_3 2\right)$
$= \left(-\frac{1}{2} \log_2 3\right) \times \left(6 \times \frac{\log_2 2}{\log_2 3}\right)$
$= -3$

답 ①

8 밑을 7로 나타내면
$a = \frac{\log_7 3}{\log_2 3}$
$= \frac{\log_7 3}{\frac{\log_7 3}{\log_7 2}}$
$= \log_7 2$
따라서
$7^a = 7^{\log_7 2}$
$= 2^{\log_7 7}$
$= 2^1$
$= 2$

답 ②

다른 풀이

$7^a = 7^{\frac{\log_7 3}{\log_2 3}}$
$= (7^{\log_7 3})^{\frac{1}{\log_2 3}}$
$= (3^{\log_7 7})^{\frac{1}{\log_2 3}}$
$= 3^{\frac{1}{\log_2 3}}$
$= 3^{\log_3 2}$
$= 2^{\log_3 3}$
$= 2^1$
$= 2$

9 $\log A = 3.6$, $\log B = 1.0020$이고 $\log 2 = 0.3010$이므로
$\log \sqrt{AB} = \frac{1}{2} \log AB$
$= \frac{1}{2}(\log A + \log B)$
$= \frac{1}{2} \times (3.6 + 1.0020)$
$= \frac{1}{2} \times 4.6020$
$= 2.3010$
$= 2 + 0.3010$
$= \log 10^2 + \log 2$
$= \log(2 \times 10^2)$
따라서 $\sqrt{AB} = 2 \times 10^2$이므로 $a=2$, $n=2$에서
$a+n=2+2=4$

답 4

다른 풀이

$\sqrt{AB} = a \times 10^n$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log \sqrt{AB} = \log (a \times 10^n)$
$\frac{1}{2}(\log A + \log B) = \log a + \log 10^n$
$\frac{1}{2} \times 4.6020 = \log a + n \log 10$
$2 + 0.3010 = \log a + n$
$n - 2 = 0.3010 - \log a$
이때 좌변은 정수이고, $0 \le \log a < 1$이므로
$-1 < 0.3010 - \log a < 1$인 사실로부터
$\log a = 0.3010$에서 $a=2$, $n=2$를 얻는다.
따라서 $a+n=4$

10 $\log (2^{\log_5 4})$
$= \log_5 4 \times \log 2$
$= \frac{\log 4}{\log 5} \times \log 2$

$=\dfrac{\log 2^2}{\log \dfrac{10}{2}}\times\log 2$

$=\dfrac{2\log 2}{\log 10-\log 2}\times\log 2$

$=\dfrac{2a^2}{1-a}$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 14쪽

1 ①	2 ④	3 ④	4 ④	5 ④

1 $2^{-1}\times3^0\div\dfrac{1}{4^{-1}}$

$=2^{-1}\times1\div(4^{-1})^{-1}$

$=2^{-1}\div4^1$

$=2^{-1}\div2^2$

$=2^{(-1)-2}$

$=2^{-3}$

$=\dfrac{1}{8}$

답 ①

2 $\sqrt[3]{(-2)^{-2}}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{1}{(-2)^2}}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^2}}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=\sqrt[3]{2^{-2}}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=2^{-\frac{2}{3}}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=2^{\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{3}}$

$=2^1$

$=2$

답 ④

3 $\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$의 세제곱근은 방정식 $x^3=2^{\frac{3}{2}}$의 근이다.

이 방정식을 풀면

$x^3-(2^{\frac{1}{2}})^3=0$

$(x-2^{\frac{1}{2}})\{x^2+2^{\frac{1}{2}}x+(2^{\frac{1}{2}})^2\}=0$

$x-\sqrt{2}=0$ 또는 $x^2+\sqrt{2}x+2=0$

이때 방정식 $x^2+\sqrt{2}x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(\sqrt{2})^2-4\times2<0$

따라서 두 허수는 이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x+2=0$의 근이므로 모든 허근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

답 ④

4 $\log_2 7-\log_2\dfrac{7}{8}$

$=\log_2\left(7\div\dfrac{7}{8}\right)$

$=\log_2\left(7\times\dfrac{8}{7}\right)$

$=\log_2 2^3$

$=3\log_2 2$

$=3$

답 ④

5 $\log_{\sqrt{2}}12-\dfrac{1}{\log_9 2}$

$=\log_{2^{\frac{1}{2}}}12-\log_2 9$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 12-\log_2 3^2$

$=2\log_2 12-2\log_2 3$

$=2\log_2\dfrac{12}{3}$

$=2\log_2 2^2$

$=4\log_2 2$

$=4$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 15~16쪽

1 ②	2 ④	3 ②	4 ①	5 ⑤
6 8	7 ③	8 ②		

1 $a^{-1}\times(-b)^{-1}=2$에서

$\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{-b}=2$

$ab=-\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $a^{-1}+b^{-1}=3$에서

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3$

$\dfrac{a+b}{ab}=3$

㉠을 대입하면

$a+b=-\frac{3}{2}$

따라서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{13}{4}$

답 ②

2 $\sqrt[3]{-8}$은 방정식 $x^3=-8$의 근 중 실수인 것이므로

$\sqrt[3]{-8}=-2$

그러므로 집합 B는

$B=\{-2\}$

이때 $B\subset A$이고 집합 A의 원소는 방정식 $x^4=a$의 근이므로

$(-2)^4=a$

$a=16$

방정식 $x^4=16$을 풀면

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2i$

따라서 $A-B=\{2, 2i, -2i\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 곱은

$2\times 2i\times(-2i)=-8i^2=8$

답 ④

3 $\sqrt[3]{a+1}$은 방정식 $x^3=a+1$의 실근이므로

$(\sqrt[3]{a+1})^3=a+1$

또

$\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{|a|}\times\sqrt[4]{|a|}}=\frac{\sqrt[4]{|a|^6}}{\sqrt[4]{|a|}\times\sqrt[4]{|a|}}$

$=\frac{|a|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{1}{4}}\times|a|^{\frac{1}{4}}}$

$=|a|^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$

$=|a|$

그러므로 $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{|a|}\times\sqrt[4]{|a|}}\times(\sqrt[3]{a+1})^3=a-3$에서

$|a|\times(a+1)=a-3$

(i) $a>0$일 때

$a^2+a=a-3$

$a^2=-3$

이 식을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$-a^2-a=a-3$

$a^2+2a-3=0$

$(a-1)(a+3)=0$

이때 $a<0$이므로

$a=-3$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 -3이다.

답 ②

4 $\frac{\sqrt[15]{8}\times\sqrt[3]{9^{-1}}}{\sqrt[6]{3^{-1}}}=\frac{2^{\frac{3}{15}}\times 3^{\frac{-2}{3}}}{3^{\frac{-1}{6}}}$

$=2^{\frac{1}{5}}\times 3^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)}$

$=2^{\frac{1}{5}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$

이 수가 어떤 유리수의 n제곱근이 되려면 $\left(2^{\frac{1}{5}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n$이 유리수이어야 한다.

$\left(2^{\frac{1}{5}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n=\frac{q}{p}$ (p와 q는 서로소인 자연수)라 하면

$\frac{2^{\frac{n}{5}}}{3^{\frac{n}{2}}}=\frac{q}{p}$

$\frac{2^{2n}}{3^{5n}}=\frac{q^{10}}{p^{10}}$

$p^{10}=3^{5n}r$, $q^{10}=2^{2n}r$ (r는 자연수)에서 p와 q는 서로소인 자연수이므로 $r=1$이다.

즉, $p=3^k$, $q=2^l$ (k, l은 자연수)에서

$3^{10k}=3^{5n}$, $2^{10l}=2^{2n}$이므로 $n=2k$, $n=5l$

그러므로 n은 2의 배수이면서 5의 배수, 즉 10의 배수이고, 역으로 n이 10의 배수이면 $\left(2^{\frac{1}{5}}\times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n$은 유리수가 된다.

따라서 구하는 n은 10, 20, ⋯, 100이고 그 개수는 10이다.

답 ①

5 $\log_2 a+\log_2 b=1$에서

$\log_2 ab=1$

$ab=2$

또 $\log_2(a+b)=\frac{5}{2}$에서

$a+b=2^{\frac{5}{2}}$

따라서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(2^{\frac{5}{2}})^2-2\times 2$

$=2^5-4$

$=32-4$

$=28$

답 ⑤

6 $\log_a bc=3$에서

$\log_a b+\log_a c=3$

이때 $\log_a b-\log_a c=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$\log_a b=2$, $\log_a c=1$

즉, $b=a^2$, $c=a$

이 식을 $\log_a \frac{b+c}{3}=1$에 대입하면

$\log_a \frac{a^2+a}{3}=1$

$\frac{a^2+a}{3}=a$

$a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$

$a>0$이므로

$a=2$

따라서 $a=2$, $b=2^2=4$, $c=2$이므로

$a+b+c=2+4+2=8$

답 8

7 $\log_a 2\times\log_2(2a+3)=\log_2 a\times\log_a 4$에서

$\log_a 2\times\frac{\log_a(2a+3)}{\log_a 2}=\frac{1}{\log_a 2}\times\log_a 2^2$

$\log_a(2a+3)=2$

$2a+3=a^2$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

이때 $a>0$이고 $a\neq1$이므로

$a=3$

답 ③

8 $b^{\log_3 a}=4$에서

$a^{\log_3 b}=4$

이때 $p=\log_2 a$에서 $a=2^p$이므로

$(2^p)^{\log_3 b}=4$

또 $b=3^q$에서 $q=\log_3 b$이므로

$(2^p)^q=4$

$2^{pq}=2^2$

따라서 $pq=2$

답 ②

다른 풀이

$b^{\log_3 a}=4$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 b^{\log_3 a}=\log_3 4$

$\log_3 a\times\log_3 b=\log_3 4$

$\log_3 a\times q=\log_3 4$

이때 밑을 2로 바꾸면

$\frac{\log_2 a}{\log_2 3}\times q=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}$

한편, $\log_2 a=p$이므로

$pq=2\log_2 2=2$

Level 3 실력 완성

본문 17~18쪽

1 ③	2 ②	3 2	4 512	5 ⑤
6 ③				

1 조건 (가)에서 $\sqrt[n]{a}<0$이므로 n은 홀수이고 a는 음수이다.

한편, n이 홀수이므로 조건 (나)에서

$\sqrt[n]{(-1)^n}\times\sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}}=-|n+a|=-3$

즉, $|n+a|=3$

(i) $n+a=3$일 때

n은 3, 5, 7이고 $a<0$이므로 구하는 순서쌍 (n, a)는

$(5, -2)$, $(7, -4)$

(ii) $n+a=-3$일 때

n은 3, 5, 7이고 $a<0$이므로 구하는 순서쌍 (n, a)는

$(3, -6)$, $(5, -8)$, $(7, -10)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (n, a)의 개수는

$2+3=5$

답 ③

2 함수 $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{2}$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $x^3=\sqrt{2}$의 실근이다.

$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}$

그러므로 $\mathrm{A}(2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{2}})$

한편, 선분 OA를 지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점이 H이므로

$\angle\mathrm{OHA}=90°$

그러므로 $\mathrm{H}(2^{\frac{1}{6}}, 0)$

따라서 삼각형 AOH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{(-1)+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$

답 ②

3 $\overline{AB}=\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$, $\overline{BC}=\sqrt[4]{12}=(2^2\times3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}$,

$\angle ABC=90^\circ$이므로

$$\overline{CA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{(3^{\frac{1}{4}})^2+(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}})^2}$$
$$=\sqrt{3^{\frac{1}{2}}+2\times3^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\sqrt{3\times3^{\frac{1}{2}}}$$
$$=(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{3}{4}}$$

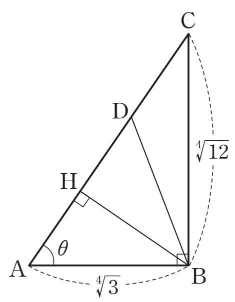
$\angle CAB=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$$
$$=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$
$$=3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$$
$$=3^{-\frac{1}{2}}$$

또

$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}}$$

한편, 삼각형 ABD가 $\overline{AB}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로 점 B에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 DA의 중점이다.



그러므로

$$\overline{AH}=\overline{AB}\cos\theta$$
$$=3^{\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{-\frac{1}{4}}$$

또

$$\overline{BH}=\overline{AB}\sin\theta$$
$$=3^{\frac{1}{4}}\times(2^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}})$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{4}}$$

따라서 삼각형 ABD의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{BH}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\overline{AH}\times\overline{BH}$$
$$=\overline{AH}\times\overline{BH}$$
$$=3^{-\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{4}}$$
$$=3^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}$$

이므로

$$3\times S^2=3\times\frac{2}{3}=2$$

답 2

4 $\log_4 M+\log_4(2\log_2 M)=\log_4\{M\times(2\log_2 M)\}$

의 값이 자연수가 되어야 하므로 이 자연수를 n이라 하면

$\log_4\{M\times(2\log_2 M)\}=n$

$2M\times\log_2 M=4^n$ …… ㉠

이때 M이 2 이상의 자연수이므로 $\log_2 M$은 유리수이어야 한다. 즉, $\log_2 M=\frac{q}{p}$ (p와 q는 서로소인 자연수)

로그의 정의에 의해

$M=2^{\frac{q}{p}}$이고 이 값은 2 이상의 자연수이어야 하므로 $p=1$, 즉 $M=2^q$이다.

그러므로 ㉠에서

$2^{q+1}\times q=4^n$ …… ㉡

이때 $q=2^l$ (l은 0 이상의 정수) 꼴이어야 하므로 l의 값에 0 이상의 정수를 차례로 대입하면 ㉡은

$q=2^0$일 때, $2^{1+1}\times1=4^1$

$q=2^1$일 때, $2^{2+1}\times2^1=2^4=4^2$

$q=2^2$일 때, $2^{4+1}\times2^2=2^7$

$q=2^3$일 때, $2^{8+1}\times2^3=2^{12}=4^6$

⋮

따라서 M의 값은 2^1, 2^2, 2^8, $\cdots$이므로

$a_1\times a_3=2\times2^8=2\times256=512$

답 512

참고

㉡에서 $2^{q+1}\times q=4^n$이고 $q=2^l$이므로

$2^{2^l+1+l}=2^{2n}$

$2^l+1+l=2n$

그러므로 l은 0 또는 홀수이다.

5 조건 (가)에서

$(\log_4 ab)^2-\left(\log_4 \dfrac{a}{b}\right)^2=8$이므로

$(\log_4 a+\log_4 b)^2-(\log_4 a-\log_4 b)^2$

$=\{(\log_4 a)^2+2\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 b)^2\}$

$\qquad-\{(\log_4 a)^2-2\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 b)^2\}$

$=4\log_4 a\times\log_4 b=8$

즉, $\log_4 a\times\log_4 b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 조건 (나)에서 $\log_4 b$가 자연수이므로

$\log_4 b=n$ (n은 자연수)라 하면 ㉠은

$n\times\log_4 a=2$

$\log_4 a=\dfrac{2}{n}$

$a=4^{\frac{2}{n}}=2^{\frac{4}{n}}$

이때 a와 n이 자연수이어야 하므로 n은 4의 양의 약수이다.

그러므로 순서쌍 (n, a)는

$(1, 16)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$

각각에 대하여 순서쌍 (b, a)는

$(4, 16)$, $(16, 4)$, $(256, 2)$

따라서 $a+b$의 최댓값은

$2+256=258$

답 ⑤

6 조건 (가)에서 $\log_a b=\log_b c$이므로

$\log_a b=\log_b c=p$로 놓으면

$b=a^p$, $c=b^p$

$c=b^p$에 b 대신 a^p을 대입하면

$c=(a^p)^p=a^{p^2}$

한편, 조건 (나)에서 $b\times c=a^2$이므로

$a^p\times a^{p^2}=a^2$

$a^{p^2+p-2}=1$

이때 $a\neq1$이므로

$p^2+p-2=0$

$(p+2)(p-1)=0$

$p=1$ 또는 $p=-2$

$p=1$이면 $a=b=c$가 되어 조건을 만족시키지 못하므로

$p=-2$

즉, $b=a^{-2}$, $c=a^4$

따라서

$\log_a \dfrac{c}{b}=\log_a \dfrac{a^4}{a^{-2}}=\log_a a^6=6\log_a a=6$

답 ③

02 지수함수와 로그함수

유제 본문 21~29쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ⑤	5 6
6 ④	7 ④	8 ③	9 ④	10 16

1 지수함수 $y=\left(\frac{n}{15}+\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{n}{15}+\frac{1}{2}<1$

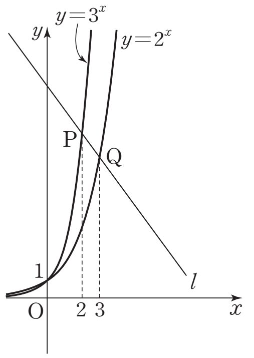
$n<\frac{15}{2}$

이때 n이 자연수이므로 n의 최댓값은 7, 최솟값은 1이다.

따라서 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

답 ②

2 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프는 그림과 같다. 기울기가 음수이고 y절편이 1보다 큰 직선 l이 두 함수 $y=3^x$, $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.



