

쌍곡선 유제 1번

쌍곡선 $\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이다. 두 양수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

① $2\sqrt{10}$

② $\sqrt{42}$

③ $2\sqrt{11}$

④ $\sqrt{46}$

⑤ $4\sqrt{3}$

쌍곡선 유제 2번

그림과 같은 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} = -1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여

$\angle FPF' = \theta$ 라 하자. $\overline{PF} : \overline{PF'} = 1 : 2$ 일 때, $\cos \theta$ 의 값은?

(단, 점 F의 y좌표는 점 F'의 y좌표보다 크다.)

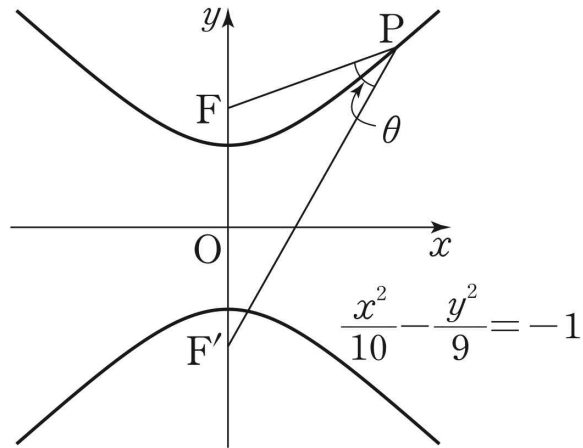
① $\frac{2}{3}$

② $\frac{25}{36}$

③ $\frac{13}{18}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{9}$



쌍곡선 유제 3번

쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 한 초점 F와 한 점근선 l 사이의 거리는?

(단, 점 F의 x 좌표는 양수이고, 점근선 l 의 기울기는 양수이다.)

① $\sqrt{3}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{7}$

쌍곡선 유제 4번

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{5} = 1$ 을 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 쌍곡선이 직선 $y = 3x + 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양의 정수 k 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

쌍곡선 유제 5번

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 (3, 2)에서의 접선의 y 절편은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{1}{5}$

쌍곡선 유제 6번

직선 $y = 3x + 4$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5a^2} = 1$ 에 접할 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는?

(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

쌍곡선 Level 1 1번

두 초점이 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$ 일 때, $3a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$)

① 28

② 30

③ 32

④ 34

⑤ 36

쌍곡선 Level 1 2번

두 초점이 $F(0, 3)$, $F'(0, -3)$ 이고 점 $P(4, 5)$ 를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는?

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{3}$

③ 4

④ $2\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{6}$

쌍곡선 Level 1 3번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에 대하여 점 F를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PF'Q의 둘레의 길이가 40일 때, 선분 PQ의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크고, 두 점 P, Q의 x좌표는 양수이다.)

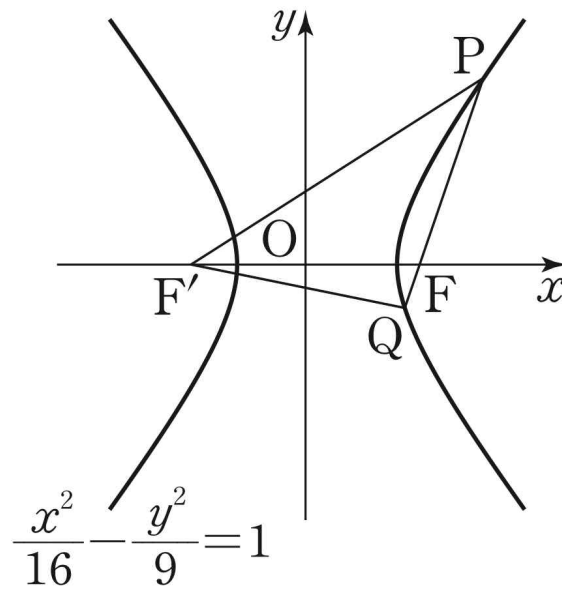
① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16



쌍곡선 Level 1 4번

두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF'} : \overline{PF} = 3 : 2$ 일 때,
 $\overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2$ 의 값은?

① 300

② 350

③ 400

④ 450

⑤ 500

쌍곡선 Level 1 5번

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 점근선과 직선 $y=2$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라

할 때, 삼각형 OPQ의 넓이는?

(단, O는 원점이고 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크다.)

① $\frac{16}{3}$

② $\frac{17}{3}$

③ 6

④ $\frac{19}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

쌍곡선 Level 1 6번

직선 $2x - 3y - 4 = 0$ 이 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $b > 0$)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

쌍곡선 Level 1 7번

직선 $y = 2x + 3$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a} = 1$ 에 접할 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는?
(단, $a > 0$)

① 6

② $2\sqrt{10}$

③ $2\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{13}$

쌍곡선 Level 1 8번

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 3$ 위의 점 $P(2, -1)$ 에서의 접선이 이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 지나는 원의 넓이는?

① 2π

② 3π

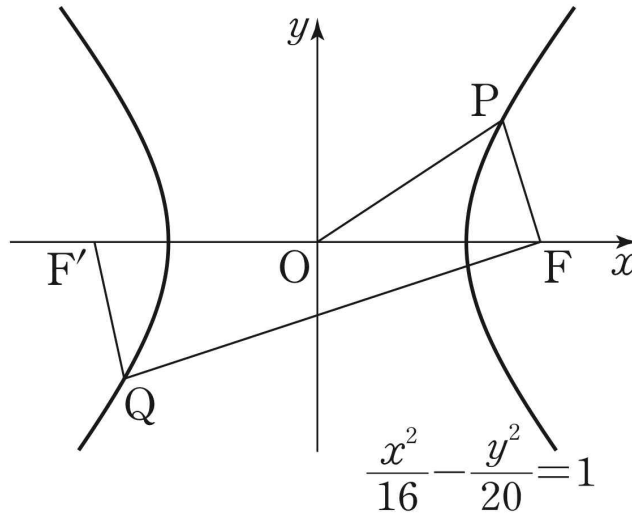
③ 4π

④ 5π

⑤ 6π

쌍곡선 Level 2 1번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 이 있다. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 제3사분면에 있는 점 Q에 대하여 삼각형 OFP는 $\overline{OF} = \overline{OP}$ 인 이등변삼각형이고 삼각형 FF'Q는 $\overline{FF'} = \overline{F'Q}$ 인 이등변삼각형일 때, $(\overline{PF'} - \overline{F'Q})^2$ 의 값을 구하시오.
 (단, O는 원점이고, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크다.)



