부산교육 2011-165

2011학년도 대학별 **수리논술고사** 분석

수리논술 나침반 Ⅲ

부산광역시교육청
http://www.pen.go.kr

발 간 사

가르치는 일과 배우는 일은 동시에 일어납니다. 이런 까닭으로 선현들께서는 '교학상장(敎學相長)'이라 일렀습니다. 공부는 널리 배우고, 신중하게 생각하며, 성실하게 실천해야 제대로 하는 것입니다. 그렇게 할 때라야 공부가 몸에 배고 마음속에 간직됩니다. 학교생활을 하면서 학생들은 공부하는 교사들을 통해 단지 지식만 배우지 않습니다. 지식보다 더 중요한 공부하는 자세를 배웁니다. 그래서 교사를 '사표(師表)'라 합니다.

현실에 안주하지 않고 지적 갈증에 목마른 교사가 많은 나라, 제자를 더 잘 가르치기 위해 자아연찬에 애쓰는 교원이 많은 나라, 그런 나라가 교육선진국입니다. 세계가 주목하고 있는 핀란드의 교육도 우수한 교원들에 의해 주도되고 있습니다. 우리나라 교원의 잠재적 자질과 능력 면에서 볼 때 핀란드와 견주어 결코 뒤서지 않습니다. 우리가 '학교'를 '마주침'의 순간이 아닌, '만남'의 공간으로 만들어 간다면, 우리 교육은 지금보다 훨씬 더 풍요로워질 것입니다.

대학 진학 지도의 꼭짓점에 있는 대학별 수리논술고사 공부는 교사와 학생 모두에게 어렵고 힘든 과제입니다. 그 공부를 즐겁고 행복하게 할 수 있도록 하기 위하여, 늘 처음처럼 열심히 공부하는 선생님들이 지혜와 열정을 모아 『수리논술 나침반 Ⅲ』을 만들었습니다. 2011학년도 대학별 수리논술고사의 출제경향을 분석하여 깊이 있고 풍부한 설명을 덧붙인 장학자료입니다. 그 노고와 정성의 깊이를 한눈에 확인할 수 있어 반갑고 고맙습니다.

본 장학자료는 학생들을 잘 가르치기 위해 노력하는 교사들과 언제나 학생들을 잘 가르치겠다고 다짐하는 교사들에게는 많은 도움이 될 것입니다. 가르치는 재미와 공부하는 재미를 더하는 데 긴요하게 활용하기를 바랍니다.

장학자료 개발을 위해 애쓰신 우리교육청 논술교육지원단과 수학나침반 동아리 선생님들께 감사의 말씀을 드립니다.

2011. 4. 22.

부산광역시교육감 **임 혜 경**

차 례

C/O/N/T/E/N/T/S

2011학년도 대학별 **수리논술고사** 분석

수리논술 나침반 Ⅲ

발 간 사

01. 경희대학교 모의 ······ 1
02. 경희대학교 수시 ······ 10
03. 고려대학교 모의 ······ 19
04. 고려대학교 수시 ······ 30
05. 서강대학교 수시1차 ······ 43
06. 서강대학교 수시2차 ······ 60
07. 서울대학교 정시 ······ 73
08. 서울시립대학교 모의 ······ 86
09. 성균관대학교 모의 ······ 97
10. 성균관대학교 수시 ······ 106
11. 숭실대학교 수시 ······ 118
12. 아주대학교 예시(일반학부) ······ 126
13. 아주대학교 예시(의학부) ······ 144
14. 연세대학교 예시 ······ 153
15. 연세대학교 수시 ······ 164
16. 인하대학교 모의 ······ 178
17. 인하대학교 수시 ······ 188
18. 중앙대학교 모의 ······ 201
19. 한국외국어대학교 수시 ······ 213
20. 한양대학교 모의 ······ 223
21. 한양대학교 수시 2차(오전) ······ 234
22. 한양대학교 수시 2차(오후) ······ 249