따라서 $P(2, 3^2)$, $Q(3, 2^3)$이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{8-9}{3-2}(x-2)+9$

즉, $y=-x+11$이므로 직선 l의 y절편은 11이다.

답 ⑤

3 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=2^{x-1}+2$

함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프가 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=2^{2-1}+2=2+2=4$

답 ④

4 함수 $y=a^x+1$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(i) $a>1$일 때

함수 $y=a^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

그러므로 함수 $y=a^x+1$은 $x=2$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 가져야 한다.

즉, $a^2+1=\frac{5}{4}$에서

$a^2=\frac{1}{4}$

이때 $a>1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $0<a<1$일 때

함수 $y=a^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그러므로 함수 $y=a^x+1$은 $x=1$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 가져야 한다.

즉, $a+1=\frac{5}{4}$에서

$a=\frac{1}{4}$

이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+1$의 최솟값은 $x=2$일 때

$\left(\frac{1}{4}\right)^2+1=\frac{17}{16}$

답 ⑤

5 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x좌표가 1보다 작은 점에서 만나므로

$0<a<1$ ⋯⋯ ㉠

이때 $4\left\{f(1)+g\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2=1$이므로

$4\left(a^1+\log_a \frac{1}{a}\right)^2=1$

$(a-1)^2=\frac{1}{4}$

$a-1=\frac{1}{2}$ 또는 $a-1=-\frac{1}{2}$

$a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

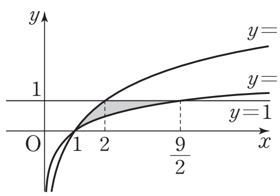
따라서 ㉠에서 $a=\frac{1}{2}$이므로

$12a=6$

답 6

6 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 좌표는 $(2, 1)$, 함수 $y=\log_{\frac{9}{2}} x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$이다.

또 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{9}{2}} x$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(1, 0)$이므로 그림과 같다.



따라서 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 포함된 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$

이고 그 개수는 4이다.

답 ④

7 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위에 점 $\mathrm{A}(3, 1)$이 있으므로

$1=\log_a 3$에서 $a=3$

이때 함수 $y=\log_3(x+1)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\frac{2}{-1}=-2$이므로 이 값은 주어진 직선의 기울기와 같다.

그러므로 점 A를 지나고 기울기가 -2인 직선이 함수 $y=\log_3(x+1)+2$의 그래프와 만나는 점 B의 좌표는

$(3+(-1), 1+2)$, 즉 $(2, 3)$

따라서 $a+b+c=3+2+3=8$

답 ④

8 (i) $a>1$일 때

$2\le x\le 3$에서 $\log_a x>0$이므로 $M<0$일 수 없다.

(ii) $0<a<1$일 때

$2\le x\le 3$에서 $\log_a x<0$이므로 $M<0$이다.

이때 최댓값 M은 $x=2$일 때, $M=\log_a 2$

최솟값 m은 $x=3$일 때, $m=\log_a 3$

그러므로 $M-m=1$에서

$\log_a 2-\log_a 3=1$

$\log_a \frac{2}{3}=1$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ③

9 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<\frac{3^{10-3x}}{\sqrt{27}}$에서

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x<\frac{3^{10-3x}}{3^{\frac{3}{2}}}$

$3^{-2x}<3^{\frac{17}{2}-3x}$

이때 밑 3이 1보다 크므로

$-2x<\frac{17}{2}-3x$

$x<\frac{17}{2}$

따라서 자연수 x는 $1, 2, 3, \cdots, 8$이고 그 개수는 8이다.

답 ④

10 부등식 $\log_2(x+10)<6\log_4 3\ (x>-10)$에서

$\log_2(x+10)<6\log_{2^2} 3$

$\log_2(x+10)<3\log_2 3$

$\log_2(x+10)<\log_2 3^3$

이때 밑 2가 1보다 크므로

$x+10<3^3$

$x<17$

따라서 자연수 x는 $1, 2, 3, \cdots, 16$이고 그 개수는 16이다.

답 16

Level 1 기초 연습 본문 30쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ②	5 ④

1 $3f(2)=7a-2$에서

$3a^2=7a-2$

$3a^2-7a+2=0$

$(3a-1)(a-2)=0$

$a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=2$

한편, $b>0$일 때 $f(b)>1$이므로 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $a=2$

따라서 $f(1)+f(-1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ③

2 함수 $y=-2^{x-1}+3$의 그래프는 함수 $y=-2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

한편, 함수 $y=-2^x$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 함수 $y=-2^x$의 그래프의 점근선과의 거리가 1인 함수 $y=-2^x$의 그래프 위의 점은 $(0,\ -1)$이다.

따라서 구하는 점 A는 점 $(0,\ -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$\mathrm{A}(0+1,\ (-1)+3)$, 즉 $\mathrm{A}(1,\ 2)$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

답 ③

3 $y=\sqrt[3]{4}\times 2^{x-1}+3$

$=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{x-1}+3$

$=2^{x-\frac{1}{3}}+3$

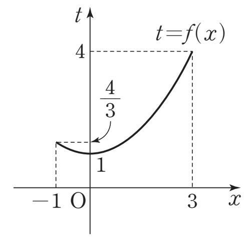
그러므로 함수 $y=\sqrt[3]{4}\times 2^{x-1}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $m=\frac{1}{3}$, $n=3$이므로

$a\times m\times n=2\times\frac{1}{3}\times 3=2$

답 ②

4 함수 $(g\circ f)(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $-1\le x\le 3$일 때, $1\le t\le 4$



따라서 함수 $y=g(t)$는 t의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이므로 $t=1$일 때 최솟값 $\log_2 1=0$을 갖고, $t=4$일 때 최댓값 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$를 갖는다.

그러므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$2+0=2$

답 ②

5 $2^{x-5}<3^{\log_3 16}$에서

$2^{x-5}<16^{\log_3 3}$

$2^{x-5}<2^4$

이때 밑 2가 1보다 크므로

$x-5<4$

$x<9$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, $\cdots$, 8이고 그 개수는 8이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 31~32쪽

1 ①	**2** ④	**3** 5	**4** ②	**5** 8
6 ②	**7** ④	**8** ④		

1 $y=a^x\times\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2a}{5}\right)^x$에서 함수 $y=a^x\times\left(\frac{2}{5}\right)^x$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 만나지 않기 위해서는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값이 커져야 한다.

즉, $\frac{2a}{5}>1$이어야 하므로

$a>\frac{5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $y=\frac{9^x\times a^{2x}}{100^x}=\left\{\left(\frac{3a}{10}\right)^2\right\}^x$에서 함수 $y=\frac{9^x\times a^{2x}}{100^x}$의 그래프도 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 만나기 위해서는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값은 작아져야 한다.

즉, $0<\left(\frac{3a}{10}\right)^2<1$이어야 하므로

$0<\frac{3a}{10}<1$에서

$0<a<\frac{10}{3}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $\frac{5}{2}<a<\frac{10}{3}$이므로 구하는 자연수 a는 3이고 그 개수는 1이다.

답 ①

2 (i) $a>2$일 때

$\mathrm{P}(1,\ a)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$이고 선분 PQ의 중점의 y좌표가 $\frac{7}{4}$이므로

$\frac{a+\frac{1}{2}}{2}=\frac{7}{4}$

$a+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$a=3$

(ii) $0<a<1$, $1<a<2$일 때

$\mathrm{P}(1,\ 2)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{1}{a}\right)$이고 선분 PQ의 중점의 y좌표가 $\frac{7}{4}$이므로

$\frac{2+\frac{1}{a}}{2}=\frac{7}{4}$

$2+\frac{1}{a}=\frac{7}{2}$

$\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$

$a=\frac{2}{3}$

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

답 ④

3 점 $\mathrm{A}\left(2a-\frac{3}{4},\ 2\right)$가 로그함수 $y=\log_a x$ $\left(a>\frac{3}{8},\ a\neq1\right)$의 그래프 위에 있으므로

$2=\log_a\left(2a-\frac{3}{4}\right)$

$a^2=2a-\frac{3}{4}$

$4a^2-8a+3=0$

$(2a-1)(2a-3)=0$

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

한편, 직선 AB의 기울기가 음수이므로 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소해야 한다.

즉, $\frac{3}{8}<a<1$이어야 하므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $10a=5$

답 5

4 함수 $y=-a^{x-1}+2$가 $x=3$에서 함숫값 $\frac{7}{2}(1-a)$를 가지므로

$-a^{3-1}+2=-\frac{7}{2}a+\frac{7}{2}$

$-a^2=-\frac{7}{2}a+\frac{3}{2}$

$2a^2-7a+3=0$

$(2a-1)(a-3)=0$

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=3$ …… ㉠

한편, 함수 $y=-a^{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=-a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 주어진 함수가 $x=3$에서 최댓값을 갖기 위해서는 함수 $y=-a^x$의 그래프는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값은 감소해야 한다.

한편, 함수 $y=-a^x$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=a^x$의 그래프는 x의 값이 커짐에 따라 y의 값도 증가해야 한다.

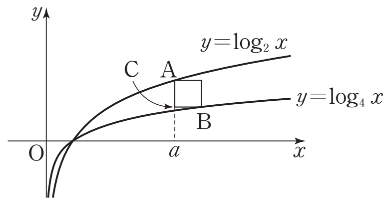
즉, $a>1$이어야 하므로 ㉠에서 $a=3$이고, $x=4$일 때 최솟값 m은

$m=-3^{4-1}+2=-25$

따라서 $a+m=3+(-25)=-22$

답 ②

5 그림과 같이 두 점 A, B를 잡으면 점 A의 좌표가 $(a,\ \log_2 a)$이고 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로 $b=a+1$이고 $\mathrm{B}(a+1,\ \log_4(a+1))$



점 A와 x좌표가 같은 정사각형의 다른 한 꼭짓점을 C라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=1$이므로

$\log_2 a-\log_4 (a+1)=1$

$\log_4 a^2=1+\log_4 (a+1)$

$\log_4 a^2=\log_4 4(a+1)$

$a^2=4a+4$

$a^2-4a-4=0$

$a=2\pm2\sqrt{2}$

이때 $a>1$이므로

$a=2+2\sqrt{2}$

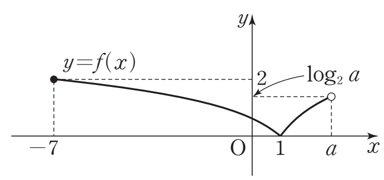
따라서 $(a-2)^2=8$

답 8

6 $y=\log_3 (-x+2)=\log_3 \{-(x-2)\}$이므로

함수 $y=\log_3 (-x+2)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)$가 최댓값을 가지려면

$\log_2 a\le2$이어야 하므로 $a\le4$

따라서 a의 최댓값은 4이다.

답 ②

7 $y=2\log_4 (16x-32)$

$=2\log_{2^2} (16x-32)$

$=\log_2 16(x-2)$

$=\log_2 (x-2)+4$

그러므로 함수 $y=2\log_4 (16x-32)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

한편, 직선 $y=2x-3$의 기울기가 2이므로 점 $\mathrm{A}(a, b)$라 하면

$\mathrm{B}(a+2, b+4)$

그러므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

원점 O와 직선 $y=2x-3$, 즉 $2x-y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0-0-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=3$

답 ④

8 방정식 $\log_2 (x+1)+\log_{\frac{1}{2}} (x+5)=a$ $(x>-1)$의 근이 3이므로

$\log_2 4+\log_{\frac{1}{2}} 8=a$

$\log_2 2^2+\log_{2^{-1}} 2^3=a$

$2-3=a$

$a=-1$

그러므로 주어진 부등식은

$\log_2 (x+1)+\log_{\frac{1}{2}} (x+5)<-1$

이 부등식을 풀면

$\log_2 (x+1)+\log_{2^{-1}} (x+5)<-1$

$\log_2 (x+1)-\log_2 (x+5)<-1$

$\log_2 (x+1)+\log_2 2<\log_2 (x+5)$

$\log_2 2(x+1)<\log_2 (x+5)$

밑 2가 1보다 크므로

$2x+2<x+5$

$x<3$

따라서 자연수 x는 1, 2이고 그 개수는 2이므로

$a=-1$, $b=2$에서

$a+b=(-1)+2=1$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 33~34쪽

1 ⑤ **2** ① **3** ② **4** ② **5** ⑤
6 ④

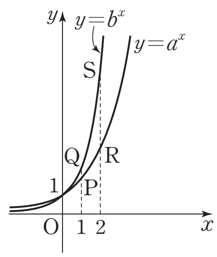
1 네 점 P, Q, R, S의 좌표는

P$(1,\ a)$, Q$(1,\ b)$, R$(2,\ a^2)$, S$(2,\ b^2)$

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OR}}<\overline{\mathrm{OS}}$이므로

$\sqrt{4+a^4}<\sqrt{4+b^4}$, $a^4<b^4$에서 $a<b$

그러므로 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프와 네 점 P, Q, R, S는 그림과 같다.



한편, 조건 (나)에서 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 7이므로

$\frac{1}{2}\times1\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RS}})=7$

$\frac{1}{2}\times\{(b-a)+(b^2-a^2)\}=7$

$(b-a)+(b-a)(b+a)=14$

$(b-a)(b+a+1)=14$

이때 $b-a$, $b+a+1$은 모두 자연수이고 $b-a<b+a+1$이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $b-a=1$, $b+a+1=14$일 때

$b-a=1$, $b+a=13$이므로 연립하여 풀면

$a=6$, $b=7$

(ii) $b-a=2$, $b+a+1=7$일 때

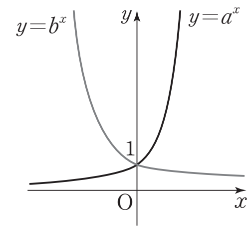
$b-a=2$, $b+a=6$이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

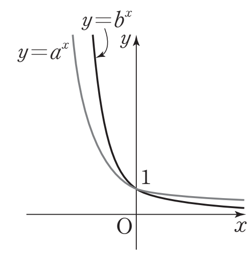
(i), (ii)에서 b의 값은 4 또는 7이므로 b의 최댓값은 7이다.

답 ⑤

(ii) $a>1$일 때, $0<b<1<a$인 경우



(iii) $0<a<1$일 때, $0<b<a<1$인 경우



ㄱ. $a>1$이면 (i), (ii)의 경우와 같으므로

$a>b>1$ 또는 $0<b<1<a$이다. (거짓)

ㄴ. $0<a<1$이면 (iii)의 경우와 같으므로

$0<b<a<1$이다. (참)

ㄷ. $ab<1$이면 $0<a<1$이거나 $0<b<1$이어야 한다.

$0<a<1$일 때, (iii)의 경우와 같으므로

$0<b<a<1$

$0<b<1$일 때, (ii), (iii)의 경우와 같으므로

$0<a<1$ 또는 $a>1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

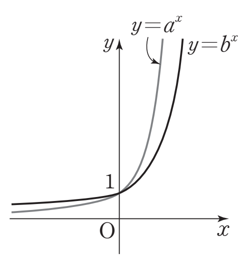
답 ①

참고

ㄷ. [반례] $f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

2 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 경우는 다음과 같다.

(i) $a>1$일 때, $a>b>1$인 경우



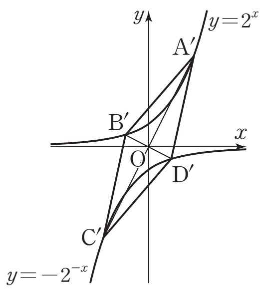
3 함수 $y=2^{x-1}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=-\frac{2}{2^x}+3$에서

$y=-2\times2^{-x}+3=-2^{-(x-1)}+3$이므로

함수 $y=-\frac{2}{2^x}+3$의 그래프는 함수 $y=-2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

한편, 네 점 A, B, C, D를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, C′, D′이라 하면 그림과 같이 두 점 A′, B′은 함수 $y=2^x$의 그래프 위에 있고 두 점 C′, D′은 함수 $y=-2^{-x}$의 그래프 위에 있다.



조건 (가)에서 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 사각형 A′B′C′D′도 평행사변형이다.

또 조건 (나)에서 삼각형 ABD의 무게중심의 x좌표는 $\frac{5}{3}$,

삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는 $\frac{2}{3}$이므로

삼각형 A′B′D′의 무게중심의 x좌표는 $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$,

삼각형 A′B′C′의 무게중심의 x좌표는 $\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

한편, 두 함수 $y=2^x$과 $y=-2^{-x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $A'(m,\ 2^m)$, $B'(-n,\ 2^{-n})$ $(m>0,\ n>0)$으로 놓으면

$C'(-m,\ -2^m)$, $D'(n,\ -2^{-n})$

그러므로 두 삼각형 A′B′D′, A′B′C′의 무게중심의 x좌표는 각각

$\frac{m+(-n)+n}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{m+(-n)+(-m)}{3}=-\frac{1}{3}$

즉, $m=2$, $n=1$

그러므로

$A'(2,\ 4)$, $B'\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$, $C'(-2,\ -4)$, $D'\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$

한편, 두 직선 OA′, OB′의 기울기는 각각 2, $-\frac{1}{2}$이므로 두 직선은 수직이다.