쌍곡선 Level 2 2번

그림과 같이 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 점 $A(0, \sqrt{5})$ 에 대하여 $\overline{PF'} + \overline{PA}$ 의 값이 최소일 때, 선분 PF'의 길이는?
(단, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크다.)

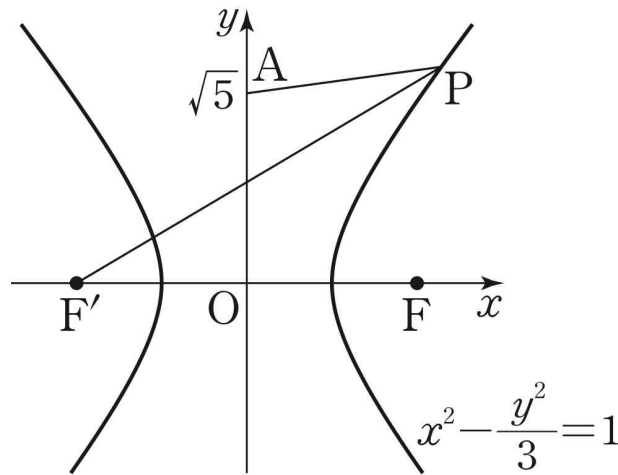
① $\frac{22}{7}$

② $\frac{23}{7}$

③ $\frac{24}{7}$

④ $\frac{25}{7}$

⑤ $\frac{26}{7}$

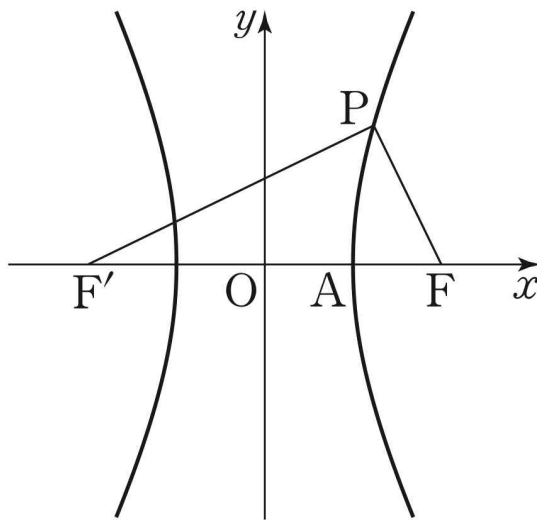


쌍곡선 Level 2 3번

그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선의 한 꼭짓점을 $A(a, 0)$ ($a > 0$)이라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+c$ 의 값은?
(단, O 는 원점이다.)

(가) $\overline{PF'} = \overline{PF} + 2\overline{AF}$, $\overline{OP} = \overline{OF}$
(나) 삼각형 OAP 의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 이다.

- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{2}$



쌍곡선 Level 2 4번

좌표평면에서 기울기가 2인 직선 l 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

직선 l 과 직선 $x = 1$ 이 만나는 점을 Q 라 하면 $2\overline{OP} = \overline{PQ}$ 이다.

점 $A(10, 0)$ 에 대하여 $|\overline{OP} - \overline{AP}|$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① 4

② $4\sqrt{2}$

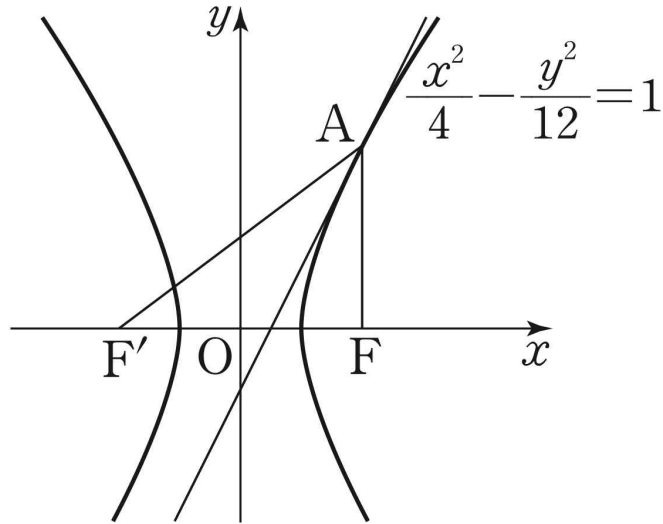
③ $4\sqrt{3}$

④ 8

⑤ $4\sqrt{5}$

쌍곡선 Level 2 5번

그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 A 에서의 접선의 기울기가 2일 때, 삼각형 $AF'F$ 의 둘레의 길이를 구하시오.
(단, 점 F 의 x 좌표는 점 F' 의 x 좌표보다 크다.)



쌍곡선 Level 2 6번

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선에 평행하고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2 라 하자. 점 $(a, 0)$ 과 직선 l_1 또는 직선 l_2 사이의 거리가 1이 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은?