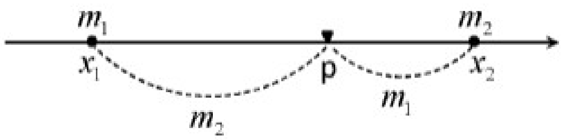
1 경희대학교 모의

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

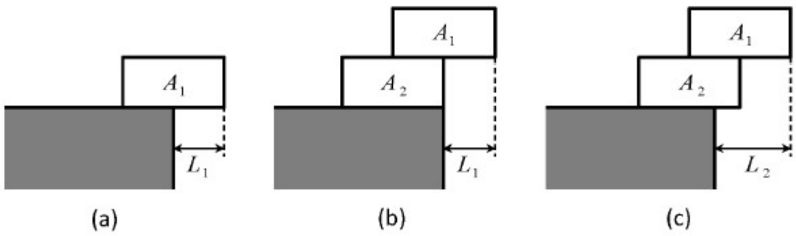
[논제 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 여러 물체로 이루어진 계(system)의 물리적 현상을 분석할 때 이 물체들 전체의 질량이 어떤 한 점에 집중되어 있는 것처럼 취급하면 편리할 때가 많다. 이 점을 그 계의 질량중심(또는 무게중심)이라 하는데, 특히 질량이 각각 m_1, m_2 인 크기를 무시할 수 있는 두 개의 물체로 이루어진 계의 질량중심은 아래 그림처럼 두 물체를 연결하는 선분을 $m_2 : m_1$ 으로 내분하는 위치에 있다. (즉, $\overline{x_1p} : \overline{px_2} = m_2 : m_1$) 이것은 두 물체를 질량을 무시할 수 있는 막대로 연결할 경우 이 막대의 균형을 유지하게 하는 받침점의 위치와 같다.



질량이 각각 m_1, m_2, m_3 인 세 개의 물체로 이루어진 계의 질량중심은 먼저 질량이 $m_1 + m_2$ 인 물체가 m_1 과 m_2 의 질량중심에 위치하는 것으로 생각하고 이 물체와 m_3 와의 질량중심으로 구하여 전체 계의 질량중심을 구할 수 있다.

(나) 질량중심을 이용하여 다음의 벽돌쌓기 문제를 해결해 보자. 벽돌의 조성이 균질하다고 가정하면 그 질량중심은 벽돌의 한가운데에 위치할 것이고 하나의 벽돌을 <그림 (a)>와 같이 책상의 모서리에서 가장 길게 내밀 수 있는 한계는 벽돌의 질량중심이 모서리와 같은 수직선상에 위치할 때이다. 그렇다면 동일한 벽돌 두 장을 쌓아서 모서리로부터 가장 길게 내밀려면 어떻게 해야 할까? 이 문제는 다음과 같은 순서로 생각해 볼 수 있다. 먼저 벽돌 A_1 의 수평위치를 유지한 채 벽돌 A_2 를 <그림 (b)>처럼 놓는다. 그 다음 벽돌 A_1 이 미끄러지지 않게 벽돌 A_2 를 조심스럽게 모서리 쪽으로 밀면 두 벽돌 전체의 질량중심이 모서리를 지나치지 않는 한 이 탑은 무너지지 않을 것이다.<그림 (c)>



(a) (b) (c)

[논제1-1] 제시문 (가), (나)를 참조하여 다음의 질문에 답하시오.

(1) 제시문 (가)에서 두 물체의 직선 위의 위치를 각각 x_1, x_2 라 할 때 질량중심의 위치 p 를 구하시오.

(2) 한 직선 위에 질량이 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 인 물체들이 각각 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 의 위치에 있을 때 물체들 전체의 질량중심을 제시문 (가)와 수학적귀납법을 이용하여 구하시오.

(3) 제시문 (나)에서 벽돌 하나의 길이가 2라면 그림 (c)처럼 A_1 의 끝에서부터 책상 모서리까지의 수평 거리의 최댓값 L_2는 얼마인가?

(4) 제시문 (나)와 같은 방식으로 k 개의 벽돌을 쌓아 탑을 만들 때 꼭대기 벽돌의 끝에서부터 책상 모서리까지의 수평거리의 최댓값 L_k 를 구하시오.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

질량과 위치의 관계를 각 위치에서 거리의 비인 내분점으로 표현하고 있다.

2. 제시문 (나)

내분점(중점)에 관한 식을 가지고 실제적인 상황을 풀 수 있다.

논제 분석

[논제1-1] 제시문 (가)에 의해 질량중심은 각 점에서의 내분점에 관계되어진다는 것을 식으로 표현할 수 있는가?