또 선분 B′D′의 중점은 원점이므로 세 점 A′, B′, O를 지나는 원의 중심의 좌표는 선분 A′B′의 중점이다.

이때 선분 A′B′의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+(-1)}{2},\ \frac{4+\frac{1}{2}}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{4}\right)$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}+1,\ \frac{9}{4}+3\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{21}{4}\right)$이므로 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{21}{4}$에서

$\frac{b}{a}=\frac{7}{2}$

답 ②

4 원 C의 지름이 $\overline{AQ}$이므로 $\angle ARQ=90^\circ$

또 직선 AQ의 기울기가 1이므로 직각삼각형 ARQ에서

$\angle QAR=45^\circ$

그러므로 $\overline{AR}=\overline{AQ}\cos 45^\circ=2$에서

$\overline{AQ}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

$\overline{AQ}=2\sqrt{2}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P′이라 하면

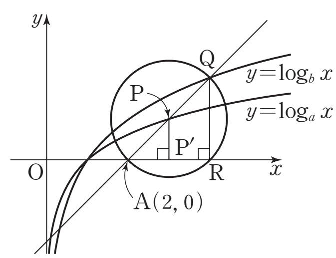
삼각형 PAP′은 $\overline{AP}=\sqrt{2}$이고 $\angle PAP'=45^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AP'}=\overline{PP'}=1$

즉, 점 P의 좌표는 $(3,\ 1)$이므로 $y=\log_a x$에 $x=3$, $y=1$을 대입하면

$1=\log_a 3$

$a=3$



또 $\overline{AR}=\overline{RQ}=2$이므로 점 Q의 좌표는

$(4,\ 2)$

이 점이 함수 $y=\log_b x$의 그래프 위에 있으므로

$2=\log_b 4$

$b^2=4$

이때 $b>1$이므로

$b=2$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=3+2=5$

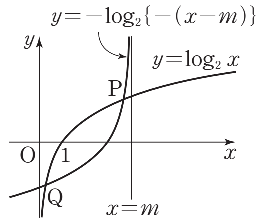
답 ②

5 $y=\log_2 \frac{1}{m-x}$

$=-\log_2 (m-x)$

$=-\log_2 \{-(x-m)\}$

이므로 함수 $y=\log_2 \dfrac{1}{m-x}$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이고 점근선의 방정식은 $x=m$이다.



두 함수 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2 \{-(x-m)\}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{m}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q는 점 $\left(\dfrac{m}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

두 점 P, Q가 중심이 $(2,\ 0)$인 원 위에 있기 위해서는

$\dfrac{m}{2}=2$이어야 하므로

$m=4$

이때 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2 \{-(x-4)\}$의 그래프의 교점의 x좌표는

$\log_2 x=-\log_2 \{-(x-4)\}$에서

$\log_2 x+\log_2 (4-x)=0$

$\log_2 x(4-x)=0$

$x(4-x)=1$

$x^2-4x+1=0$

$x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표의 곱 a는

$a=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

이므로 $m=4$, $a=1$에서

$m+a=4+1=5$

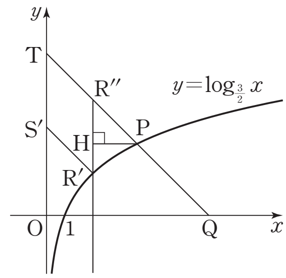
답 ⑤

6 $y=\log_{\frac{2}{3}} x=-\log_{\frac{3}{2}} x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{2}{3}} x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{3}{2}} x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 두 점 R, S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R′, S′이라 하면 점 R′은 곡선 $y=\log_{\frac{3}{2}} x$ 위에 있고 점 S′은 y축 위에 있다.

또 직선 R′S′의 기울기는 -1이므로 직선 PQ와 평행하고

$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{R'S'}}$ ⋯⋯ ㉠



이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점을 T라 하면 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 직각삼각형 OQT에서

$\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{QT}}$ ⋯⋯ ㉡

또 점 R′을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 R″이라 하면

$\overline{\mathrm{S'R'}}=\overline{\mathrm{TR''}}$ ⋯⋯ ㉢

조건 (가)에서

$\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RS}}+\sqrt{2}$이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$\overline{\mathrm{TQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{TR''}}+\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{TQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{TR''}}=\sqrt{2}$

즉, $\overline{\mathrm{R''P}}=\sqrt{2}$

점 P에서 선분 R″R′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{HPR''}=45°$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=1$

그러므로 점 R′의 x좌표를 a라 하면 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

한편, 조건 (나)에서 두 점 P와 R의 y좌표의 합이 1이므로

$\log_{\frac{3}{2}} (a+1)-\log_{\frac{3}{2}} a=1$

$\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{a+1}{a}=1$

$\dfrac{a+1}{a}=\dfrac{3}{2}$

$a=2$

따라서 점 P의 x좌표는

$a+1=3$

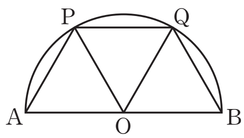
답 ④

03 삼각함수

유제 본문 37~45쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ①
6 ①	7 ④	8 ①	9 ②	10 ⑤

1 선분 AB의 중점을 O라 하면 호 AB를 삼등분하는 점이 P, Q이므로



$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POQ}$

$\quad=\angle\mathrm{QOB}$

$\quad=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{OA}}=r$라 하면 호 AQ의 길이가 8π이고

$\angle\mathrm{AOQ}=2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$r\times\dfrac{2}{3}\pi=8\pi$

$r=12$

삼각형 AOP에서

$\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$이므로

삼각형 AOP는 정삼각형이다.

삼각형 AOP의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times12\times12=36\sqrt{3}$

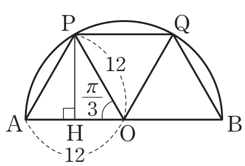
따라서 두 삼각형 POQ, QOB도 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로 사각형 PABQ의 넓이는

$3\times$(삼각형 AOP의 넓이)$=3\times36\sqrt{3}=108\sqrt{3}$

답 ④

참고

점 P에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\dfrac{\pi}{3}$이므로

정삼각형 AOP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\dfrac{\pi}{3}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{\mathrm{OP}}^2$

2 동경 OB가 나타내는 각의 크기는

$\dfrac{13}{6}\pi-\dfrac{7}{18}\pi=\dfrac{32}{18}\pi=\dfrac{16}{9}\pi$

이므로 선분 AB를 포함하는 부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\theta=2\pi-\dfrac{16}{9}\pi=\dfrac{2}{9}\pi$

따라서 선분 AB를 포함하는 부채꼴 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{2}{9}\pi=\pi$

답 ③

3 $\cos\theta\times\left(\dfrac{1}{1-\sin\theta}-\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)$

$=\cos\theta\times\dfrac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\cos\theta\times\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}<0$

이때 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}>0$이므로

$\sin\theta<0$

그러므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\quad=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}$

$\quad=-\dfrac{4}{5}$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

답 ②

4 $y=x$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$2x^2=1$

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

점 P는 제 3사분면에 있으므로

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

답 ①

5 함수 $y=-2\cos(ax+b)+b$의 주기가 6π이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=6\pi$

이때 $a>0$이므로

$a=\frac{1}{3}$

한편, 함수 $y=-2\cos\left(\frac{1}{3}x+b\right)+b$의 최댓값이 5이므로

$2+b=5$

$b=3$

따라서 $ab=\frac{1}{3}\times3=1$

답 ①

6 함수 $y=\tan(ax+b)=\tan\left\{a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right\}$이므로

함수 $y=\tan(ax+b)$의 그래프는 함수 $y=\tan ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\tan(ax+b)$의 주기가 2π이므로

$\frac{\pi}{|a|}=2\pi$

이때 $a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

한편, $0<b<\pi$이고 $-\frac{b}{a}=-2b$이므로

$-2\pi<-2b<0$

그러므로 $-2b=-\frac{3}{2}\pi$에서

$b=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi$

답 ①

7 $\tan(\pi-\theta)=\frac{4}{3}$에서

$-\tan\theta=\frac{4}{3}$

$\tan\theta=-\frac{4}{3}$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$에서

$4\cos\theta=-3\sin\theta$

$\cos\theta=-\frac{3}{4}\sin\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(-\frac{3}{4}\sin\theta\right)^2=1$

$\sin^2\theta+\frac{9}{16}\sin^2\theta=1$

$\frac{25}{16}\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{16}{25}$

이때 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$

㉠에서

$\cos\theta=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$

답 ④

8 $\cos(\pi+\theta)-\cos(2\pi-\theta)=\frac{4}{3}$에서

$-\cos\theta-\cos\theta=\frac{4}{3}$

$-2\cos\theta=\frac{4}{3}$

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

이때

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=1-\cos^2\theta\\&=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\\&=1-\frac{4}{9}\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ 또는 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

한편, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)<0$에서

$-\sin\theta<0$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\tan(2\pi-\theta)$

$=\cos\theta\times(-\tan\theta)$

$=\cos\theta\times\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$=-\sin\theta$

$=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 ①

9 $\cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x-1<0$에서

$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+3\cos x-1<0$

$2\cos^2 x+3\cos x-2<0$

$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$

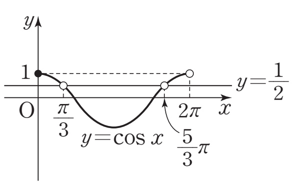
$-2<\cos x<\frac{1}{2}$

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$-1\le\cos x<\frac{1}{2}$

이 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$



따라서 $\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{4}{3}\pi$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ②

10 방정식 $\sin x\tan x=\cos x$에서

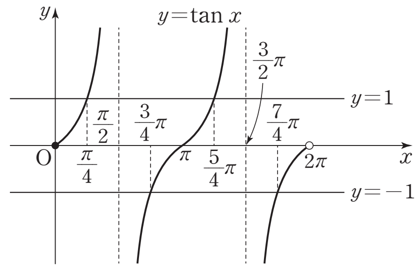
$\cos x\ne 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면

$\frac{\sin x}{\cos x}\times\tan x=1$

이때 $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$이므로

$\tan^2 x=1$

$\tan x=-1$ 또는 $\tan x=1$



$0\le x<2\pi$이고 $\cos x\ne 0$일 때, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이고, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이다.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=4\pi$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 46~47쪽

1 ②	2 ④	3 ①	4 ④	5 ③
6 ⑤	7 ④	8 ⑤		

1 호 AB의 길이가 호 AP의 길이의 2배이므로

$\angle AOB=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

삼각형 AOB는 직각삼각형이므로

$\overline{OA}=r$라 하면

삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r^2=2$

$r^2=4$

$r=2$

따라서 선분 AP를 포함하는 부채꼴 AOP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

답 ②

2 점 P$(-5,\ 12)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}=\frac{7}{13}$

답 ④

3 $x^2-3\pi x+2\pi^2<0$에서

$(x-\pi)(x-2\pi)<0$

$\pi<x<2\pi$

$\cos x=\frac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\sin^2 x&=1-\cos^2 x\\&=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\\&=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$\pi<x<2\pi$에서 $\sin x<0$이므로

$\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

따라서 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$

답 ①

4 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$에서

$a=2$, $c=1$

주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$

이때 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$

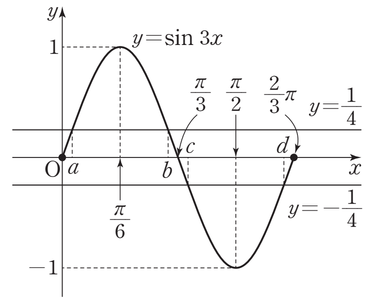
$b=4$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=1$이므로

$abc=2\times4\times1=8$

답 ④

5 그림과 같이 함수 $y=\sin 3x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{4}$과 만나는 두 점은 직선 $x=\frac{\pi}{6}$에 대하여 서로 대칭이므로



$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{6}$에서

$a+b=\frac{\pi}{3}$

마찬가지로 함수 $y=\sin 3x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{4}$과 만나는 두 점은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 서로 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{\pi}{2}$에서

$c+d=\pi$

따라서 $a+b+c+d=\frac{\pi}{3}+\pi$이므로

$$\begin{aligned}\cos(a+b+c+d)&=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

6
$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)&=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\&=\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)&=\tan^2\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

답 ⑤

7 $\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7}{5}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6}{5}\pi\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\cos^2\frac{7}{5}\pi+\cos^2\frac{6}{5}\pi$

$=\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\cos^2\left(\pi+\frac{2}{5}\pi\right)+\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\cos^2\frac{2}{5}\pi+\cos^2\frac{\pi}{5}$

$=\sin^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\cos^2\frac{2}{5}\pi$

$=1+1$

$=2$

답 ④

8 x에 대한 이차방정식 $4x^2-(4\sin\theta)x+\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D=0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=4\sin^2\theta-4(\cos\theta+1)=0$이므로

이 식에 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$를 대입하면

$4(1-\cos^2\theta)-4(\cos\theta+1)=0$

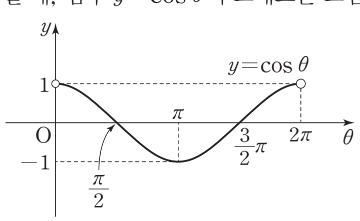
$4-4\cos^2\theta-4\cos\theta-4=0$

$4\cos^2\theta+4\cos\theta=0$

$4\cos\theta(\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta=0$ 또는 $\cos\theta=-1$

$0<\theta<2\pi$일 때, 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $\cos\theta=0$일 때

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

(ii) $\cos\theta=-1$일 때

$\theta=\pi$

따라서 서로 다른 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\pi=3\pi$

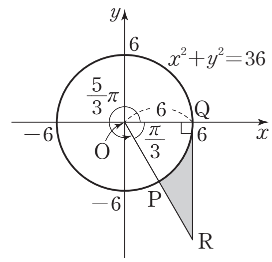
답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 48~50쪽

1 ③	2 ⑤	3 ①	4 ①	5 ④
6 9	7 31	8 30	9 ③	10 3
11 ②	12 ①			

1 직각삼각형 ORQ에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=6$



동경 OP가 각 $\frac{5}{3}\pi$를 나타내므로

$\angle\mathrm{ROQ}=\frac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{OQ}}\times\tan\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$

삼각형 ORQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

따라서 호 PQ와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 색칠한 도형의 넓이는 $18\sqrt{3}-6\pi$이다.

답 ③

2 조건 (가)에서 $7\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

즉, $\theta=\frac{n}{3}\pi$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로

$0<\frac{n}{3}\pi<2\pi$

$0<n<6$

n은 정수이므로

$n=1, 2, 3, 4, 5$

조건 (나)에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

$n=5$

따라서 $\theta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\sin(\theta-\pi)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$

$=-\sin(\pi-\theta)-\sin\theta$

$=-\sin\theta-\sin\theta$

$=-2\sin\theta$

$=-2\sin\frac{5}{3}\pi$

$=-2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\sqrt{3}$

답 ⑤

3 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\times\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2+2\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=-6$

$\sin\theta>0$이므로

$\frac{2}{\cos\theta}=-6$

$\cos\theta=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$\sin\theta\times\tan\theta=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}$

$=-\frac{8}{3}$

답 ①

4 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\tan^2\theta-8\tan\theta+1=0$에서

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-8\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1=0$

양변에 $\cos^2\theta$를 곱하면

$\sin^2\theta-8\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1-8\sin\theta\cos\theta=0$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

한편,

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{8}$

$=\frac{5}{4}$

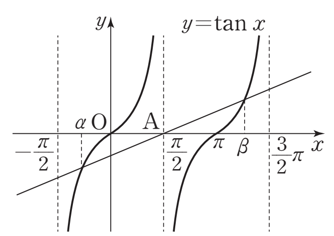
$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 ①

5 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나고 기울기가 양수인 직선과 함수 $y=\tan x$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\tan x$의 그래프는 주기가 π이므로

$\beta-\pi=0-\alpha$에서

$\alpha+\beta=\pi$

한편, $\beta-2\alpha=2\pi$이므로

$\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$

따라서

$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{8}{3}\pi\right)$

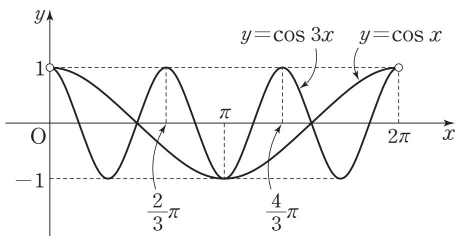
$=\tan\frac{7}{3}\pi$

$=\tan\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}$

답 ④

6 두 함수 $y=\cos x$와 $y=\cos 3x$의 주기가 각각 2π, $\frac{2}{3}\pi$이므로 $0<x<2\pi$에서 두 함수 $y=\cos x$와 $y=\cos 3x$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

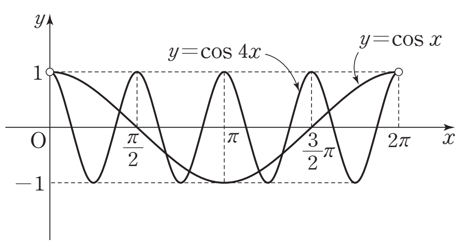


[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선의 교점의 개수가 3이므로

$a=3$

두 함수 $y=\cos x$와 $y=\cos 4x$의 주기가 각각 2π, $\frac{\pi}{2}$이므로 $0<x<2\pi$에서 두 함수 $y=\cos x$와 $y=\cos 4x$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선의 교점의 개수가 6이므로