① $\frac{7}{3}$

② $\frac{8}{3}$

③ 3

④ $\frac{10}{3}$

⑤ $\frac{11}{3}$

쌍곡선 Level 2 7번

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 이 제2사분면에서 만나는 점을 P라 하자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P에서의 접선을 l 이라 할 때,

직선 l 은 쌍곡선 $(x-m)^2 - \frac{(y+2\sqrt{2})^2}{n} = 1$ 의 한 점근선이다. 두 상수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은? (단, $n > 0$)

① 1

② 2

③ 3

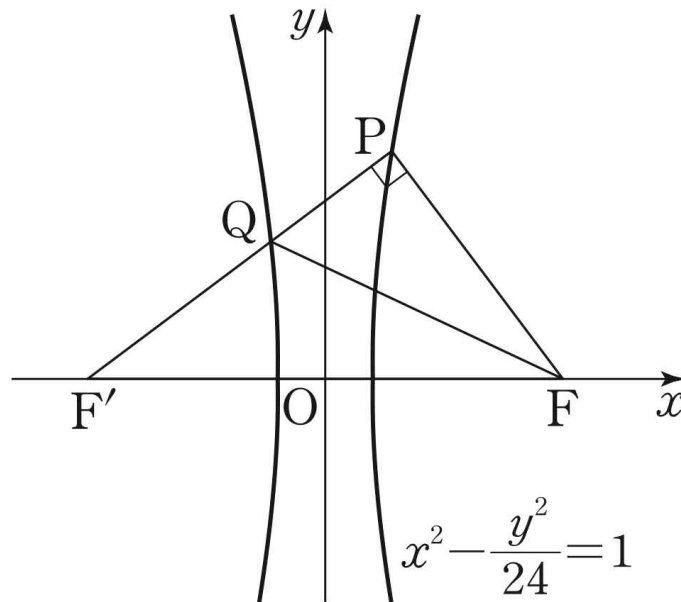
④ 4

⑤ 5

쌍곡선 Level 3 1번

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 할 때, 점 F' 을 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P , Q 라 하자. 두 직선 PF , PF' 이 서로 수직일 때, 삼각형 $QF'F$ 의 둘레의 길이는?
(단, 점 P 는 제1사분면에 있고 점 Q 는 제2사분면에 있다.)

- ① 20 ② $\frac{102}{5}$ ③ $\frac{104}{5}$ ④ $\frac{106}{5}$ ⑤ $\frac{108}{5}$



쌍곡선 Level 3 2번

그림과 같이 두 점 $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 점 F' 을 지나는 직선이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A , B 라 하자. $\overline{AF'} = 2 - \sqrt{2}$, $\overline{AF} = 2 + \sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 BFF' 의 넓이는?
(단, 점 A 는 제2사분면에 있고 점 B 는 제3사분면에 있다.)

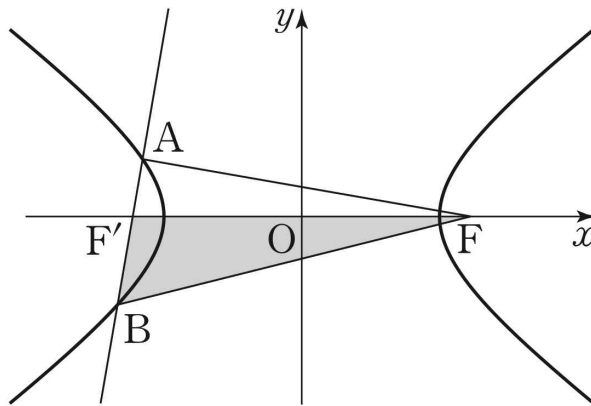
① $\frac{4+3\sqrt{2}}{7}$

② $\frac{4+4\sqrt{2}}{7}$

③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$

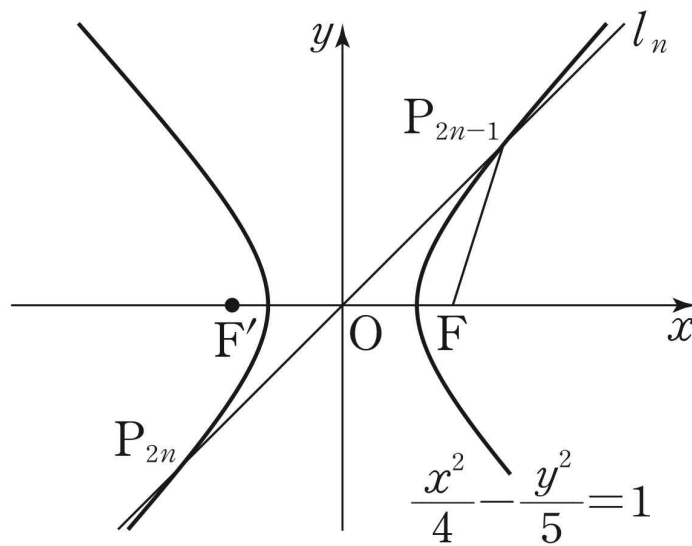
⑤ $\frac{6+5\sqrt{2}}{7}$



쌍곡선 Level 3 3번

그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 원점 O 를
 지나는 직선 l_n 이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P_{2n-1}, P_{2n} 이라 하자.
 $\overline{P_{2n-1}F} = n + 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20} \overline{P_n F}$ 의 값은? (단, 점 F 의 x 좌표는 점 F' 의 x 좌표보다 크고, 점
 P_{2n-1} 은 제1사분면에 있으며 점 P_{2n} 은 제3사분면에 있다.)

- ① 130 ② 140 ③ 150 ④ 160 ⑤ 170



쌍곡선 유제 1번

쌍곡선 $\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이다. 두 양수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

① $2\sqrt{10}$

② $\sqrt{42}$

③ $2\sqrt{11}$

④ $\sqrt{46}$

⑤ $4\sqrt{3}$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$\text{우축 길이 } 4 \rightarrow a=2 \quad b=2\sqrt{3}$$

쌍곡선 유제 2번

그림과 같은 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} = -1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여

$\angle FPF' = \theta$ 라 하자. $\overline{PF} : \overline{PF'} = 1 : 2$ 일 때, $\cos \theta$ 의 값은?

(단, 점 F의 y좌표는 점 F'의 y좌표보다 크다.)