각 물체의 질량을 거리의 비로 표현하여 질량중심에서 먼 거리에 있을수록 질량이 작은 물체임을 알 수 있다.

[논제1-1] 실제 상황에서 주어진 질량중심에 관한 식을 가지고 문제를 풀 수 있는가?

주어진 내분점식, 중점식 등을 이용하여 각 벽돌의 중심의 위치를 정하여 실제 상황의 문제를 해결할 수 있다.

배경지식 쌓기

1. 내분점, 중점

두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

2. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.

- $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
- $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

풀어보기

1. $0 < a < 1$ 일 때, 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 3)$, $\mathrm{B}(6,\ -2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $a : (1-a)$ 로 내분하는 점이 제1 사분면에 있기 위한 a 의 값의 범위를 구하시오.[1)]

2. 점 P 가 직선 $y = 2x - 4$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$ 와 점 P 를 이은 선분 AP 의 중점의 자취의 방정식을 구하시오.[2)]

3. 다음은 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3$$

이 성립할 때, $a_n = n$ 임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.[3)]

1) 황선욱 외 3명, 2010 수학, 좋은책 신사고
2) 쎈 수학 10-나
3) 2010 EBS 파이널

읽기 자료

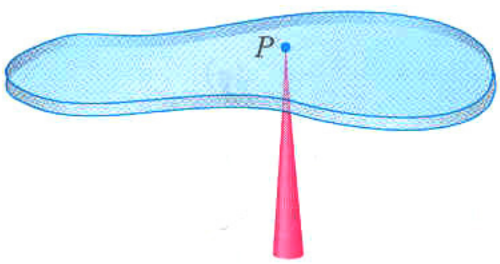
모멘트와 질량중심[4)]

질량중심 혹은 무게중심은 <그림 1>에서처럼 어떤 모양으로 주어지든 간에 얇은 판이 수평으로 균형을 잡는 점 P를 말하는 것이다.

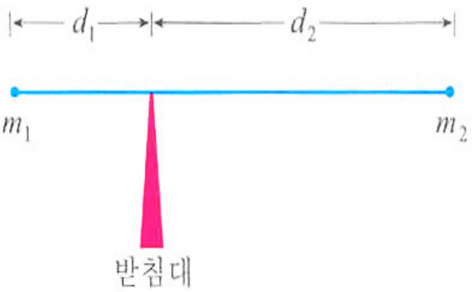
<그림 2>와 같이 막대의 양 끝에 질량 m_1과 m_2가 붙어 있고, 받침대로부터 각각 거리가 d_1과 d_2로 떨어져 있을 때 만약

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \text{ ---------①}$$

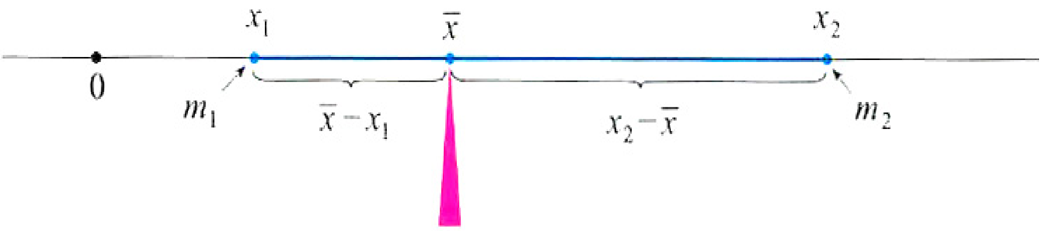
가 성립하면 그 막대는 균형을 잡을 것이다. 이것은 아르키메데스가 발견한 실험사실이며, 레버의 법칙이라 불리고 있다.



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

x축 위의 x_1에서 질량 m_1, x_2에서 질량 m_2를 갖고 $\overline{x}$에서 질량중심을 갖는다고 하면 <그림 2>와 <그림 3>을 비교하면 $d_1 = \overline{x} - x_1$이고 $d_2 = x_2 - \overline{x}$이므로 식 ①로부터

$$m_1(\overline{x} - x_1) = m_2(x_2 - \overline{x})$$

$$m_1\overline{x} + m_2\overline{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

4) James Stewart, 미분적분학 6판 청문각

를 얻는다. 여기서 m_1x_1 과 m_2x_2 를 각각 질량 m_1 과 m_2 의 원점에 관한 모멘트라고 부르며 식 ②의 질량중심 $\overline{x}$ 는 두 질량의 모멘트를 서로 더하여 전체 질량 $m=m_1+m_2$ 로 나눔으로써 구해진다.