$b=6$

따라서 $a+b=3+6=9$

답 9

7 함수 $y=2\sin\pi(x+a)-1$의 그래프의 주기가

$\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$c=2$

$\frac{b+c}{2}=\frac{5}{3}$이므로

$\frac{b+2}{2}=\frac{5}{3}$

$b=\frac{4}{3}$

함수 $y=2\sin\pi(x+a)-1$에 $x=0$을 대입하면

$2\sin a\pi-1=0$

$\sin a\pi=\frac{1}{2}$

$0<a<1$이므로

$0<a\pi<\pi$

$a=\frac{1}{6}$ 또는 $a=\frac{5}{6}$

(i) $a=\frac{1}{6}$일 때

함수 $y=2\sin\pi\left(x+\frac{1}{6}\right)-1$에 $x=\frac{5}{3}$를 대입하면

$$2\sin\pi\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)-1=2\sin\frac{11}{6}\pi-1$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=-2$$

이므로 그래프를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{5}{6}$일 때

함수 $y=2\sin\pi\left(x+\frac{5}{6}\right)-1$에 $x=\frac{5}{3}$를 대입하면

$$2\sin\pi\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{6}\right)-1=2\sin\frac{5}{2}\pi-1$$
$$=1$$

이므로 그래프를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{5}{6}$

따라서 $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=2$이므로

$a+b+c=\frac{5}{6}+\frac{4}{3}+2=\frac{25}{6}$

즉, $p=6$, $q=25$이므로

$p+q=6+25=31$

답 31

참고

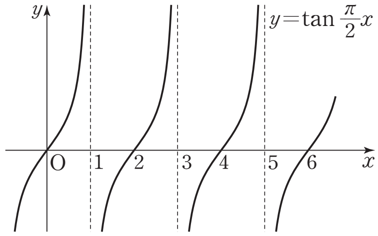
$\frac{b+c}{2}=\frac{5}{3}$이므로 $b+c=\frac{10}{3}$

따라서 $a=\frac{5}{6}$, $b+c=\frac{10}{3}$이므로

$a+b+c=\frac{5}{6}+\frac{10}{3}=\frac{25}{6}$

8 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이므로

함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $\tan\frac{\pi}{2}x=a$의 해는 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표이고, 방정식 $\tan\frac{\pi}{2}x=a$는 정수인 해를 가지므로

$a=0$

따라서 방정식 $\tan\frac{\pi}{2}x=a$의 10 이하의 모든 자연수인 해는 2, 4, 6, 8, 10이므로 그 합은

$2+4+6+8+10=30$

답 30

9 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{6}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{6}\le\pi$이므로

$0\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le1$

따라서 함수 $g(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$의 최댓값은 4, 최솟값은 1이다.

즉, $1\le g(x)\le4$이므로

$g(x)=t$라 하면 $1\le t\le4$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\log_2 t+1$

$\log_2 1\le\log_2 t\le\log_2 4$

$0\le\log_2 t\le2$

$1\le\log_2 t+1\le3$

$1\le(f\circ g)(x)\le3$

따라서 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$3+1=4$

답 ③

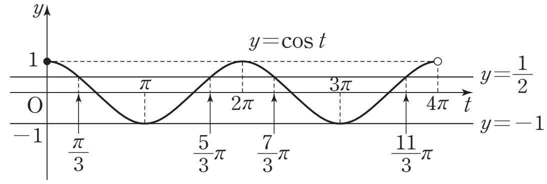
10 $\left|\cos 2x+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$에서

$2x=t\ (0\le t<4\pi)$라 하면

$\left|\cos t+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$

$\cos t+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 또는 $\cos t+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$

즉, $\cos t=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos t=-1$



(i) $\cos t=\frac{1}{2}$일 때

함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 서로 다른 네 점의 t좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{11}{3}\pi$이다.

이때 $t=2x$이므로 방정식 $\cos 2x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 서로 다른 x의 값은

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이고, 그 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=4\pi$

(ii) $\cos t=-1$일 때

함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 서로 다른 두 점의 t좌표는 π, 3π이다.

이때 $t=2x$이므로

방정식 $\cos 2x=-1$을 만족시키는 서로 다른 x의 값은

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이고, 그 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$

(i), (ii)에서 x의 최댓값은 $\frac{11}{6}\pi$, 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$이고,

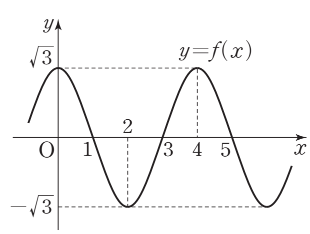
서로 다른 모든 x의 값의 합은 $4\pi+2\pi=6\pi$이므로

$a=\frac{11}{6}\pi$, $b=\frac{\pi}{6}$, $c=6\pi$

따라서 $\frac{c}{a+b}=\frac{6\pi}{\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{6}}=\frac{6\pi}{2\pi}=3$

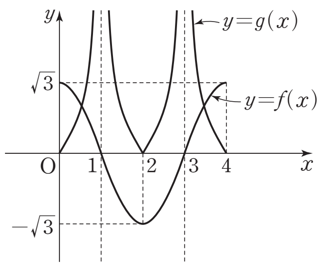
답 3

11 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$는 최솟값과 최댓값이 각각 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이고, 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

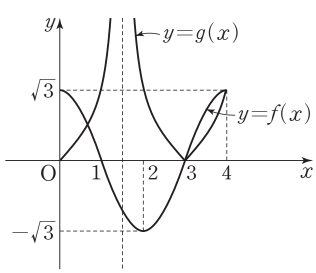


함수 $y=\tan\frac{\pi}{n}x$는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{n}}=n$이고, 점근선의 방정식이 $x=\frac{n}{2}+nm$ (m은 정수)이다.

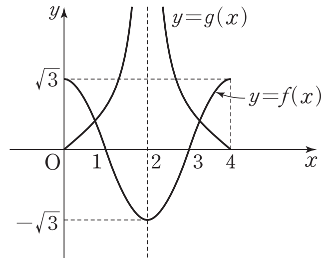
(i) $n=2$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$는 주기가 2이고,
점근선의 방정식이 $x=1+2m$ (m은 정수)이므로
$0\le x\le 4$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$,
$g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



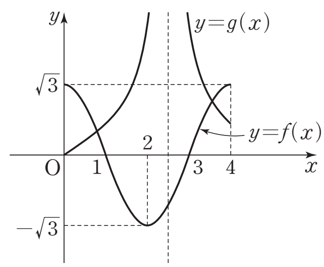
(ii) $n=3$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi}{3}x$는 주기가 3이고,
점근선의 방정식이 $x=\frac{3}{2}+3m$ (m은 정수)이다.
또한 함수 $y=\tan\frac{\pi}{3}x$의 그래프는 점 $(4,\ \sqrt{3})$을 지나므로 $0\le x\le 4$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$,
$g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{3}x\right|$의 그래프가 만나는 점의 개수는 3이다.



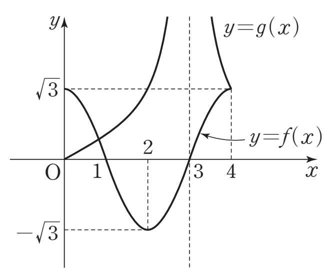
(iii) $n=4$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi}{4}x$는 주기가 4이고,
점근선의 방정식이 $x=2+4m$ (m은 정수)이므로
$0\le x\le 4$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$,
$g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{4}x\right|$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



(iv) $n=5$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi}{5}x$는 주기가 5이고,
점근선의 방정식이 $x=\frac{5}{2}+5m$ (m은 정수)이다.
또한 $\frac{4}{5}\pi>\frac{2}{3}\pi$이므로 $\tan\frac{4}{5}\pi>\tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$
즉, $\left|\tan\frac{4}{5}\pi\right|<\sqrt{3}$
그러므로 $0\le x\le 4$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$,
$g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{5}x\right|$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



(v) $n=6$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi}{6}x$는 주기가 6이고,
점근선의 방정식이 $x=3+6m$ (m은 정수)이다.
또한 함수 $y=\tan\frac{\pi}{6}x$의 그래프는 점 $(4,\ -\sqrt{3})$을 지나므로 $0\le x\le 4$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$,
$g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{6}x\right|$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



따라서 (i)~(v)에서 조건을 만족시키는 n의 값은 3이다.

답 ②

12 $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

부등식 $\sin^2 x-4\sin x+7-k\ge 0$에서

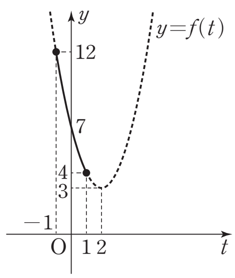
$t^2-4t+7-k\ge 0$

$(t-2)^2+3-k\ge 0$

$(t-2)^2+3\ge k$

$f(t)=(t-2)^2+3$이라 하면 $-1\le t\le 1$일 때 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 $f(1)=4$를 갖는다.

즉, 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프가 직선 $y=k$의 위쪽에 있거나 직선 $y=k$가 점 $(1, 4)$를 지나야 한다.



따라서 $k\le 4$이므로 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 3　**2** ⑤　**3** ③

1 함수 $y=2\cos \pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고,

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(\alpha, m)$, $B(\beta, m)$이다.

직선 OA의 기울기가 직선 OB의 기울기의 7배이므로

$\dfrac{m}{\alpha}=7\times\dfrac{m}{\beta}$

$0<m<2$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{7}{\beta}$

$\beta=7\alpha$

함수 $y=2\cos \pi x$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$

$\dfrac{\alpha+7\alpha}{2}=1$

$4\alpha=1$

즉, $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{7}{4}$

선분 AB의 길이가 n이므로

$n=\beta-\alpha=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

한편, 점 $A\left(\dfrac{1}{4}, m\right)$은 함수 $y=2\cos \pi x$의 그래프 위의 점이므로

$m=2\cos\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

따라서 $m^2\times n=(\sqrt{2})^2\times\dfrac{3}{2}=3$

답 3

2 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$y=-\cos^2 x-2a\sin x+a+4$

$=-(1-\sin^2 x)-2a\sin x+a+4$

$=\sin^2 x-2a\sin x+a+3$

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le \sin x\le 1$이므로

$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

$y=t^2-2at+a+3$

$=(t-a)^2-a^2+a+3$

함수 $y=t^2-2at+a+3$의 최솟값 $f(a)$와 방정식 $3f(a)-a+4=0$의 실근은 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $a\le -1$일 때

함수 $y=t^2-2at+a+3$은 $t=-1$일 때 최소이므로

$f(a)=3a+4$

$3f(a)-a+4=0$에서

$3(3a+4)-a+4=0$

$8a+16=0$

$a=-2$

$a\le -1$이므로 $a=-2$

(ii) $-1<a<1$일 때

함수 $y=t^2-2at+a+3=(t-a)^2-a^2+a+3$은 $t=a$일 때 최소이므로

$f(a)=-a^2+a+3$

$3f(a)-a+4=0$에서

$3(-a^2+a+3)-a+4=0$

$-3a^2+2a+13=0$

$g(a)=-3a^2+2a+13$이라 하면

$g(a)=-3a^2+2a+13=-3\left(a-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{40}{3}$

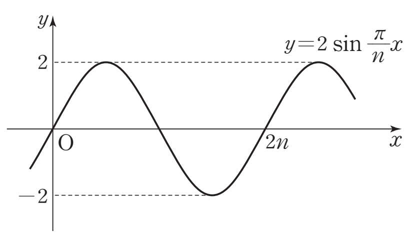
$g(-1)=8>0$, $g(1)=12>0$이므로
$-1<a<1$에서 $g(a)=0$이 되는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a\geq1$일 때
함수 $y=t^2-2at+a+3$은 $t=1$일 때 최소이므로
$f(a)=-a+4$
$3f(a)-a+4=0$에서
$3(-a+4)-a+4=0$
$-4a+16=0$
$a=4$
$a\geq1$이므로 $a=4$

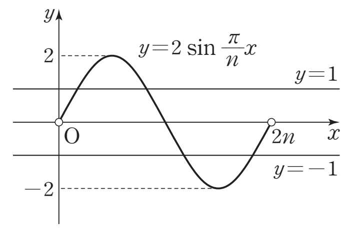
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은
-2, 4이므로 그 합은
$-2+4=2$

답 ⑤

3 $g(x)=t$라 하면
$t=2\sin\frac{\pi}{n}x$, $-2\leq t\leq2$
한편, 방정식 $(f\circ g)(x)=1$에서
$f(g(x))=1$
$f(t)=1$
$\cos 2\pi t=1$
$2\pi t=2k\pi$ (k는 정수)
$-2\leq t\leq2$이므로
$t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$
한편, 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{n}x$는 최솟값과 최댓값이 각각 -2, 2이고 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{n}}=2n$이므로 그래프는 그림과 같다.



방정식 $t=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 $0<x<2n$에서 t의 값에 따라 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.



(i) $2\sin\frac{\pi}{n}x=-2$일 때,
서로 다른 실근의 개수는 1

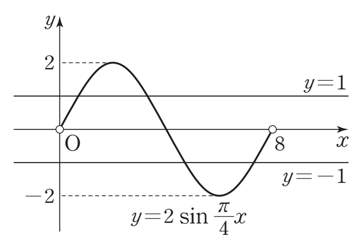
(ii) $2\sin\frac{\pi}{n}x=-1$일 때,
서로 다른 실근의 개수는 2

(iii) $2\sin\frac{\pi}{n}x=0$일 때,
서로 다른 실근의 개수는 1

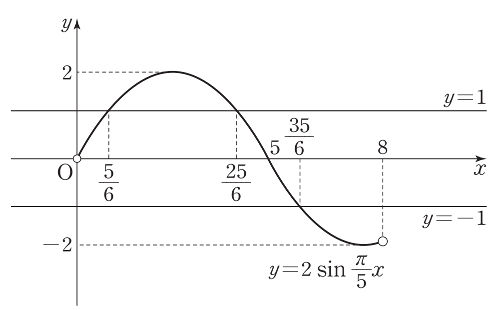
(iv) $2\sin\frac{\pi}{n}x=1$일 때,
서로 다른 실근의 개수는 2

(v) $2\sin\frac{\pi}{n}x=2$일 때,
서로 다른 실근의 개수는 1

따라서 $0<x<2n$에서 $t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$일 때 방정식 $t=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는 7이므로 $n=4$일 때 $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

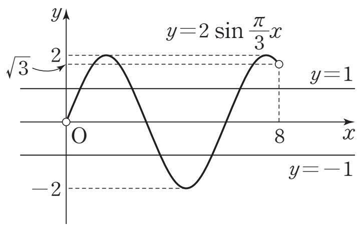


$n=5$이면 $\frac{3}{2}\pi<\frac{8}{5}\pi$이므로 $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.



따라서 $n\le 3$인 경우를 확인한다.
$0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 자연수 n $(n\le 3)$의 값에 따라 다음과 같다.

ⓐ $n=3$일 때,



방정식 $2\sin\frac{\pi}{3}x=-2$의 서로 다른 실근의 개수는 1

방정식 $2\sin\frac{\pi}{3}x=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2

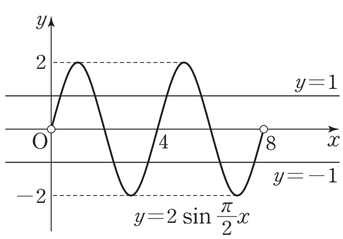
방정식 $2\sin\frac{\pi}{3}x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2

방정식 $2\sin\frac{\pi}{3}x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3

방정식 $2\sin\frac{\pi}{3}x=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 10이다.

ⓑ $n=2$일 때,



방정식 $2\sin\frac{\pi}{2}x=-2$의 서로 다른 실근의 개수는 2

방정식 $2\sin\frac{\pi}{2}x=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 4

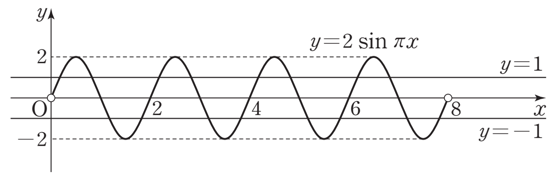
방정식 $2\sin\frac{\pi}{2}x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3

방정식 $2\sin\frac{\pi}{2}x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 4

방정식 $2\sin\frac{\pi}{2}x=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 15이다.

ⓒ $n=1$일 때,



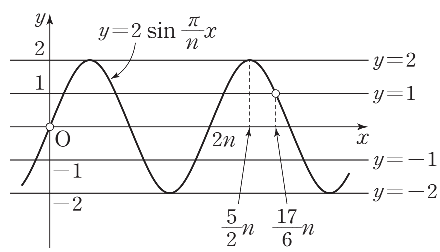
방정식 $2\sin\pi x=-2$의 서로 다른 실근의 개수는 4
방정식 $2\sin\pi x=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 8
방정식 $2\sin\pi x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 7
방정식 $2\sin\pi x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 8
방정식 $2\sin\pi x=2$의 서로 다른 실근의 개수는 4
따라서 $0<x<8$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 31이다.