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{25}{36}$

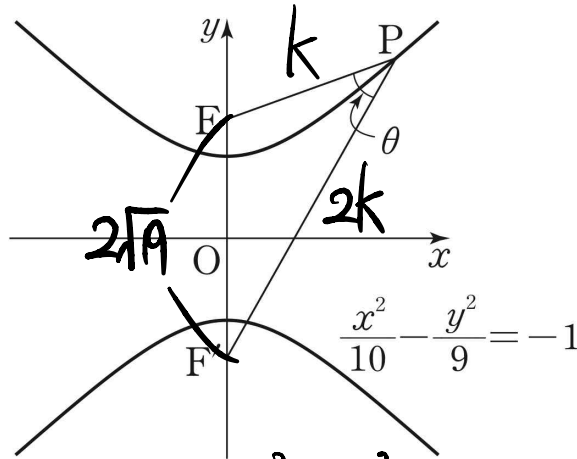
③ $\frac{13}{18}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{7}{9}$

주축 길이 6

$k=6$



$$\cos \theta = \frac{12^2 + 6^2 - 4 \times 19}{2 \times 6 \times 12} = \frac{13}{18}$$

쌍곡선 유제 3번

쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 한 초점 F와 한 점근선 l 사이의 거리는?

(단, 점 F의 x좌표는 양수이고, 점근선 l의 기울기는 양수이다.)

① $\sqrt{3}$

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{7}$

$$F(3,0) \quad l: y = \frac{1}{\sqrt{2}}x \rightarrow x - \sqrt{2}y = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

쌍곡선 유제 4번

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{5} = 1$ 을 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 쌍곡선이 직선 $y = 3x + 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양의 정수 k 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

$$x^2 - \frac{(y-k)^2}{5} = 1$$

$$5x^2 - (3x + 1 - k)^2 = 5$$

$$\rightarrow 5x^2 - [9x^2 + 6(1-k)x + (1-k)^2] = 5$$

$$\rightarrow 4x^2 + 6(1-k)x + (1-k)^2 - 5 = 0 \quad D > 0$$

$$3^2(1-k)^2 - 4[(1-k)^2 - 5] > 0$$

$$5(1-k)^2 - 20 > 0$$

$$(k-1)^2 > 4$$

자연수 k 의 최솟값 = 4

$$x = \frac{y-1}{3} \text{로 하는 게 나은 듯함.}$$

쌍곡선 유제 5번

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 (3, 2)에서의 접선의 y 절편은?

-1

$-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{5}$

$$x - y = 1$$

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

쌍곡선 유제 6번

직선 $y = 3x + 4$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5a^2} = 1$ 에 접할 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는?

(단, $a > 0$)

$$2|a| = ?$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

$$y = 3x \pm \sqrt{9a^2 - 5a^2}$$

$$y = 3x \pm 2a$$

쌍곡선 Level 1 1번

두 초점이 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$ 일 때, $3a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$)

① 28

② 30

③ 32

④ 34

⑤ 36

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$2a = 6$$

$$a^2 = 9 \quad b^2 = 7$$

쌍곡선 Level 1 2번

두 초점이 $F(0, 3)$, $F'(0, -3)$ 이고 점 $P(4, 5)$ 를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는?

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{3}$

③ 4

$2\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{6}$

$$\overline{PF'} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

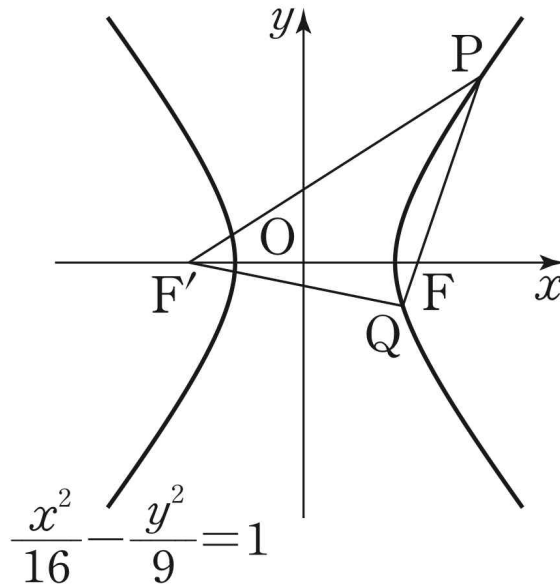
쌍곡선 Level 1 3번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에 대하여 점 F를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PF'Q의 둘레의 길이가 40일 때, 선분 PQ의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크고, 두 점 P, Q의 x좌표는 양수이다.)

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

주축 길이 8



$$\overline{PQ} = l \text{ 이라 하면 } \overline{PF'} + \overline{QF'} = l + 2 \times \text{주축} \\ = l + 16$$

$$2l + 16 = 40 \quad \therefore l = 12$$

쌍곡선 Level 1 4번

두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF'} : \overline{PF} = 3 : 2$ 일 때,
 $\overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2$ 의 값은?

3k 2k

① 300

② 350

③ 400

④ 450

⑤ 500 ✓

$$\text{주축 길이 } 10 = 3k - 2k \quad \therefore k = 10$$

$$5k^2 = 500$$

쌍곡선 Level 1 5번

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 점근선과 직선 $y=2$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라

할 때, 삼각형 OPQ의 넓이는?

(단, O는 원점이고 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크다.)