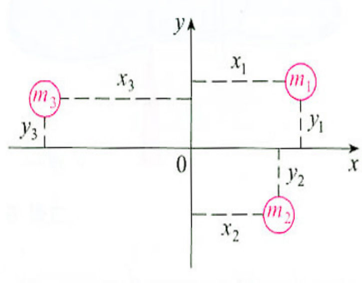
일반적으로, x 축 위의 점들 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 에 각각 놓여 있는 질량 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 을 갖는 n 개 질점계가 있다면 질량중심은

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{m}\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

임을 보일 수 있다. 단, $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 는 그 질점계의 전체 질량이고, 각각의 모멘트들의 합 $M=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$ 를 원점에 대한 그 질점계의 모멘트라고 한다. 그러면 식 ③은 $m\overline{x}=M$ 으로 다시 쓸 수 있고, 이것은 전체 질량 m 이 질량중심 $\overline{x}$ 에 모여 있는 것으로 간주하여 m 의 모멘트가 그 질점계의 모멘트와 같다는 것을 말해 준다. 이제 <그림 4>에서 보는 것처럼 xy 평면 위의 점들 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 에 각각 놓여 있는 질량 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 을 가진 n 개의 질점들로 이루어진 질점계를 생각하자. 1 차원의 경우와 유사하게 y 축에 대한 그 질점계의 모멘트를

$$M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$$

로 정의하고, x 축에 대한 그 질점계 모멘트는



<그림 4>

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$$

로 정의한다. 그러면 M_y 는 그 질점계의 y 축에 대한 회전하려는 경향이 어느 정도인가를 측정하게 하며, M_x 는 그 질점계의 x 축에 대한 호전하려는 경향이 어느 정도인가를 측정하게 한다. 1 차원의 경우에서처럼 질량중심의 좌표 $(\overline{x},\overline{y})$ 는 그 모멘트들에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m},\ \overline{y}=\frac{M_x}{m}$$

단, $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 는 전체 질량이다. $m\overline{x}=M_y$ 이고 $m\overline{y}=M_x$ 이므로, 질량중심 $(\overline{x},\overline{y})$ 는 질량 m 인 단 하나의 질점이 그 질점계와 같은 모멘트들을 가지는 점이다.

예시 답안

풀어보기 1

선분 AB를 $a:(1-a)$로 내분하는 점을 구하면 $(10a-4,-5a+3)$이고 이 점이 1 사분면 위에 있기 위한 조건은 $-5a+3>0$이며 $0<a<1$가 가정에서 주어졌기 때문에 a의 범위는 $\frac{3}{5}<a<1$이다.

풀어보기 2

주어진 직선 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$라 하면 AP의 중점은 $\left(\frac{2+x}{2},\frac{4+y}{2}\right)$이므로 $x'=\frac{2+x}{2}, y'=\frac{4+y}{2}$라 두고 $x=2x'-2, y=2y'-4$로 정리해서 준식 $y=2x-4$에 대입하면 중점의 자취의 방정식은 $y=2x-2$가 된다.

풀어보기 3

$n=1$일 때 $a_1>0,\ a_1^2=a_1^3$이 성립하면 $a_1=1$

따라서 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때, 준식이 성립한다고 하자.

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1})^2=a_1{}^3+a_2^3+a_3{}^3+\cdots+a_{k+1}{}^3$$

이면

$$\left\{\frac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}\right\}^2=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+a_{k+1}{}^3$$

$$a_{k+1}{}^3-a_{k+1}{}^2-k(k+1)a_{k+1}=0$$

$$a_{k+1}(a_{k+1}+k)(a_{k+1}-k-1)=0$$

$$a_{k+1}>0 \text{ 이므로 } a_{k+1}=k+1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 준식이 성립하므로 $a_n=n$이 증명되었다.