따라서 ⓐ, ⓑ, ⓒ에 의하여 구하는 n의 값은 3이다.

답 ③

참고

함수 $y=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 그래프와 직선 $y=t$ $(t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)$는 그림과 같다.



방정식 $t=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{n}x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이다. 그러므로 $0<x<8$에서 서로 다른 실근의 개수가 10이기 위한 n의 범위를 구하면

$\frac{5}{2}n<8\le\frac{17}{6}n$에서

$\frac{48}{17}\le n<\frac{16}{5}$

따라서 자연수 n의 값은 3이다.

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 55~61쪽

1 ④	2 ①	3 7	4 45	5 8
6 ②	7 ③	8 8		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times1=2$

$\overline{BC}=2\sin A$, $\overline{CA}=2\sin B$, $\overline{AB}=2\sin C$이므로

$\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=2\sin A+2\sin B+2\sin C$

$=2(\sin A+\sin B+\sin C)$

$=4$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 4이다.

답 ④

2 $4\cos^2 A-5\sin A+2=0$에서

$\cos^2 A=1-\sin^2 A$이므로

$4(1-\sin^2 A)-5\sin A+2=0$

$4\sin^2 A+5\sin A-6=0$

$(\sin A+2)(4\sin A-3)=0$

$\sin A=-2$ 또는 $\sin A=\dfrac{3}{4}$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\dfrac{3}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$A+B+C=\pi$이므로

$B+C=\pi-A$

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$B=C$에서

$B=C=\dfrac{\pi-A}{2}$

점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로

$\angle AOB=2C=2\times\dfrac{\pi-A}{2}=\pi-A$

삼각형 OAB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle AOB)}=2R$

㉠에서

$\sin(\angle AOB)=\sin(\pi-A)=\sin A=\dfrac{3}{4}$이므로

$\dfrac{3}{\frac{3}{4}}=2R$

$2R=4$

$R=2$

따라서 삼각형 OAB의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

답 ①

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

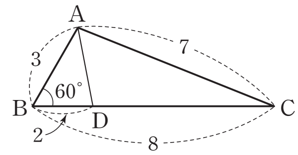
$7^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos B$

$\cos B=\dfrac{1}{2}$

이므로 $\angle B=60^\circ$

이때 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점이 D이므로

$\overline{BD}=2$



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos 60^\circ$

$=13-6$

$=7$

답 7

4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.

사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$에서

$\dfrac{a}{2R}:\dfrac{b}{2R}:\dfrac{c}{2R}=3:5:7$

즉, $a:b:c=3:5:7$

양수 k에 대하여 $a=3k$, $b=5k$, $c=7k$라 하면

코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$(7k)^2=(3k)^2+(5k)^2-2\times3k\times5k\times\cos C$

$k^2>0$이므로 양변을 k^2으로 나누면

$49=9+25-30\cos C$

$\cos C=-\frac{1}{2}$

이므로 $\angle \mathrm{C}=120^\circ$

$\sin C=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{c}{\sin C}=2\times 7\sqrt{3}$

$c=14\sqrt{3}\times \sin C$

$=14\sqrt{3}\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$=21$

$c=7k=21$이므로

$k=3$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$a+b+c=3k+5k+7k=15k=15\times 3=45$

답 45

5 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

조건 (가)에서 $b\cos C=c\cos B$이므로

$b\times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$b^2=c^2$

$b>0$, $c>0$이므로

$b=c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\cos^2(A+B)=\cos^2 A+\sin^2 B$이고

$A+B+C=\pi$이므로

$A+B=\pi-C$

$\cos^2(\pi-C)=\cos^2 A+\sin^2 B$

$\cos^2 C=\cos^2 A+\sin^2 B$

$1-\sin^2 C=(1-\sin^2 A)+\sin^2 B$

$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$a^2=b^2+c^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{A}=90^\circ$이고 $b=c$인 직각이등변삼각형이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

답 8

6 조건 (가)에서

$\sin A+\sin B\cos(A+B)=0$

$\sin A+\sin B\cos(\pi-C)=0$

$\sin A-\sin B\cos C=0$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이고,

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로

$\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}\times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$

양변에 $4aR$를 곱하면

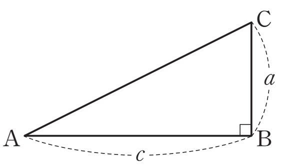
$2a^2-(a^2+b^2-c^2)=0$

$a^2-b^2+c^2=0$

$b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형이고, 조건 (나)에서 $2\sin A=\sin C$이므로

$2\times \frac{a}{2R}=\frac{c}{2R}$



즉, $2a=c$이므로

$\tan A=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

답 ②

7 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $\cos C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{1}{3}=4$

답 ③

8 세 선분 AB, BC, CA가 삼각형의 세 변이므로

$\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CA}>\sqrt{5}$에서

$\sqrt{5}<\overline{CA}<3$

$\angle ABC=\theta$라 하면

$\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$에서

$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\cos\theta=-\frac{3}{4}$ 또는 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

둔각삼각형 ABC에서 $\overline{CA}>\sqrt{5}$이므로 $\cos\theta<0$

즉, $\cos\theta=-\frac{3}{4}$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CA}^2&=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta\\&=5-4\times\cos\theta\\&=5-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)\\&=8\end{aligned}$$

답 8

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

1 ①	2 ②	3 ②	4 ①	5 ③
6 7	7 5	8 108		

1 삼각형 ABC에서

$C=180^\circ-(100^\circ+35^\circ)=45^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$이므로 $\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

$4\sqrt{2}=2R$

따라서 $R=2\sqrt{2}$

답 ①

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{2R}$, $\sin B=\frac{\overline{CA}}{2R}$, $\sin C=\frac{\overline{AB}}{2R}$

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{\overline{BC}}{2R}:\frac{\overline{CA}}{2R}:\frac{\overline{AB}}{2R}\\&=\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

양수 k에 대하여

$2\sin A=2\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\sin C=k$라 하면

$\sin A=\frac{k}{2}$, $\sin B=\frac{k}{2\sqrt{3}}$, $\sin C=\frac{k}{\sqrt{3}}$이므로

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{k}{2}:\frac{k}{2\sqrt{3}}:\frac{k}{\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{2}:\frac{1}{2\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=\sqrt{3}:1:2\qquad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=\sqrt{3}:1:2$이므로

$\angle BCA=90^\circ$, $\angle CAB=60^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$

따라서 $\cos A=\cos(\angle CAB)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

답 ②

참고

$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=\sqrt{3}:1:2$이므로

양수 s에 대하여

$\overline{BC}=\sqrt{3}s$, $\overline{CA}=s$, $\overline{AB}=2s$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$(\sqrt{3}s)^2=(2s)^2+s^2-2\times2s\times s\times\cos A$

$3s^2=5s^2-4s^2\cos A$

따라서 $\cos A=\frac{1}{2}$

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ\\&=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$

이므로

$\overline{BC}=\sqrt{7}$

이때 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2R$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R,\ R=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

따라서 원 O의 넓이는 $\frac{7}{3}\pi$이다.

답 ②

4 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=x$라 하면
코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos 30^\circ$이므로

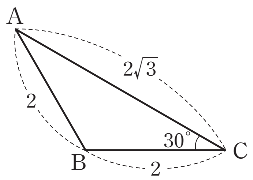
$$2^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times 2\sqrt{3}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

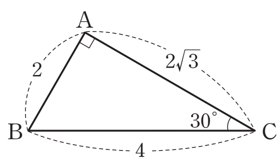
$x=2$ 또는 $x=4$

(i) $x=2$일 때
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.



즉, $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}=30^\circ$, $\angle\mathrm{B}=120^\circ$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $x=4$일 때
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형이다.



이는 삼각형 ABC가 둔각삼각형이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 선분 BC의 길이는 2이다.

답 ①

다른 풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C},\ \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

$B=60^\circ$이면 $A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$가 되어 둔각삼각형이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $B=120^\circ$이고,

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$이므로

삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=2$

5 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면
코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle\mathrm{CAB})$

$(2\sqrt{3})^2=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos 60^\circ$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x>0$이므로 $x=4$

즉, $\overline{\mathrm{AC}}=4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{CAB})$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\sqrt{3}$$

답 ③

6 양수 k에 대하여
$\sin(\angle\mathrm{DAB})=4k$, $\sin(\angle\mathrm{CAD})=k$, $\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin(\angle\mathrm{DAB})$$

$$=\frac{1}{2}\times x\times 7\times 4k$$

$$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{CAD})$$

$$=\frac{1}{2}\times x\times 4\times k$$

이므로

$$\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{2}\times x\times 7\times 4k}{\frac{1}{2}\times x\times 4\times k}=7$$

답 7

7 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2$

$\overline{AB}=2\sin C$, $\overline{BC}=2\sin A$, $\overline{CA}=2\sin B$

이고 조건 (가)에서 $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=6$이므로

$2\sin C\times 2\sin A\times 2\sin B=6$

$\sin A\times\sin B\times\sin C=\frac{3}{4}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times 2\sin A\times 2\sin B\times\sin C$

$=2\times\sin A\times\sin B\times\sin C$

$=2\times\frac{3}{4}$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

답 5

다른 풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2$

즉, $\sin C=\frac{\overline{AB}}{2}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{4}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}$

$=\frac{1}{4}\times 6$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

8 $\overline{AB}=x$라 하면 마름모 ABCD의 넓이는

$2\times\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin(\angle DAB)=x^2\times\sin 30^\circ$

$=\frac{x^2}{2}$

$=18$

$x^2=36$이고 $x>0$이므로

$x=6$

$\angle DAB=30^\circ$이므로 $\angle ABC=150^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=6^2+6^2-2\times 6\times 6\times\cos 150^\circ$

$=6^2+6^2-2\times 6\times 6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=72+36\sqrt{3}$

따라서 $m=72$, $n=36$이므로

$m+n=72+36=108$

답 108

Level 2 기본 연습 본문 64~66쪽

1 ②	2 ②	3 20	4 ③	5 550
6 ②	7 ③	8 ④	9 ②	

1 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle CAB=120^\circ$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=30^\circ$

$\overline{BP}=x\left(0<x<\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$이라 하면 삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CP}^2=x^2+4^2-2\times x\times 4\times\cos 30^\circ$

$=x^2+16-4\sqrt{3}x$

이므로

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=x^2+(x^2+16-4\sqrt{3}x)$

$=2x^2-4\sqrt{3}x+16$

$=2(x-\sqrt{3})^2+10$

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $x=\sqrt{3}$일 때, 최솟값 10을 갖는다.

즉, $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $\overline{BP}=\sqrt{3}$, $\overline{CP}=\sqrt{7}$일 때 최솟값을 가지므로 삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\cos(\angle CPB)$

따라서 $\cos(\angle CPB)=\frac{-6}{2\sqrt{21}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$

답 ②

2 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ABC=\theta$라 하면

$\angle ADC=\pi-\theta$

$\cos(\angle ADC)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

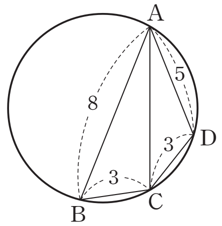
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

$=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times\cos\theta$

$=73-48\cos\theta$ …… ㉠

같은 방법으로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos(\angle ADC)$

$=34-30\cos(\angle ADC)$

$=34+30\cos\theta$ ...... ㉡

㉠−㉡에서

$0=39-78\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=60^\circ$

㉡에서

$\overline{AC}^2=34+30\times\frac{1}{2}=49$

$\overline{AC}=7$

사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$

$\frac{7}{\sin 60^\circ}=2R$

$R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$

답 ②

3 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로

삼각형 ABC는 $\angle BCA=90^\circ$인 직각삼각형이고,

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다.

즉, $\overline{PC}=\overline{PA}=\overline{PB}=5$

삼각형 PBC는 이등변삼각형이므로

$\angle PCB=\angle PBC$

$\cos(\angle PCB)=\cos(\angle PBC)=\cos(\angle ABC)$

$=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

또한 선분 CP를 4 : 1로 내분하는 점이 Q이므로

$\overline{CQ}=4$

삼각형 CQB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{CQ}\times\overline{BC}\times\cos(\angle QCB)$

$=4^2+8^2-2\times4\times8\times\frac{4}{5}$

$=\frac{144}{5}$

$\overline{BQ}=\frac{12}{\sqrt{5}}$

$\sin(\angle PCB)=\sin(\angle PBC)=\sin(\angle ABC)$

$=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

삼각형 CQB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle QCB)}=2R$

$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle PCB)}=2R$

$\frac{\frac{12}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}}=2R$

$2R=4\sqrt{5}$

$R=2\sqrt{5}$

따라서 $R^2=20$

답 20

4 ㄱ. 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=7$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{7}$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$

$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

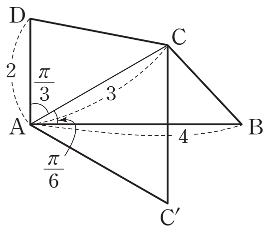
$R=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$이므로

$R^2=\frac{7}{3}$

그러므로 세 점 A, C, D를 지나는 원의 넓이는 $\frac{7}{3}\pi$이다. (참)

ㄴ. 점 C를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 C′이므로

$\angle CAB=\angle C'AB=\frac{\pi}{6}$



즉, $\angle CAC'=\frac{\pi}{3}$이고, $\overline{AC}=\overline{AC'}=3$이므로

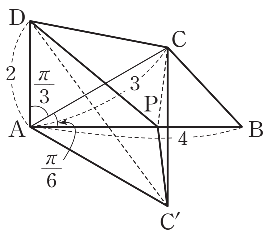
삼각형 AC′C는 정삼각형이다.

따라서 $\overline{CC'}=3$ (거짓)

ㄷ. 선분 AB 위의 점 P에 대하여

$\overline{CP}+\overline{DP}=\overline{C'P}+\overline{DP}\geq\overline{C'D}$이므로

$\overline{CP}+\overline{DP}$의 최솟값은 $\overline{C'D}$이다.



삼각형 AC′D에서

$\angle C'AD=\frac{2}{3}\pi$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{C'D}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=19$$

이므로

$\overline{C'D}=\sqrt{19}$

따라서 직선 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{CP}+\overline{DP}$의 최솟값은 $\sqrt{19}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BAC)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{6^2+6^2-8^2}{2\times6\times6}=\frac{1}{9}$$

$$\cos(\angle ABC)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{6^2+8^2-6^2}{2\times6\times8}=\frac{2}{3}$$

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle ABC=\angle ACB$

$\cos(\angle ACB)=\frac{2}{3}$

$\overline{EB}=x$, $\overline{EC}=y$라 하면

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{EB}^2+\overline{EA}^2-2\times\overline{EB}\times\overline{EA}\times\cos(\angle AEB)$$

$$6^2=x^2+7^2-2x\times7\times\cos(\angle AEB)$$

$\angle AEB=\angle ACB$이므로

$\cos(\angle AEB)=\cos(\angle ACB)=\frac{2}{3}$

$$6^2=x^2+7^2-\frac{28}{3}x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{EC}^2+\overline{EA}^2-2\times\overline{EC}\times\overline{EA}\times\cos(\angle AEC)$$

$$6^2=y^2+7^2-2y\times7\times\cos(\angle AEC)$$

$\angle AEC=\angle ABC$이므로

$\cos(\angle AEC)=\cos(\angle ABC)=\frac{2}{3}$

$$6^2=y^2+7^2-\frac{28}{3}y \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면

$$0=x^2-y^2-\frac{28}{3}(x-y)$$

$$(x-y)(x+y)-\frac{28}{3}(x-y)=0$$

$x\neq y$이므로

$$x+y-\frac{28}{3}=0$$

$$x+y=\frac{28}{3} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=x^2+y^2-2xy\cos(\angle BEC)$$

$\angle BAC+\angle BEC=\pi$이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle BEC)&=\cos(\pi-\angle BAC)\\&=-\cos(\angle BAC)\\&=-\frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\overline{BC}^2=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy$$

$$8^2=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy$$

$$\begin{aligned}64&=x^2+y^2+\frac{2}{9}xy\\&=(x+y)^2-2xy+\frac{2}{9}xy\\&=(x+y)^2-\frac{16}{9}xy\end{aligned}$$

㉢을 대입하면

$$64=\left(\frac{28}{3}\right)^2-\frac{16}{9}xy$$

따라서 $xy=13$이므로

$$x^2+y^2=64-\frac{2}{9}\times13=\frac{550}{9}$$

즉, $9(\overline{EB}^2+\overline{EC}^2)=550$

답 550

6 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}=\dfrac{7^2+8^2-9^2}{2\times7\times8}=\dfrac{2}{7}$

$\sin C>0$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{7}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

$\sin(\angle ADC)=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$이므로

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin C}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}$

$\dfrac{\overline{AD}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}=\dfrac{7}{\frac{3\sqrt{5}}{8}}$

$\overline{AD}=8$

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+x^2-2\times\overline{AC}\times x\times\cos C$

$8^2=7^2+x^2-2\times7\times x\times\dfrac{2}{7}$

$64=49+x^2-4x$

$x^2-4x-15=0$

$x=2\pm\sqrt{19}$

$x>0$이므로

$x=2+\sqrt{19}$

따라서

$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}$

$=8-x=8-(2+\sqrt{19})$

$=6-\sqrt{19}$

에서 $p=6$, $q=-1$이므로

$p\times q=6\times(-1)=-6$

답 ②

7 조건 (가)에서 $\cos^2 B+\sin^2 C=1$이므로

$(1-\sin^2 B)+\sin^2 C=1$

$\sin^2 B=\sin^2 C$

삼각형 ABC에서 $\sin B>0$, $\sin C>0$이므로

$\sin B=\sin C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

즉, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}$에서

$b=c$

$b=\overline{CA}=n+4$, $c=\overline{AB}=n^2-2n$이므로

$n+4=n^2-2n$에서

$n^2-3n-4=0$

$(n+1)(n-4)=0$

$n>2$이므로

$n=4$

즉, $b=c=8$

조건 (나)에서 $\cos B+\cos C=1$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$에서

$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$

$b=c$이므로

$\dfrac{a^2}{2ab}+\dfrac{a^2}{2ab}=1$

$\dfrac{a}{b}=1$

즉, $a=b$

따라서 $a=b=c=8$

즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

답 ③

다른 풀이

조건 (나)에서 $\cos B=1-\cos C$이므로

조건 (가)에서 $(1-\cos C)^2+\sin^2 C=1$

$1-2\cos C+\cos^2 C+\sin^2 C=1$

$\cos^2 C+\sin^2 C=1$이므로

$2\cos C=1$

$\cos C=\dfrac{1}{2}$

조건 (나)에서 $\cos B=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\cos B=\cos C=\dfrac{1}{2}$

$B=C=60^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

그러므로 $\overline{AB}=n^2-2n$, $\overline{CA}=n+4$에서

$n^2-2n=n+4$

$n^2-3n-4=0$

$(n+1)(n-4)=0$

$n>2$이므로 $n=4$

즉, $\overline{AB}=\overline{CA}=8$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin 60^\circ=16\sqrt{3}$

8 사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 대하여

$\overline{AC}=x$, $\overline{BD}=y$라 하자.