① $\frac{16}{3}$

② $\frac{17}{3}$

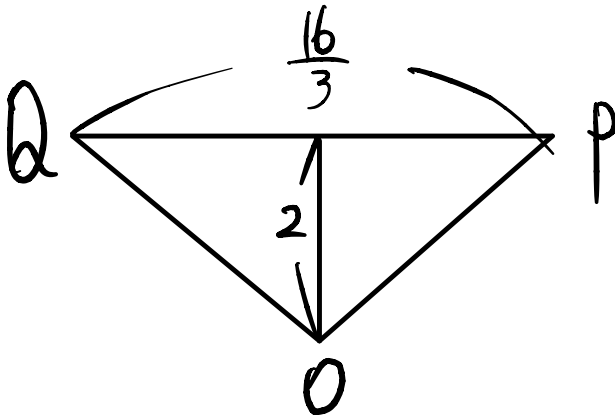
③ 6

④ $\frac{19}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

$$y = \pm \frac{3}{4}x$$

$$\left(\frac{8}{3}, 2\right), \left(-\frac{8}{3}, 2\right)$$



쌍곡선 Level 1 6번

직선 $2x - 3y - 4 = 0$ 이 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $b > 0$)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

$$l: 2x - 3y - 4 = 0$$

$$l \text{ 은 } (a, 0) \text{ 지남} \rightarrow a = 2$$

$$\text{기울기 } \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow b = 2$$

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

쌍곡선 Level 1 7번

직선 $y = 2x + 3$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a} = 1$ 에 접할 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는?
(단, $a > 0$)

① 6

② $2\sqrt{10}$

③ $2\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{13}$

$$3 = \sqrt{4 \times 4 - a}$$

$$9 = 16 - a$$

$$a = 7$$

$$F(\sqrt{11}, 0) \quad F'(-\sqrt{11}, 0)$$

쌍곡선 Level 1 8번

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 3$ 위의 점 $P(2, -1)$ 에서의 접선이 이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 지나는 원의 넓이는?

① 2π

② 3π

③ 4π

④ 5π ✓

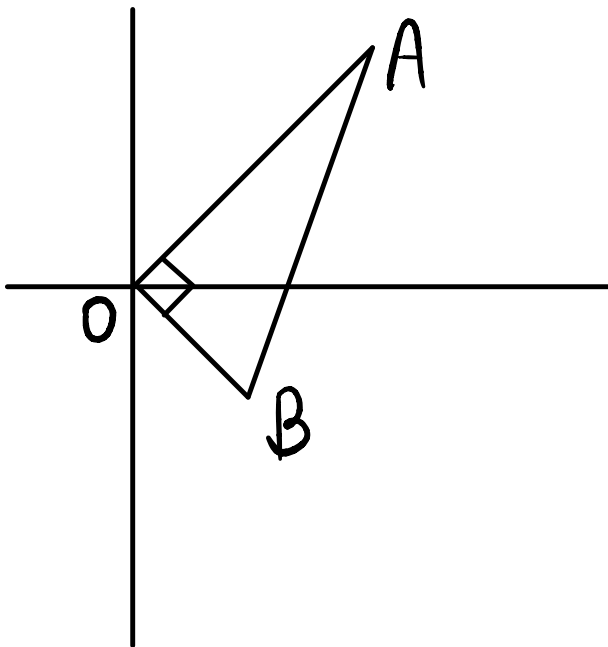
⑤ 6π

점근선 : $y = \pm x$

P에서의 접선 $2x - y = 3$

A (a, a) $\rightarrow a = 3$

B (b, -b) $\rightarrow b = 1$



지름 길이 \overline{AB}

넓이 $\frac{1}{4} \overline{AB}^2 \times \pi$

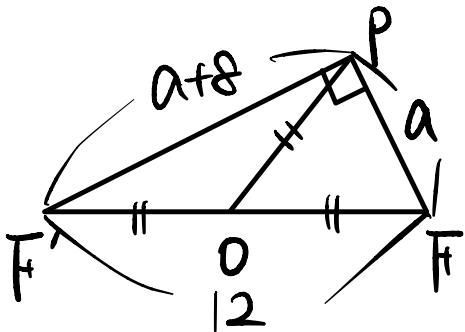
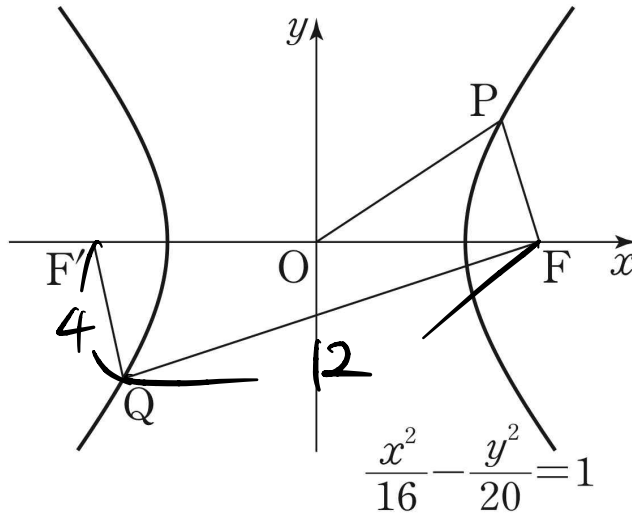
$= \frac{1}{4} \times (2^2 + 4^2) \pi$

$= 5\pi$

쌍곡선 Level 2 1번

F(6,0) F'(-6,0) 주축 길이 8

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 이 있다. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 제3사분면에 있는 점 Q에 대하여 삼각형 OFP는 $\overline{OF} = \overline{OP}$ 인 이등변삼각형이고 삼각형 FF'Q는 $\overline{FF'} = \overline{F'Q}$ 인 이등변삼각형일 때, $(\overline{PF'} - \overline{F'Q})^2$ 의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크다.)



$$a^2 + (a+8)^2 = 144$$

$$2a^2 + 16a + 64 = 144$$

$$a^2 + 8a + 32 = 72$$

$$\overline{PF'} - \overline{F'Q} = a+4$$

$$(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16 = 72 - 16 = \boxed{56}$$

쌍곡선 Level 2 2번

F(2, 0) 주축 길이 2

그림과 같이 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에

있는 점 P와 점 A(0, $\sqrt{5}$)에 대하여 $\overline{PF'} + \overline{PA}$ 의 값이 최소일 때, 선분 PF'의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크다.)