논제 1-1 [5)]

(1) $\overline{x_1p}:\overline{px_2}=m_2:m_1$ 이고 $\overline{x_1p}=p-x_1$, $\overline{px_2}=x_2-p$ 이므로 $\dfrac{p-x_1}{x_2-p}=\dfrac{m_2}{m_1}$ 이다. 이 식을 정리하면

$$p=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

(2) 제시문 (가)에 따르면 세 물체 전체의 질량중심은 $\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ 에 위치한 질량 m_1+m_2 의 물체와 x_3 에 위치한 질량 m_3 의 물체와의 질량중심이다. 즉, 세 물체 전체의 질량 중심은

$$\frac{(m_1+m_2)\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+m_3x_3}{(m_1+m_2)+m_3}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

이다. 따라서 k 개의 물체 전체의 질량중심을 $\dfrac{m_1x_1+\cdots+m_kx_k}{m_1+\cdots+m_k}$ 로 가정할 수 있다.

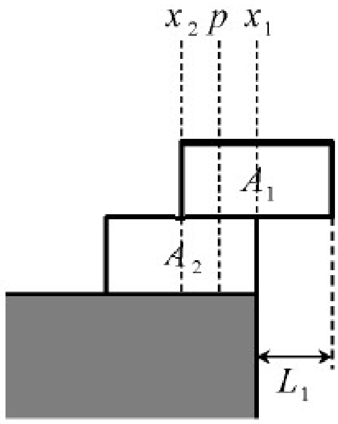
그러면 $k+1$ 개의 물체의 질량중심은 앞의 k 개의 물체 전체의 질량중심에 위치한 질량 $m_1+\cdots+m_k$ 의 물체와 x_{k+1} 에 위치한 질량 m_{k+1} 의 물체와의 질량중심이다. 즉, $k+1$ 개의 물체 전체의 질량 중심은

$$\frac{(m_1+\cdots+m_k)\dfrac{m_1x_1+\cdots+m_kx_k}{m_1+\cdots+m_k}+m_{k+1}x_{k+1}}{(m_1+\cdots+m_k)+m_{k+1}}=\frac{m_1x_1+\cdots+m_{k+1}x_{k+1}}{m_1+\cdots+m_{k+1}}$$

이 되어 증명은 끝났다.

(3) 아래 그림과 같이 A_1, A_2의 중심의 위치를 각각 x_1, x_2 라 하면 각 벽돌의 질량이 동일하므로 두 벽돌 전체의 질량중심은 $p=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 가 된다. 아래 그림을 참조하면 A_2 를 x_1-p 만큼 모서리 쪽으로 밀 수 있다. p 가 x_1, x_2 의 평균이므로 $x_1-p=\dfrac{1}{2}$ 이 되고 따라서 $L_2=L_1+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}$ 이다.

5) 경희대 예시답안



(4) 이 경우는 $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 전체의 질량중심이 위 그림의 x_1 에 위치하고 있는 경우이다. 따라서 탑 전체의 질량중심은 x_1 과 x_2 를 연결하는 선분을 $1:k-1$ 로 내분하는 점에 위치한다. 즉, $x_1 - p = \frac{1}{k}$ 이므로 $L_k = L_{k-1} + \frac{1}{k}$ 이 된다.

따라서 $L_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$ 이다.