조건 (가)에서 $x+y=10$

조건 (나)에서 $\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin 30^\circ=4$

즉, $\frac{1}{2}\times x\times y\times\frac{1}{2}=4$에서 $xy=16$

x, y를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 t에 대한 이차방정식은 $t^2-10t+16=0$이므로

$(t-2)(t-8)=0$에서

$t=2$ 또는 $t=8$

이때 $x<y$이므로

$x=2$, $y=8$

따라서 $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{y}{x}=\frac{8}{2}=4$

답 ④

9 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}$

조건 (가)에서 $\sqrt{2}\sin A=\sin B$이므로

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sqrt{2}\sin A}$

$\sin A>0$이므로

$\overline{CA}=\sqrt{2}\times\overline{BC}$

$\overline{BC}=2$이므로

$\overline{CA}=2\sqrt{2}$

조건 (나)에서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}\times\overline{BC}$이므로

$(2\sqrt{2})^2=\overline{AB}\times2$

$8=\overline{AB}\times2$

$\overline{AB}=4$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$2^2=4^2+(2\sqrt{2})^2-2\times4\times2\sqrt{2}\times\cos A$

$\cos A=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\sin A>0$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{8}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{8}$

$=\sqrt{7}$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 67쪽

1 ④ 2 ② 3 ③

1 두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 R, R'이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=2R$

즉, $\sin\alpha=\frac{\overline{AB}}{2R}$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\beta}=2R'$

즉, $\sin\beta=\frac{\overline{AB}}{2R'}$

조건 (가)에서 $4\sin\alpha=3\sin\beta$이므로

$4\times\frac{\overline{AB}}{2R}=3\times\frac{\overline{AB}}{2R'}$

$4R'=3R$

$R'=\frac{3}{4}R$

한편, 두 원 O, O'의 넓이의 합은

$\pi(R^2+R'^2)=\pi\left\{R^2+\left(\frac{3}{4}R\right)^2\right\}$

$=\frac{25}{16}R^2\pi$

조건 (나)에서 두 원 O, O'의 넓이의 합이 25π이므로

$\frac{25}{16}R^2\pi=25\pi$에서

$R^2=16$

$R>0$이므로 $R=4$

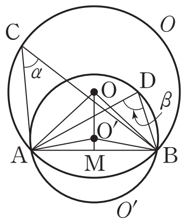
$R'=\frac{3}{4}R=3$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\angle AOO'=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\alpha=\alpha$,

$\angle AO'M=\frac{1}{2}\angle AO'B=\frac{1}{2}\times2\beta=\beta$이므로

$\angle OAO'=\beta-\alpha$



삼각형 OAO′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OO'}^2=R^2+R'^2-2RR'\times\cos(\beta-\alpha)$

$=4^2+3^2-2\times4\times3\times\dfrac{5}{6}$

$=5$

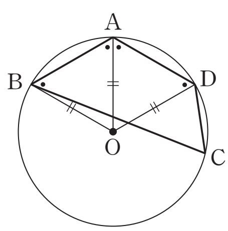
따라서 $\overline{OO'}=\sqrt{5}$

답 ④

2 $\angle DAB=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $\angle OAB=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

삼각형 OAB는 정삼각형이고, 한 변의 길이는 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이와 같다.



마찬가지로 삼각형 ODA는 정삼각형이고, 한 변의 길이가 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$

$\overline{AB}=\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$이므로

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=x^2+x^2-2x^2\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$3x^2=12,\ x^2=4$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{AB}=\overline{AD}=2$이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$ …… ㉠

사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BAD+\angle BCD=\pi$에서

$\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 BCD에서 $\overline{BC}=y$, $\overline{CD}=z$라 하면

코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=y^2+z^2-2yz\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=y^2+z^2-yz$

$=(y+z)^2-3yz$

$y+z=4\sqrt{2}$이므로

$(2\sqrt{3})^2=(4\sqrt{2})^2-3yz$

$yz=\dfrac{20}{3}$

즉, $\overline{BC}\times\overline{CD}=\dfrac{20}{3}$이므로 삼각형 BCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 사각형 ABCD의 넓이는

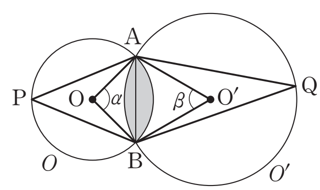
$\sqrt{3}+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

답 ②

3 점 P는 원 O'의 외부에 있고 점 Q는 원 O의 외부에 있도록 두 원 O, O' 위에 각각 두 점 P, Q를 잡으면 각 APB는 호 AB의 원주각이므로

$\angle APB=\dfrac{\alpha}{2}$

마찬가지로 $\angle AQB=\dfrac{\beta}{2}$



두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 R, R'이라 하면

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=2R$

즉, $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\overline{AB}}{2R}$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}=2R'$

즉, $\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\overline{AB}}{2R'}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\times\sin\dfrac{\beta}{2}$이므로

$\frac{\overline{AB}}{2R}=\sqrt{2}\times\frac{\overline{AB}}{2R'}$

$R'=\sqrt{2}R$

사각형 $AOBO'$의 둘레의 길이는

$\overline{AO}+\overline{BO}+\overline{AO'}+\overline{BO'}=2R+2R'$

$=2R+2\sqrt{2}R$

$=2R(1+\sqrt{2})$

$=6\sqrt{2}+6$

이므로

$R=\frac{6(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=3$

$R'=3\sqrt{2}$

삼각형 AOB에서

$\overline{AO}=\overline{BO}=3$, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$

부채꼴 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$

삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

삼각형 ABO'에서

$\overline{AO'}=\overline{BO'}=3\sqrt{2}$, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\angle AO'B=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 $BO'A$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\pi}{3}=3\pi$

삼각형 ABO'의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$\left(\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}\right)+\left(3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{21}{4}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2}$

답 ③

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 71~77쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 ④
6 100 7 ③ 8 ⑤

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6+a_7=7$에서 $(a+5d)+(a+6d)=7$

$2a+11d=7$ …… ㉠

$a_7+a_8=9$에서 $(a+6d)+(a+7d)=9$

$2a+13d=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $d=1$

따라서

$a_7=a+6d=-2+6\times1=4$

답 ③

다른 풀이

$\frac{a_6+a_8}{2}=a_7$이므로

$(a_6+a_7)+(a_7+a_8)=7+9$

$(a_6+a_8)+2a_7=16$

$2a_7+2a_7=16$

따라서 $4a_7=16$에서

$a_7=4$

2 $a_2+a_4+a_6+a_8$

$=(a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)$

$=4a+16d$

$4a+16d=160$에서

$a+4d=40$이므로

$a\times d=(40-4d)\times d$

$=4(-d^2+10d)$

$=4\{-(d-5)^2+25\}$

$=-4(d-5)^2+100$

따라서 $a\times d$의 최댓값은 $d=5$일 때 100이다.

답 ⑤

다른 풀이

$a_2+a_4+a_6+a_8$

$=(a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)$

$=4a+16d$

$4a+16d=160$에서 $a+4d=40$
이때 $a>0$, $4d>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{a+4d}{2}\ge\sqrt{a\times 4d}$
(단, 등호는 $a=4d$일 때 성립하고, 이때 $a+4d=8d=40$에서 a와 d가 모두 자연수이다.)
$\frac{40}{2}\ge 2\sqrt{a\times d}$
$10\ge\sqrt{a\times d}$
따라서 $100\ge a\times d$이므로 $a\times d$의 최댓값은 100이다.

3 $a_n=\frac{2}{5}+(n-1)\times\frac{2}{5}=\frac{2n}{5}$이므로
$b_1=a_5=2$
$b_2=a_{10}=4$
$b_3=a_{15}=6$
$\vdots$
즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다.
따라서 $b_{10}=2+9\times 2=20$이므로
수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\frac{10\times(b_1+b_{10})}{2}=\frac{10\times(2+20)}{2}=110$

답 ③

4 (i) $a_1=S_1=(1+1)^2+1=5$
(ii) $n\ge 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\{(n+1)^2+1\}-(n^2+1)$
$=2n+1$
이므로 $a_{10}=2\times 10+1=21$
(i), (ii)에서
$a_1+a_{10}=5+21=26$

답 ④

다른 풀이
$a_1=S_1=5$
$a_{10}=S_{10}-S_9$
$=(11^2+1)-(10^2+1)$
$=122-101$
$=21$
따라서 $a_1+a_{10}=5+21=26$

5 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1+a_2+a_3=14$에서
$a+ar+ar^2=14$ …… ㉠
또 $a_2+a_3+a_4=-42$에서
$ar+ar^2+ar^3=-42$
$r(a+ar+ar^2)=-42$
㉠에서 $r\times 14=-42$이므로 $r=-3$
$r=-3$을 ㉠에 대입하면
$a-3a+9a=14$
$7a=14$에서 $a=2$
따라서 $a_1=2$

답 ④

6 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로
$a_2\times a_4\times a_6\times\cdots\times a_{20}$
$=\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\cdots\times\left(\frac{1}{3}\right)^{19}$
$=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+3+5+\cdots+19}$
$=\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$
따라서 구하는 자연수 m의 값은 100이다.

답 100

7 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\ne 1)$이라 하면
$S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}=5$ …… ㉠
$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=15$ …… ㉡
㉡÷㉠에서
$r^5+1=3$, $r^5=2$
따라서
$S_{15}=\frac{a(r^{15}-1)}{r-1}$
$=\frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$
$=\frac{a(r^5-1)}{r-1}\times(r^{10}+r^5+1)$
$=5\times(2^2+2+1)$
$=35$

답 ③

다른 풀이
수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로
연속된 다섯 개의 항의 합으로 이루어진 수열
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$, $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$,
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$도 등비수열을 이룬다.

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$,
$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=15-5=10$이므로
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=20$
따라서 $S_{15}=5+10+20=35$

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0,\ r\neq 1)$이라 하자.

$$S_{10}=\frac{2\times(1-r^{10})}{1-r}=\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$$

한편, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$T_{10}=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{2}\times(r^{10}-1)}{r^{10}-r^9}=\frac{r^{10}-1}{2r^9(r-1)}=\frac{S_{10}}{4r^9}$$

즉, $\frac{S_{10}}{T_{10}}=4r^9$

$\frac{S_{10}}{T_{10}}=40$이므로 $4r^9=40$에서 $r^9=10$
따라서
$a_{10}=2\times r^9=2\times 10=20$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

1 ②	**2** 5	**3** 6	**4** ④	**5** ③
6 ②	**7** 64	**8** ①		

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_5=10+4d$, $a_{18}=10+17d$이므로
$\frac{10+4d}{10+17d}=2$에서 $d=-\frac{1}{3}$
따라서

$$a_{25}=10+24d=10+24\times\left(-\frac{1}{3}\right)=10-8=2$$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_6+a_7+a_8=a_{11}$에서
$(20+5d)+(20+6d)+(20+7d)=20+10d$
$60+18d=20+10d$에서 $d=-5$
따라서 $a_n=20+(n-1)\times(-5)=-5n+25$이므로
$a_m=-5m+25=0$에서
$m=5$

답 5

3 $a_n=a_1+(n-1)\times 6=6n+a_1-6$이므로

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2a_1-6+6n)}{2}$$

이때 $\frac{S_n}{n^2}=\frac{2a_1-6+6n}{2n}=\frac{a_1-3}{n}+3$이므로 $\frac{a_1-3}{n}+3$은 $a_1=3$일 때 일정한 값 3을 갖는다.
따라서 $p=3$, $q=3$이므로
$p+q=3+3=6$

답 6

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{20}-a_{10}=10d$이므로
$10d=-30$에서 $d=-3$
즉, $a_n=50+(n-1)\times(-3)=-3n+53$
따라서 $a_{11}=20$, $a_{20}=-7$이므로
등차수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{10\times(a_{11}+a_{20})}{2}=\frac{10\times\{20+(-7)\}}{2}=5\times 13=65$$

답 ④

5 (i) $a_1=S_1=3$
(ii) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n+4)-\{2(n-1)^2-3(n-1)+4\}=4n-5$$

이므로 $a_{11}=4\times 11-5=39$
(i), (ii)에서
$\frac{a_{11}}{a_1}=\frac{39}{3}=13$

답 ③

다른 풀이

$a_1=S_1=3$

$a_{11}=S_{11}-S_{10}$

$=(242-33+4)-(200-30+4)$

$=39$

따라서 $\frac{a_{11}}{a_1}=\frac{39}{3}=13$

6 세 수 a, b, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{a+4}{2}$ …… ㉠

또 세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$

㉠에서 $\frac{a^2}{4}=\frac{a+4}{2}$

$a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$a=-2$ 또는 $a=4$

$a=-2$일 때 $b=1$, $a=4$일 때 $b=4$

따라서 $a\neq b$이므로 $a+b$의 값은

$-2+1=-1$

답 ②

7 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=-1$에서

$a+ar=-1$ …… ㉠

$a_3=4$에서

$ar^2=4$ …… ㉡

㉡에서 $a=\frac{4}{r^2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{r^2}+\frac{4}{r}=-1$

$r^2+4r+4=0$

$(r+2)^2=0$

따라서 $r=-2$이고,

㉡에서 $a=1$이므로

$a_7=ar^6=1\times(-2)^6=64$

답 64

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq 0)$, 공비를 r $(r\neq 1)$이라 하면

$S_8=5S_4$에서

$\frac{a(1-r^8)}{1-r}=\frac{5a(1-r^4)}{1-r}$

$\frac{a(1+r^4)(1-r^4)}{1-r}=\frac{5a(1-r^4)}{1-r}$

에서 $1+r^4=5$, $r^4=4$

따라서

$\frac{a_{27}}{a_{15}}=\frac{ar^{26}}{ar^{14}}$

$=r^{12}$

$=(r^4)^3$

$=4^3$

$=64$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 80~81쪽

1 ①	2 ②	3 ②	4 ②	5 ③
6 8	7 75	8 ③		

1 조건 (가)에서

$(a_9{}^2-a_5{}^2)+(a_7{}^2-a_3{}^2)=0$

$(a_9-a_5)(a_9+a_5)+(a_7-a_3)(a_7+a_3)=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq 0)$이라 하면

$4d(a_9+a_5)+4d(a_7+a_3)=0$

$d\neq 0$이므로 $(a_9+a_3)+(a_7+a_5)=0$

$\frac{a_9+a_3}{2}+\frac{a_7+a_5}{2}=0$

$a_6+a_6=0$에서 $a_6=0$ …… ㉠

또 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$\frac{a_1+a_{11}}{2}=a_6=0$이므로

$S_{11}=\frac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=0$

조건 (나)에서 $S_{12}=S_{11}+a_{12}=12$이므로

$a_{12}=12$ …… ㉡

이때 $a_{12}-a_6=6d$이므로

㉠, ㉡에서 $6d=12$, $d=2$

따라서

$a_{20}=a_{12}+8d$

$=12+8\times 2$

$=28$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$=dn+a-d$

이때

$b_n=(a_{n+6}-a_n)(a_{n+6}+a_n)$

$=6d\times(a_n+6d+a_n)$

$=6d\times(2a_n+6d)$

이므로

$d_1=b_2-b_1$

$=6d(2a_2+6d)-6d(2a_1+6d)$

$=12d(a_2-a_1)$

$=12d^2$

또

$c_n=(a_{n+k}-a_n)(a_{n+k}+a_n)$

$=kd\times(a_n+kd+a_n)$

$=kd\times(2a_n+kd)$

이므로

$d_2=c_2-c_1$

$=kd(2a_2+kd)-kd(2a_1+kd)$

$=2kd(a_2-a_1)$

$=2kd^2$

따라서 $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{12d^2}{2kd^2}=\dfrac{6}{k}$이므로

$\dfrac{6}{k}=3$에서 $k=2$

답 ②

3 $a_{10}=a+9b$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10\times(a+a+9b)}{2}$

$=5(2a+9b)$

$5(2a+9b)=200$에서 $2a+9b=40$

이때 a, b가 모두 자연수이므로

$b=2$일 때 $a=11$

$b=4$일 때 $a=2$

뿐이다.