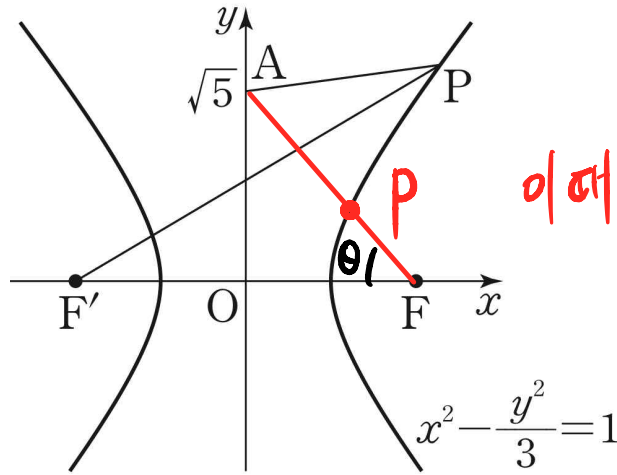
① $\frac{22}{7}$

② $\frac{23}{7}$

③ $\frac{24}{7}$

④ $\frac{25}{7}$

⑤ $\frac{26}{7}$

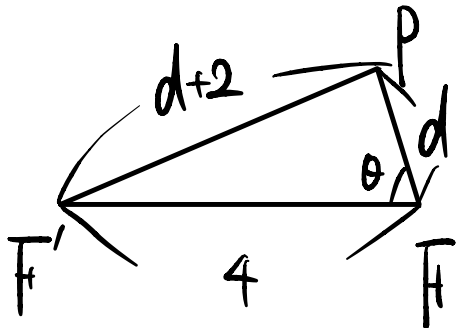


이때 최소

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2$$

$$\overline{PF'} + \overline{PA} = \underline{\overline{PA} + \overline{PF} + 2}$$



$$(d+2)^2 = d^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times d \times \frac{2}{3}$$

$$4d + 4 = 16 - \frac{16}{3}d$$

$$\therefore d = \frac{9}{7}, \quad d+2 = \frac{23}{7}$$

문제 드레 풀은 것 같네요

쌍곡선 Level 2 3번

그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선의 한 꼭짓점을 $A(a, 0)$ ($a > 0$)이라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+c$ 의 값은?
(단, O 는 원점이다.)

- (가) $\overline{PF'} = \overline{PF} + 2\overline{AF}$, $\overline{OP} = \overline{OF}$
 (나) 삼각형 OAP 의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 이다.

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{3}$

③ $3\sqrt{2}$ ✓

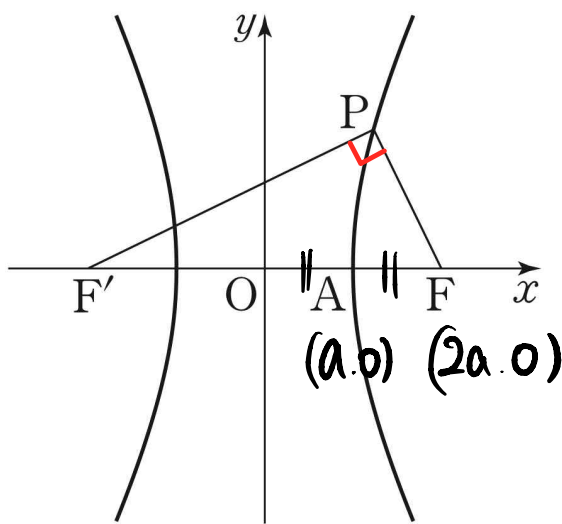
④ $3\sqrt{3}$

⑤ $4\sqrt{2}$

(가) $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2\overline{AF}$

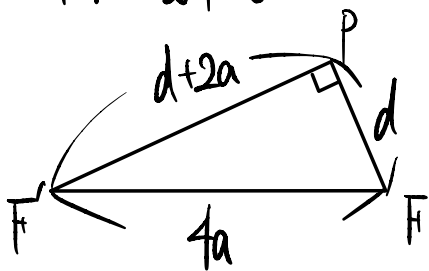
주축 길이 = $2\overline{OA} = 2\overline{AF}$

$\therefore c = 2a$



(나) $\triangle F'FP$ 넓이 3

$\triangle F'FP$ 넓이 6



$d \times (d+2a) = 12$

$d^2 + (d+2a)^2 = (4a)^2$

$2d^2 + 4ad + 4a^2 = 16a^2$

$2d(d+2a) = 12a^2$

$\rightarrow d(d+2a) = 6a^2 = 12$

$\therefore a = \sqrt{2}$

$a + c = 3a = 3\sqrt{2}$

쌍곡선 Level 2 4번

좌표평면에서 기울기가 2인 직선 l 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

직선 l 과 직선 $x=1$ 이 만나는 점을 Q 라 하면 $2\overline{OP} = \overline{PQ}$ 이다.

점 $A(10,0)$ 에 대하여 $|\overline{OP} - \overline{AP}|$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① 4

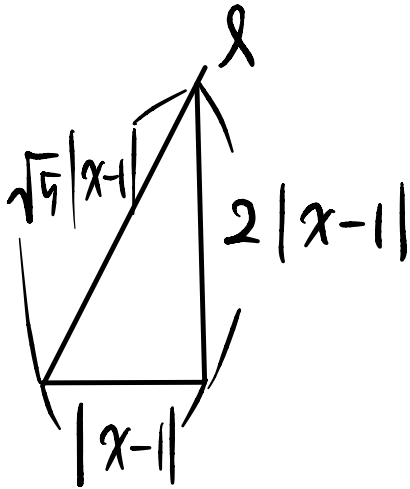
② $4\sqrt{2}$

③ $4\sqrt{3}$

④ 8

⑤ $4\sqrt{5}$ ✓

$P(x, y) \quad Q(1, y')$



$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{5}}{2} |x-1|$$

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{4} (x-1)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 5(x-1)^2$$

$$x^2 - 10x + 5 - 4y^2 = 0$$

$$(x^2 - 10x + 25) - 4y^2 = 20$$

$$\frac{(x-5)^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

초점 O, A

주축 길이 $4\sqrt{5}$

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

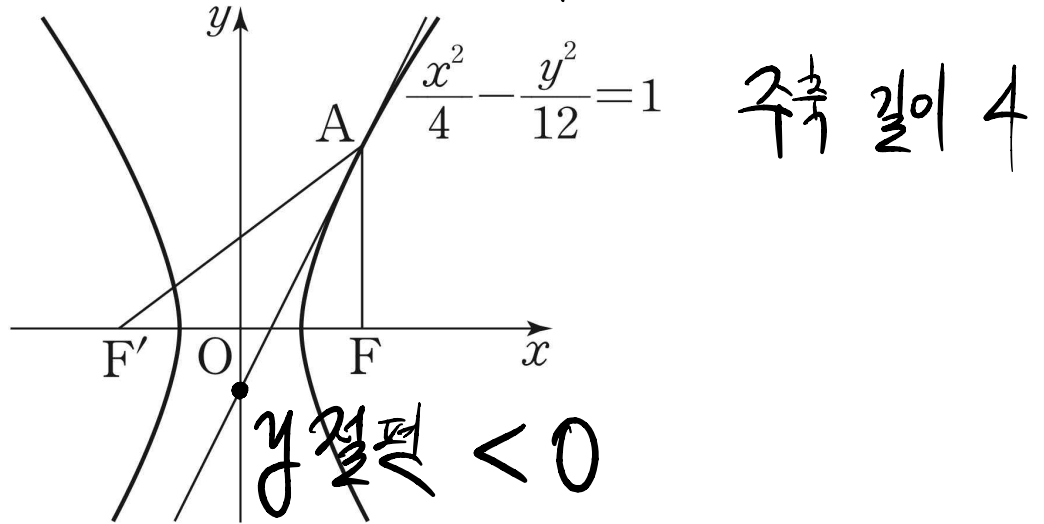
쌍곡선 Level 2 5번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의

접선의 기울기가 2일 때, 삼각형 AF'F의 둘레의 길이를 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표보다 크다.)

$$F(4.0) \quad F'(-4.0)$$



$$y = 2x \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$x^2 - (2x - 2)^2 = 12$$

$$y = 2x - 2$$

$$x^2 - (4x^2 - 8x + 4) = 12$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = 4$$

$$A(4, 6) \quad \overline{AF} = 6 \quad \overline{AF'} = 10$$

∴ 삼각형 둘레 길이

24

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

쌍곡선 Level 2 6번

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선에 평행하고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2 라 하자. 점 $(a, 0)$ 과 직선 l_1 또는 직선 l_2 사이의 거리가 1이 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은?

① $\frac{7}{3}$

② $\frac{8}{3}$

③ 3

④ $\frac{10}{3}$

⑤ $\frac{11}{3}$

기울기 $\frac{3}{4}$

$$y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$y = \frac{3}{4}x \pm \frac{1}{2}$$

$$l_1: 3x - 4y + 2 = 0$$

$$\frac{|3a + 2|}{4} = 1$$

$$l_2: 3x - 4y - 2 = 0$$

$$\frac{|3a - 2|}{4} = 1$$

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{7}{3}$$

$$\frac{x^2}{8} = X, \quad \frac{y^2}{4} = Y$$

쌍곡선 Level 2 7번

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 이 제2사분면에서 만나는 점을 P라 하자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P에서의 접선을 l이라 할 때,

직선 l은 쌍곡선 $(x-m)^2 - \frac{(y+2\sqrt{2})^2}{n} = 1$ 의 한 점근선이다. 두 상수 m, n에 대하여 m+n의 값은? (단, n > 0)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

$$\begin{cases} X+Y=1 \\ 4X-2Y=1 \end{cases} \rightarrow X=Y=\frac{1}{2}$$

$$P(-\sqrt{8X}, \sqrt{4Y})$$

$$P(-2, \sqrt{2})$$

$$l: -x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1$$

$$l: \sqrt{2}x + y = -\sqrt{2}$$

l이 $(m, -2\sqrt{2})$ 지나고 기울기는 $-\sqrt{n}$

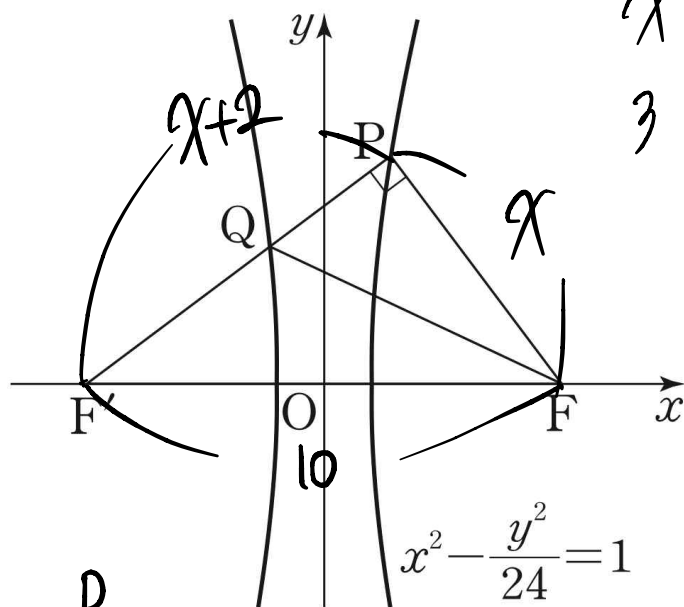
$$m=1, n=2$$

주축 길이 2 $c=4$

쌍곡선 Level 3 1번

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 할 때, 점 F' 을 지나고 직선이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P , Q 라 하자. 두 직선 PF , PF' 이 서로 수직일 때, 삼각형 $QF'F$ 의 둘레의 길이는?
(단, 점 P 는 제1사분면에 있고 점 Q 는 제2사분면에 있다.)