따라서 $a+b$의 값은 13 또는 6이므로 모든 $a+b$의 값의 합은

$13+6=19$

답 ②

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=40$에서 $\dfrac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=40$이므로

$\dfrac{10\times(2a+9d)}{2}=40$

$2a+9d=8$ …… ㉠

$S_{40}=10$에서 $\dfrac{40\times(a_1+a_{40})}{2}=10$

$\dfrac{40\times(2a+39d)}{2}=10$

$2a+39d=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $30d=-\dfrac{15}{2}$, $d=-\dfrac{1}{4}$

㉠에서 $2a+9\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=8$, $a=\dfrac{41}{8}$

따라서 $a_n=\dfrac{41}{8}+(n-1)\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{-2n+43}{8}$이므로

$S_{70}=\dfrac{70\times(a_1+a_{70})}{2}$

$=\dfrac{70\times\left(\dfrac{41}{8}-\dfrac{97}{8}\right)}{2}$

$=\dfrac{70\times(-7)}{2}$

$=-245$

답 ②

다른 풀이 1

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=40$에서 $\dfrac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=40$이므로

$\dfrac{10\times(2a+9d)}{2}=40$

$2a+9d=8$ …… ㉠

$S_{40}=10$에서

$\dfrac{40\times(a_1+a_{40})}{2}=10$

$\dfrac{40\times(2a+39d)}{2}=10$

$2a+39d=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

$2\times$㉡−㉠에서 $2a+69d=-7$이므로

$S_{70}=\dfrac{70\times(a_1+a_{70})}{2}$

$=\dfrac{70\times(2a+69d)}{2}$

$=\dfrac{70\times(-7)}{2}$

$=-245$

다른 풀이 2

$b_n=a_{10n-9}+a_{10n-8}+a_{10n-7}+\cdots+a_{10n-1}+a_{10n}$이라 하면 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{b_n\}$도 등차수열이다.

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_1=40$이므로

$b_2=40+d$, $b_3=40+2d$, $b_4=40+3d$

$S_{40}=b_1+b_2+b_3+b_4=160+6d$

$160+6d=10$에서 $d=-25$

따라서

$$\begin{aligned}S_{70}&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_7\\&=280+21d\\&=280+21\times(-25)\\&=-245\end{aligned}$$

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하자.

$a_{12}=a+11\times3=a+33$,

$b_{12}=b+11\times(-2)=b-22$이므로

$a_{12}+b_{12}=0$에서

$(a+33)+(b-22)=0$

$a+b=-11$ ······ ㉠

한편, $S_m=\dfrac{m\times(a_1+a_m)}{2}=\dfrac{m\times\{2a+(m-1)\times3\}}{2}$,

$T_m=\dfrac{m\times(b_1+b_m)}{2}=\dfrac{m\times\{2b+(m-1)\times(-2)\}}{2}$

이므로 $S_m+T_m=0$에서

$\dfrac{m\times\{2a+2b+(m-1)\}}{2}=0$

$m\neq0$이므로 $2a+2b+(m-1)=0$

㉠에서 $-22+(m-1)=0$이므로

$m=23$

답 ③

6 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_2+a_3=\dfrac{1}{9}\times r+\dfrac{1}{9}\times r^2=\dfrac{1}{9}(r+r^2)$이므로

$\dfrac{1}{9}(r+r^2)=\dfrac{4}{3}$에서

$r^2+r-12=0$

$(r+4)(r-3)=0$

$r=-4$ 또는 $r=3$

$r>0$이므로 $r=3$

즉, $a_n=\dfrac{1}{9}\times3^{n-1}=3^{n-3}$

따라서 $3^4=81$, $3^5=243$이므로

$a_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은

$n-3=5$에서 $n=8$

답 8

7 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r $(r\neq1)$이라 하자.

$a_1=b_2$에서 $a=-3r$이므로

$r^2=\dfrac{a^2}{9}$ ······ ㉠

$a_2=b_1$에서 $a+d=-3$이므로

$d=-a-3$ ······ ㉡

$a_3=b_3$에서 $a+2d=-3r^2$ ······ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$a+2\times(-a-3)=-3\times\dfrac{a^2}{9}$

정리하면 $a^2-3a-18=0$

$(a+3)(a-6)=0$

$a=-3$ 또는 $a=6$

$a=-3$일 때 $r=1$

$a=6$일 때 $r=-2$

$r\neq1$이므로 $a=6$이고 ㉡에서 $d=-9$

따라서 $a_{10}=a+9d=6+9\times(-9)=-75$

즉, $|a_{10}|=|-75|=75$

답 75

8 (i) $S_{2n+1}-S_{2n}=3n-1$에서

$a_{2n+1}=3n-1$ $(n\geq1)$

수열 $\{a_{2n+1}\}$은 등차수열이므로

$$\begin{aligned}a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19}&=\frac{9\times(a_3+a_{19})}{2}\\&=\frac{9\times(2+26)}{2}\\&=126\end{aligned}$$

(ii) $S_{2n+2}-S_{2n+1}=2^n$에서

$a_{2n+2}=2^n$ $(n\geq1)$

수열 $\{a_{2n+2}\}$는 등비수열이므로

$$\begin{aligned}a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}&=\frac{2\times(2^9-1)}{2-1}\\&=1022\end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}S_{20}&=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{19}+a_{20}\\&=a_1+a_2+(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19})\\&\quad+(a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20})\\&=1+2+126+1022\\&=1151\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$S_{2n+1}=S_{2n}+3n-1$이므로

$S_{2n+2}=(S_{2n}+3n-1)+2^n$

$S_{2n+2}-S_{2n}=3n-1+2^n$ …… ㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $S_4-S_2=3\times1-1+2^1$

$n=2$일 때, $S_6-S_4=3\times2-1+2^2$

$n=3$일 때, $S_8-S_6=3\times3-1+2^3$

⋮

$n=9$일 때, $S_{20}-S_{18}=3\times9-1+2^9$

이 9개의 등식을 변끼리 더하면

$S_{20}-S_2$

$=3\times(1+2+3+\cdots+9)-9+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^9)$

$=3\times\dfrac{9\times(1+9)}{2}-9+\dfrac{2\times(2^9-1)}{2-1}$

$=3\times45-9+1022$

$=1148$

따라서

$S_{20}=S_2+1148$

$=(a_1+a_2)+1148$

$=(1+2)+1148$

$=1151$

Level 3 실력 완성

본문 82쪽

1 ② **2** 21 **3** ②

1 $a_k+a_{k+2}=40$이므로

$a_{k+1}=\dfrac{a_k+a_{k+2}}{2}=20$

$S_{k+1}-S_k=a_{k+1}$이므로

$S_{k+1}-45=20$에서 $S_{k+1}=65$

또 $S_{k+2}-S_{k+1}=a_{k+2}$이므로

$a_{k+2}=88-65=23$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=a_{k+2}-a_{k+1}=23-20=3$

$a_k=a_{k+1}-d=20-3=17$

한편, $a_k=a_1+(k-1)\times3$이므로

$a_1+(k-1)\times3=17$에서

$a_1=20-3k$

따라서 $S_k=45$에서

$\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=45$

$\dfrac{k(20-3k+17)}{2}=45$

정리하면 $3k^2-37k+90=0$

$(3k-10)(k-9)=0$

$k=\dfrac{10}{3}$ 또는 $k=9$

k가 자연수이므로 $k=9$

따라서 $a_1=20-3\times9=-7$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$이라 하자.

(i) $d>0$인 경우

S_n의 최댓값이 36이라는 조건에 모순이다.

(ii) $d<0$이고, $a_1>0>a_2>a_3>\cdots$인 경우

조건 (나)에서

$a_1=36$, $a_1+a_2=35$, $a_1+a_2+a_3=33$이므로

$a_1=36$, $a_2=-1$, $a_3=-2$

이 경우 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이 아니다.

(iii) $d<0$이고, 2 이상의 자연수 m에 대하여

$a_m>0>a_{m+1}>a_{m+2}>\cdots$인 경우

$S_1<S_2<\cdots<S_{m-1}<S_m>S_{m+1}>S_{m+2}>\cdots$

이므로 $b_1=S_m$이고,

$b_2=S_{m-1}$, $b_3=S_{m+1}$ 또는 $b_2=S_{m+1}$, $b_3=S_{m-1}$이다.

① $S_m=36$, $S_{m-1}=35$, $S_{m+1}=33$이면

$a_m=S_m-S_{m-1}=36-35=1$,

$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=33-36=-3$이므로

$d=a_{m+1}-a_m=-4$이고,

$a_{m+1}=a_1+m\times(-4)=-3$에서 $a_1=4m-3$

즉,

$S_m=\dfrac{m\times(a_1+a_m)}{2}=\dfrac{m\times(4m-3+1)}{2}$

$=m(2m-1)$

$m(2m-1)=36$에서

$(m+4)(2m-9)=0$

$m=-4$ 또는 $m=\dfrac{9}{2}$

m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $S_m=36$, $S_{m+1}=35$, $S_{m-1}=33$이면

$a_m=S_m-S_{m-1}=36-33=3$,

$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=35-36=-1$이므로

$d=a_{m+1}-a_m=-4$이고,

$a_{m+1}=a_1+m\times(-4)=-1$에서 $a_1=4m-1$

즉,

$S_m=\dfrac{m\times(a_1+a_m)}{2}=\dfrac{m\times(4m-1+3)}{2}$

$=m(2m+1)$

$m(2m+1)=36$에서
$(2m+9)(m-4)=0$
$m=-\frac{9}{2}$ 또는 $m=4$
m은 자연수이므로 $m=4$
(i), (ii), (iii)에서 $a_4=3$, $d=-4$이므로
$a_{10}=a_4+6d=3+6\times(-4)=-21$
따라서 $|a_{10}|=|-21|=21$

답 21

3 점 $(a_n,\ f(a_n))$을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은
$y-f(a_n)=b_n(x-a_n)$
$y=b_nx+f(a_n)-a_nb_n$
$\quad=b_nx+a_n^2+a_n-a_nb_n$
$\quad=b_nx+a_n(a_n+1-b_n)$
이때 $x^2+x=b_nx+a_n(a_n+1-b_n)$에서
$x^2+(1-b_n)x-a_n(a_n+1-b_n)=0$
$(x-a_n)\{x+(a_n+1-b_n)\}=0$
$x=a_n$ 또는 $x=-a_n-1+b_n$
즉, $a_{n+1}=-a_n-1+b_n$이므로
$a_{n+1}+a_n=b_n-1$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은
$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{19}+a_{20})$
$=(b_1-1)+(b_3-1)+(b_5-1)+\cdots+(b_{19}-1)$
$=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{19})-10$
$=\frac{b_1\times[\{(\sqrt[4]{2})^2\}^{10}-1]}{(\sqrt[4]{2})^2-1}-10$
$=\frac{b_1\times(32-1)}{\sqrt{2}-1}-10$
$=\frac{31b_1}{\sqrt{2}-1}-10$
즉, $\frac{31b_1}{\sqrt{2}-1}-10=21$에서
$b_1=\sqrt{2}-1$

답 ②

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 85~95쪽

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 15	5 18
6 ⑤	7 16	8 ②	9 ①	10 10
11 ③				

1 $\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{9}k^2$
$=\sum_{k=1}^{10}k^2-20-\sum_{k=1}^{9}k^2$
$=\sum_{k=1}^{9}k^2+100-20-\sum_{k=1}^{9}k^2$
$=100-20$
$=80$

답 ①

2 $\sum_{k=1}^{15}2a_{k+1}=2\sum_{k=1}^{15}a_{k+1}=50$에서 $\sum_{k=1}^{15}a_{k+1}=25$
즉, $\sum_{k=2}^{16}a_k=25$이므로
$\sum_{k=2}^{15}a_k+a_{16}=25$ $\cdots\cdots$ ㉠
또 $\sum_{k=1}^{15}3a_k=3\sum_{k=1}^{15}a_k=30$에서 $\sum_{k=1}^{15}a_k=10$
즉, $a_1+\sum_{k=2}^{15}a_k=10$이므로
$3+\sum_{k=2}^{15}a_k=10$에서 $\sum_{k=2}^{15}a_k=7$
따라서 ㉠에서
$7+a_{16}=25$이므로
$a_{16}=18$

답 ③

3 $\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(3k^2+4k-1)$
$=\sum_{k=1}^{8}(4k^2+4k+1)-\sum_{k=1}^{8}(3k^2+4k-1)$
$=\sum_{k=1}^{8}\{(4k^2+4k+1)-(3k^2+4k-1)\}$
$=\sum_{k=1}^{8}(k^2+2)$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}2$

$=\frac{8\times9\times17}{6}+2\times8$

$=204+16$

$=220$

답 ⑤

4 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$

$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times\{3(n+1)-(2n+1)\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

이므로

$\frac{f(20)}{f(14)}=\frac{\frac{20\times21\times22}{6}}{\frac{14\times15\times16}{6}}=\frac{11}{4}$

따라서 $p=4$, $q=11$이므로

$p+q=4+11=15$

답 15

5 $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$

$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

이므로

$\sum_{k=3}^{398}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=3}^{398}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots$
$+(\sqrt{400}-\sqrt{399})$

$=-\sqrt{4}+\sqrt{400}$

$=-2+20$

$=18$

답 18

6 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=-2k$, $\alpha_k\beta_k=k^2-k$

이때

$\alpha_k{}^2+\beta_k{}^2=(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k$

$=(-2k)^2-2(k^2-k)$

$=2k^2+2k$

이므로

$\frac{1}{\alpha_k{}^2+\beta_k{}^2}=\frac{1}{2k^2+2k}$

$=\frac{1}{2k(k+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

따라서

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\alpha_k{}^2+\beta_k{}^2}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{16}$

$=\frac{15}{32}$

답 ⑤

7 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

따라서 등차중항의 성질에 의하여

$a_9=\frac{a_3+a_{15}}{2}$

$=\frac{3+29}{2}$

$=16$

답 16

다른 풀이

모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{15}=a_3+12d$

$29=3+12d$에서 $d=\frac{13}{6}$

따라서

$a_9=a_3+6d$
$=3+6\times\frac{13}{6}$
$=16$

8 $a_{n+1}{}^2=a_n{}^2+8(4n-3)$에서
$a_{n+1}{}^2-a_n{}^2=8(4n-3)$
$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=8(4n-3)$
이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 4이므로
$a_{n+1}-a_n=4$
즉, $4(a_{n+1}+a_n)=8(4n-3)$에서
$a_{n+1}+a_n=2(4n-3)$
$(a_n+4)+a_n=2(4n-3)$이므로
$a_n=4n-5$
따라서 $a_1=-1$, $a_{10}=35$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(-1+35)}{2}=170$

답 ②

9 $a_2=a_1+2\cos\frac{\pi}{3}$
$=1+2\times\frac{1}{2}$
$=2$
$a_3=a_2+2\cos\frac{2}{3}\pi$
$=2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=1$
$a_4=a_3+2\cos\pi$
$=1+2\times(-1)$
$=-1$
$a_5=a_4+2\cos\frac{4}{3}\pi$
$=-1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=-2$

답 ①

10 $a_2=(-1)^2a_1+1$
$=3+1$
$=4$
$a_3=(-1)^3a_2+1$
$=-4+1$
$=-3$
$a_4=(-1)^4a_3+1$
$=-3+1$
$=-2$
$a_5=(-1)^5a_4+1$
$=2+1$
$=3$
$\vdots$
즉, 자연수 l에 대하여
$a_{4l-3}=3$, $a_{4l-2}=4$, $a_{4l-1}=-3$, $a_{4l}=-2$
따라서 $a_{4l-3}+a_{4l-2}+a_{4l-1}+a_{4l}=2$이므로
$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+a_{13}+a_{14}+a_{15}$
$=(2+2+2)+3+4+(-3)$
$=10$