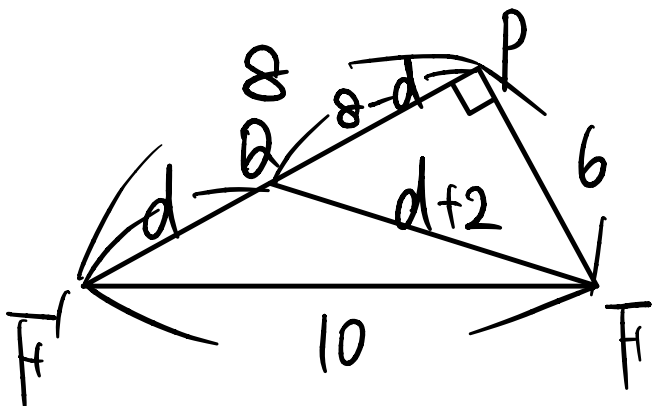
- ① 20 ② $\frac{102}{5}$ ③ $\frac{104}{5}$ ④ $\frac{106}{5}$ ⑤ $\frac{108}{5}$



$$x^2 + (x+2)^2 = 10^2$$

$$3 : 4 : 5$$

$$x = 6$$



$$(8-d)^2 + \frac{36}{6} = (d+2)^2$$

$$d^2 - 16d + 100 = d^2 + 4d + 4$$

$$20d = 96$$

$$2d = \frac{48}{5}$$

$$2d + 12 = \frac{48 + 60}{5} = \frac{108}{5}$$

숫자 깔끔하게 냈으면 직각 찾기 쉽고 이후 계산도 쉬워서
일부러 더럽게 낸 듯함

쌍곡선 Level 3 2번

그림과 같이 두 점 $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 점 F' 을 지나는 직선이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A , B 라 하자. $\overline{AF'} = 2 - \sqrt{2}$, $\overline{AF} = 2 + \sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 BFF' 의 넓이는?
(단, 점 A 는 제2사분면에 있고 점 B 는 제3사분면에 있다.)

① $\frac{4+3\sqrt{2}}{7}$

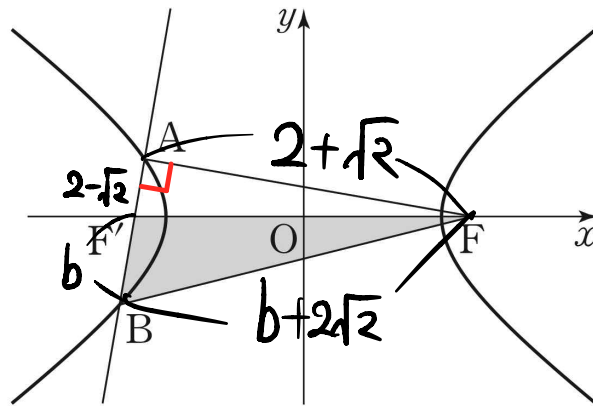
② $\frac{4+4\sqrt{2}}{7}$

③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$

⑤ $\frac{6+5\sqrt{2}}{7}$

주축 길이 $2\sqrt{2}$



삼각형 BFF'

밑변 : $\overline{F'B}$

높이 : \overline{AF}

$$(2+\sqrt{2})^2 = 6+4\sqrt{2}$$

$$\therefore (2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 = 12$$

$$(2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 = \overline{FF'}^2}}$$

$$(b+2-\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{2})^2 = (b+2\sqrt{2})^2$$

$$b^2 + 2(2-\sqrt{2})b + 12 = b^2 + 4\sqrt{2}b + 8$$

$$\longrightarrow (6\sqrt{2}-4)b = 4$$

$$b = \frac{2 \times (3\sqrt{2}+2)}{(3\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+2)} = \frac{3\sqrt{2}+2}{7}$$

$$\frac{1}{2} \times b \times (2+\sqrt{2}) = \frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

구축 길이 4

쌍곡선 Level 3 3번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 원점 O를
지나는 직선 l_n 이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P_{2n-1} , P_{2n} 이라 하자.

$\overline{P_{2n-1}F} = n+1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20} \overline{P_n F}$ 의 값은? (단, 점 F의 x 좌표는 점 F'의 x 좌표보다 크고, 점 P_{2n-1} 은 제1사분면에 있으며 점 P_{2n} 은 제3사분면에 있다.)

① 130

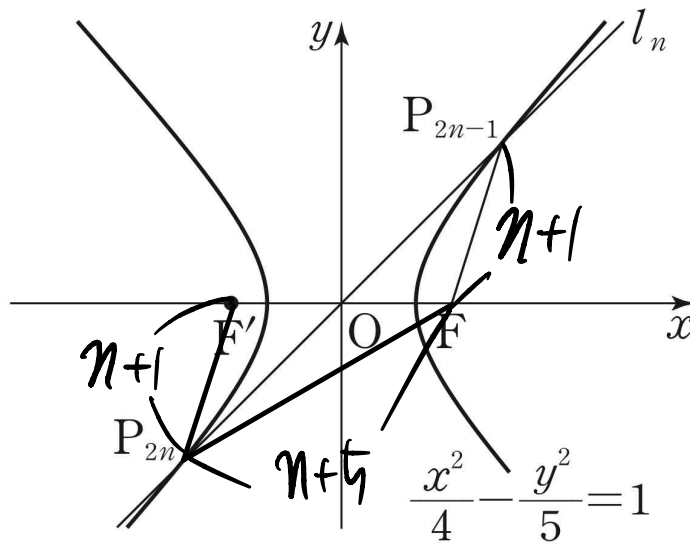
② 140

③ 150

④ 160

⑤ 170

P_{2n-1}, P_{2n}
일점 대칭



$$\sum_{n=1}^{20} \overline{P_n F} = \sum_{n=1}^{10} \left[\overline{P_{2n-1} F} + \overline{P_{2n} F} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (2n + 6)$$

$$= 110 + 60 = 170$$