답 10

11 (i) $n=1$일 때,
$2^{3\times1-2}+3^1=\boxed{5}$이므로 $2^{3\times1-2}+3^1$은 5의 배수이다.
(ii) $n=k$일 때, $2^{3k-2}+3^k$이 5의 배수라고 가정하면
자연수 m에 대하여 $2^{3k-2}+3^k=5m$으로 놓을 수 있다.
$2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$
$=8\times2^{3k-2}+3\times3^k$
$=3\times2^{3k-2}+3\times3^k+5\times2^{3k-2}$
$=3\times(2^{3k-2}+3^k)+5\times2^{3k-2}$
$=3\times5m+5\times2^{3k-2}$
$=\boxed{15}\times m+5\times2^{\boxed{3k-2}}$
이때 $\boxed{15}\times m$과 $5\times2^{\boxed{3k-2}}$이 모두 5의 배수이므로
$2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$도 5의 배수이다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{3n-2}+3^n$은 5의 배수이다.
따라서 $p=5$, $q=15$, $f(k)=3k-2$이므로
$p+q+f(3)=5+15+7=27$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 890	5 22
6 ①	7 ③	8 ③		

1 $\sum_{k=1}^{9}\frac{2k+1}{2k+3}-\sum_{i=1}^{9}\frac{2i-1}{2i+1}$

$=\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{17}{19}+\frac{19}{21}\right)$

$-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\cdots+\frac{15}{17}+\frac{17}{19}\right)$

$=\frac{19}{21}-\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{7}$

답 ②

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{9}\frac{2k+1}{2k+3}-\sum_{i=1}^{9}\frac{2i-1}{2i+1}$

$=\sum_{k=2}^{10}\frac{2k-1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{9}\frac{2k-1}{2k+1}$

$=\frac{19}{21}-\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{7}$

2 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=18$,

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k)=2\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=4$에서

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)-\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k)=18-4=14$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k+3b_k)-(2a_k-4b_k)\}=14$

$\sum_{k=1}^{10}7b_k=14$

즉, $7\sum_{k=1}^{10}b_k=14$에서 $\sum_{k=1}^{10}b_k=2$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}(4b_k+3)=4\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}3$

$=4\times2+3\times10$

$=38$

답 ⑤

3 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(2n+1)}{6}$

$=\frac{2n^2+n}{6}$

따라서

$\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+1}\right)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{5}(2n^2+n)$

$=\frac{1}{6}\times\left(2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}\times(110+15)$

$=\frac{125}{6}$

답 ③

4 $a_n=2\times\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}+(2n+1)$

$=2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+(2n+1)$

$=2\times\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}+(2n+1)$

$=2n^2+2n+1$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+2k+1)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+10$

$=770+110+10$

$=890$

답 890

5 a_1, a_2, a_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_1=2$, $a_2=3$에서 $a_3=4$

또 a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2=3$, $a_3=4$에서 $a_4=\frac{16}{3}$

또 a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_3=4$, $a_4=\frac{16}{3}$에서 $a_5=\frac{20}{3}$

또 a_4, a_5, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_4=\frac{16}{3}$, $a_5=\frac{20}{3}$에서 $a_6=\frac{25}{3}$

또 a_5, a_6, a_7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_5=\frac{20}{3}$, $a_6=\frac{25}{3}$에서 $a_7=10$

또 a_6, a_7, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_6=\frac{25}{3}$, $a_7=10$에서 $a_8=12$

따라서 $a_7+a_8=10+12=22$

답 22

6 $a_1=S_1=1$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$

$a_1=1$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=2n-1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{33}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{32}{33}$$
$$=\frac{16}{33}$$

답 ①

7 $a_1=1$이므로 $a_2=2-\frac{4}{1}=-2$

$a_2=-2$이므로 $a_3=2-\frac{4}{-2}=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=2-\frac{4}{4}=1$

$a_4=1$이므로 $a_5=2-\frac{4}{1}=-2$

⋮

즉, 자연수 m에 대하여

$a_{3m-2}=1,\ a_{3m-1}=-2,\ a_{3m}=4$

따라서

$$\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{99}a_k+a_{100}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}a_k+a_1$$
$$=33\times\{1+(-2)+4\}+1$$
$$=99+1$$
$$=100$$

답 ③

8 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\boxed{3}$, (우변)$=\boxed{3}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)=m(m+2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{2m+3}$을 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k+1)=m(m+2)+(2m+3)$$
$$=m^2+4m+3$$
$$=\boxed{(m+1)(m+3)}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $p=3,\ f(m)=2m+3,\ g(m)=(m+1)(m+3)$이므로

$$\frac{f(6)+g(5)}{p}=\frac{15+48}{3}=21$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ④	2 ②	3 ②	4 22	5 ⑤
6 81	7 ②	8 8		

1
$$\sum_{k=1}^{20}k(a_k-2a_{k+1})$$
$$=(a_1-2a_2)+2(a_2-2a_3)+3(a_3-2a_4)+4(a_4-2a_5)+\cdots+19(a_{19}-2a_{20})+20(a_{20}-2a_{21})$$
$$=a_1-a_3-2a_4-3a_5-\cdots-18a_{20}-40a_{21}$$
$$=a_1-(a_3+2a_4+3a_5+\cdots+18a_{20})-40a_{21}$$
$$=a_1-\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}-40a_{21}$$

따라서 조건 (가)와 (나)에서

$98=1-\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}+40$이므로

$$\sum_{k=1}^{18}ka_{k+2}=1+40-98=-57$$

답 ④

2
$$\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}$$

$=1+\dfrac{1}{k(k+2)}$

$=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\}$

$=8+\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=8+\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}\right)\right\}$

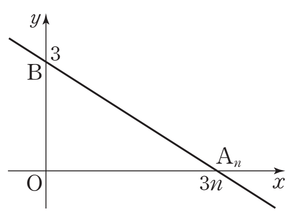
$=8+\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)$

$=8+\dfrac{29}{45}$

$=\dfrac{389}{45}$

답 ②

3



직선 A_nB의 방정식은 $\dfrac{x}{3n}+\dfrac{y}{3}=1$

(ⅰ) 직선 A_nB 위의 점 중 y좌표가 0인 점의 좌표가 $(3n,\ 0)$이므로 y좌표가 0이고 x좌표가 정수인 점의 개수는 $3n+1$

(ⅱ) 직선 A_nB 위의 점 중 y좌표가 1인 점의 좌표가 $(2n,\ 1)$이므로 y좌표가 1이고 x좌표가 정수인 점의 개수는 $2n+1$

(ⅲ) 직선 A_nB 위의 점 중 y좌표가 2인 점의 좌표가 $(n,\ 2)$이므로 y좌표가 2이고 x좌표가 정수인 점의 개수는 $n+1$

(ⅳ) 직선 A_nB 위의 점 중 y좌표가 3인 점의 좌표가 $(0,\ 3)$이므로 y좌표가 3이고 x좌표가 정수인 점의 개수는 1

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$f(n)=(3n+1)+(2n+1)+(n+1)+1$

$=6n+4$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}f(k)=\sum_{k=1}^{10}(6k+4)$

$=6\times\dfrac{10\times11}{2}+40$

$=330+40$

$=370$

답 ②

4 $\dfrac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})}$

$=\dfrac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2}}{(k+4)-(k+2)}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})$

이므로

$\displaystyle\sum_{k=m}^{45}\frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}$

$=\displaystyle\sum_{k=m}^{45}\frac{1}{2}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{m+4}-\sqrt{m+2})+(\sqrt{m+5}-\sqrt{m+3})$

$+(\sqrt{m+6}-\sqrt{m+4})+\cdots+(\sqrt{48}-\sqrt{46})$

$+(\sqrt{49}-\sqrt{47})\}$

$=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{m+2}-\sqrt{m+3}+\sqrt{48}+\sqrt{49})$

$=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{m+2}-\sqrt{m+3}+4\sqrt{3}+7)$

따라서

$\dfrac{1}{2}(-\sqrt{m+2}-\sqrt{m+3}+4\sqrt{3}+7)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$에서

$-\sqrt{m+2}-\sqrt{m+3}+4\sqrt{3}+7=4\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2$

$\sqrt{m+2}+\sqrt{m+3}=2\sqrt{6}+5$

즉, $\sqrt{m+2}+\sqrt{m+3}=\sqrt{24}+\sqrt{25}$이므로

$m=22$

답 22

5 $S_n=\dfrac{1\times(4^n-1)}{4-1}=\dfrac{4^n-1}{3}$이므로

$3S_k+1=3\times\dfrac{4^k-1}{3}+1=4^k$

이때 $\dfrac{3-2^k}{3S_k+1}=\dfrac{3-2^k}{4^k}=3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^k-\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{3-2^k}{3S_k+1}=\sum_{k=1}^{10}\left\{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=3\times\frac{\frac{1}{4}\times\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$
$$=(2^{10}-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$
$$=1023\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

즉, $m=1023$

답 ⑤

6 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{58}-\frac{1}{61}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{61}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{60}{61}$$
$$=\frac{20}{61}$$

즉, $p=61$, $q=20$이므로

$p+q=61+20=81$

답 81

7 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{10}$이므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이다.

이때 $S_1=a_1=1$이므로

$$S_n=1\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

즉, $S_{10}=\left(\frac{1}{10}\right)^9$

또

$$a_9=S_9-S_8=\left(\frac{1}{10}\right)^8-\left(\frac{1}{10}\right)^7$$
$$=\left(\frac{1}{10}\right)^8\times(1-10)$$
$$=(-9)\times\left(\frac{1}{10}\right)^8$$

따라서 $\frac{a_9}{S_{10}}=\frac{(-9)\times\left(\frac{1}{10}\right)^8}{\left(\frac{1}{10}\right)^9}=-90$

답 ②

8 $a_3=a_2-a_1=-2-a$

$a_4=a_3-a_2=(-2-a)-(-2)=-a$

$a_5=a_4-a_3=(-a)-(-2-a)=2$

$a_6=a_5-a_4=2-(-a)=2+a$

$a_7=a_6-a_5=(2+a)-2=a$

⋮

이때 $a>0$이므로

$|a_1|=a, |a_2|=2, |a_3|=2+a,$

$|a_4|=a, |a_5|=2, |a_6|=2+a, \cdots$

즉, 자연수 m에 대하여

$|a_{3m-2}|=a, |a_{3m-1}|=2, |a_{3m}|=2+a$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20}|a_k|=\sum_{k=1}^{18}|a_k|+|a_{19}|+|a_{20}|$$
$$=\sum_{k=1}^{18}|a_k|+|a_1|+|a_2|$$
$$=6\times(a+2+2+a)+a+2$$
$$=13a+26$$

이므로 $13a+26=130$에서 $a=8$

답 8

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 825	2 ⑤	3 6	4 ④	5 56

1 조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{3}a_k=5$이므로 조건 (나)에서

$3^2-c\times3+c+2=5$

$2c=6$에서 $c=3$

이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 조건 (나)에서

$S_n=n^2-3n+5$

(ⅰ) $a_1=S_1=1^2-3\times1+5=3$

(ⅱ) $n\ge2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2-3n+5)-\{(n-1)^2-3(n-1)+5\}\\&=2n-4\\&=2(n-2)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2&={a_1}^2+\sum_{k=2}^{10}{a_k}^2\\&=3^2+4\sum_{k=2}^{10}(k-2)^2\\&=9+4\times(0^2+1^2+2^2+\cdots+8^2)\\&=9+4\sum_{k=1}^{8}k^2\\&=9+4\times\frac{8\times9\times17}{6}\\&=9+816\\&=825\end{aligned}$$

답 825

2 (ⅰ) $n=1$일 때

$A_1=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$B_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A_1-B_1)\cup(B_1-A_1)=\{1, 7, 8\}$

즉, $a_1=1$

(ⅱ) $n=2$일 때

$A_2=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

$B_2=\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$이므로

$(A_2-B_2)\cup(B_2-A_2)=\{12\}$

즉, $a_2=12$

(ⅲ) $n\ge3$일 때

집합 A_n의 원소의 최솟값 (n^2+n)과 집합 B_n의 원소의 최솟값 $(2n^2-n)$을 비교하면

$(2n^2-n)-(n^2+n)=n^2-2n=n(n-2)$

$n\ge3$일 때 $n(n-2)>0$이므로

$n^2+n<2n^2-n$

즉, 집합 $(A_n-B_n)\cup(B_n-A_n)$의 원소의 최솟값은 항상 n^2+n이므로

$a_n=n^2+n$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\sum_{n=3}^{20}\frac{1}{a_n}\\&=1+\frac{1}{12}+\sum_{n=3}^{20}\frac{1}{n^2+n}\\&=\frac{13}{12}+\sum_{n=3}^{20}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{13}{12}+\sum_{n=3}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{13}{12}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\\&=\frac{13}{12}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}\right)\\&=\frac{13}{12}+\frac{2}{7}\\&=\frac{115}{84}\end{aligned}$$

답 ⑤

3 $a_2=a_1+2p+q$

$=30+2p+q$

$a_3=a_2+4p+q$

$=(30+2p+q)+4p+q$

$=30+6p+2q$

$a_4=a_3+6p+q$

$=(30+6p+2q)+6p+q$

$=30+12p+3q$

이때 $a_3>0$이므로

$30+6p+2q>0$에서 $q>-3p-15$ …… ㉠

또 $a_4<0$이므로

$30+12p+3q<0$에서 $q<-4p-10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3p-15<q<-4p-10$

그런데 $-3p-15$, $-4p-10$이 모두 정수이고, 정수 q가 존재해야 하므로 $(-4p-10)-(-3p-15)\ge2$가 성립해야 한다.

즉, $p\le3$이므로 $p=1$ 또는 $p=2$ 또는 $p=3$

(ⅰ) $p=1$일 때

$-18<q<-14$이므로 모든 순서쌍 (p, q)는

$(1, -17)$, $(1, -16)$, $(1, -15)$

(ⅱ) $p=2$일 때

$-21<q<-18$이므로 모든 순서쌍 (p, q)는

$(2, -20)$, $(2, -19)$

(ⅲ) $p=3$일 때

$-24<q<-22$이므로 모든 순서쌍 (p, q)는

$(3, -23)$

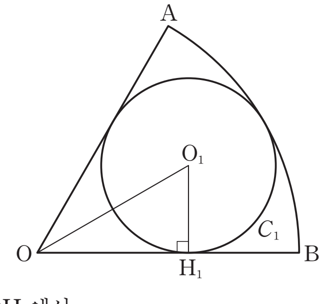
(i), (ii), (iii)에서 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는
$3+2+1=6$

답 6

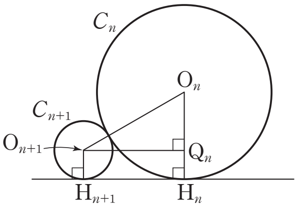
4 $S_1=a_1=6$이므로 $(*)$에 $n=1$을 대입하면
$2(S_2+S_1)=(S_2-S_1)^2$
$S_2=a_1+a_2=6+a_2$이므로
$2(6+a_2+6)=a_2^2$에서 $a_2^2-2a_2-24=0$
$(a_2+4)(a_2-6)=0$
$a_2=-4$ 또는 $a_2=6$
$a_2>0$이므로 $a_2=\boxed{6}$
한편, $(*)$에 n 대신 $n+1$을 대입하면
$2(S_{n+2}+S_{n+1})=(S_{n+2}-S_{n+1})^2$ …… ㉠
㉠$-(*)$에서
$2(S_{n+2}-S_n)=(S_{n+2}-S_{n+1})^2-(S_{n+1}-S_n)^2$
$2(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+2}^2-a_{n+1}^2$
$2(a_{n+2}+a_{n+1})=(a_{n+2}+a_{n+1})(a_{n+2}-a_{n+1})$
$a_{n+2}+a_{n+1}>0$이므로
$a_{n+2}-a_{n+1}=\boxed{2}$
따라서 $n\geq2$일 때 수열 $\{a_n\}$은 $a_2=6$이고 공차가 2인 등차수열이므로
$a_1=6,\ a_n=\boxed{2n+2}\ (n\geq2)$
이상에서 $p=6,\ q=2,\ f(n)=2n+2$이므로
$\dfrac{p+f(10)}{q}=\dfrac{6+22}{2}=14$

답 ④

5 원 C_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하고, 점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O_1OH_1}$에서
$\overline{\mathrm{O_1H_1}}=a_1,\ \overline{\mathrm{OO_1}}=6-a_1$이고, $\angle\mathrm{O_1OH_1}=\dfrac{\pi}{6}$이므로
$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{\mathrm{O_1H_1}}}{\overline{\mathrm{OO_1}}}$
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_1}{6-a_1}$에서
$a_1=2$
한편, 원 C_n의 중심을 O_n이라 하고, 점 O_n에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{O}_n\mathrm{H}_n$에 내린 수선의 발을 Q_n이라 하면 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{Q}_n$에서
$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=a_n+a_{n+1},\ \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{Q}_n}=a_n-a_{n+1}$이고,
$\angle\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\dfrac{\pi}{6}$이므로
$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{Q}_n}}{\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}}$
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$에서
$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$
따라서 $p=2,\ q=\dfrac{1}{3}$이므로
$24(p+q)=24\times\left(2+\dfrac{1}{3}\right)$
$=48+8$
$=56$

답 56