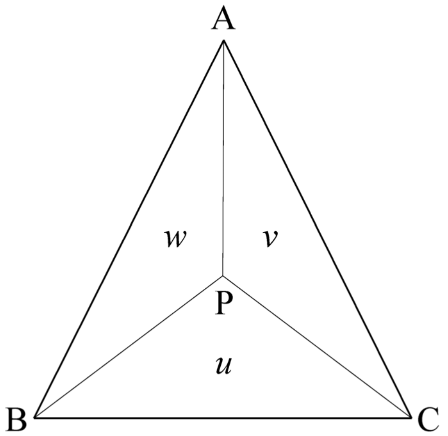
MEMO

2 경희대학교 수시

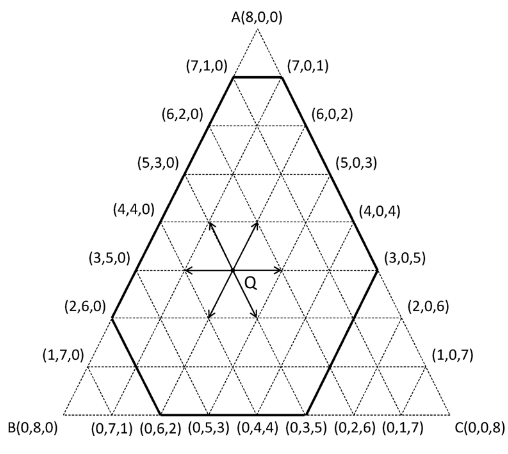
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 평면 위의 점들을 표시하는 방법에는 우리가 흔히 쓰는 직교좌표계처럼 두 실수의 순서쌍을 이용하는 방법도 있지만 세 실수의 순서쌍을 이용하는 다음과 같은 방법도 있다. 먼저 <그림 1>과 같이 평면 위의 세 점 A, B, C를 한 직선 위에 있지 않도록 정하자. 이제 삼각형 ABC 내부의 점 P의 위치에 따라 삼각형 PBC, PCA, PAB의 넓이 u, v, w가 변하는데 우리는 이 순서쌍 (u, v, w)로 점 P의 위치를 나타내고자 한다. 삼각형 ABC의 넓이를 m이라고 할 때, 가령 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심에 위치한다면 점 P를 나타내는 좌표는 $(m/3, m/3, m/3)$이 된다. 위의 정의를 확장하면 삼각형 ABC 둘레 위의 점은 물론이고 특히 u, v, w에 음수를 허용할 경우 삼각형 ABC 외부의 점도 표현할 수 있어 결국 평면 위의 모든 점을 나타낼 수 있다. 이렇게 정의되는 평면 좌표계를 무게중심 좌표계라 한다. <그림 2>에서는 넓이가 8인 삼각형 ABC 둘레 위의 점들 중에서 정수값의 좌표를 가지는 것들을 따로 표시하였다.



<그림 1>



<그림 2>

(나) 무게중심 좌표계를 이용하면 컵에 든 물을 옮겨 원하는 물의 양을 얻는 문제를 편리하게 해결할 수 있다. 각각 용량이 $7l, 6l, 5l$인 세 개의 컵 A, B, C에 $8l$의 물을 적당히 나누어 담았다고 하자. 세 컵에 담겨 있는 물의 양을 순서대로 u, v, w라고 하면 물이 배분되어 있는 상태는 <그림 2>의 삼각형 ABC 위의 한 점의 무게중심 좌표에 대응된다. 먼저 삼각형 ABC의 모든 점이 물의 배분 상태에 대응되는 것은 아님에 주의하자. 예를 들어 좌표가 $(1, 1, 6)$인 점은

컵 C의 용량을 고려할 때 실현 불가능하다. 이와 같이 각 컵의 용량을 고려하여 실현 가능한 점들을 모두 찾아보면 그 분포는 <그림 2>의 굵은 선으로 둘러싸인 영역이 된다. 어느 한 컵에서 다른 한 컵으로 물을 옮기는 과정은, 도중에 물의 손실이 없다면, 삼각형 ABC의 한 점이 적당한 규칙에 따라 이동하는 것에 대응된다. 예를 들어 점 $\mathrm{Q}(3,3,2)$가 한 번의 옮겨 담기 과정으로 이동할 수 있는 방향은 <그림 2>에서처럼 정확히 6가지가 있고, 옮겨 담는 물의 양에 따라 실제 이동 거리가 결정된다.

[논제 1-1] 제시문 (가)와 (나)를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

(1) 제시문 (가)에서 임의의 u, v, w 값에 대하여 무게중심 좌표를 (u, v, w)로 갖는 점이 항상 존재하는지 논하시오. 또한 u, v, w 중 어느 한 성분이 상수인 점들의 자취에 대하여 서술하시오.

(2) 제시문 (나)의 세 컵에 눈금이 없어 한 컵에서 다른 컵으로 물을 옮길 때 그 중 한 컵을 완전히 채우거나 비우는 것만 가능하다고 하자. 이러한 조건으로 물을 옮기는 과정에 대응되는, 삼각형 ABC 위에서의 이동 규칙을 유추하고, 반복시행을 통해 어느 한 컵에 정확히 $4l$의 물을 담는 것을 가능하게 하는 물의 초기 배분 상태에 관해 추론하시오.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

평면(R^2) 상의 두 실수의 순서쌍 (x, y)를 이용한 직교좌표계로부터 세 실수의 순서쌍 (x, y, z)을 이용한 무게중심 좌표를 도입하는 과정을 간단하게 설명하고 있고 무게중심 좌표계를 이용하여 각 점의 위치를 잡을 수 있음을 보여주고 있다.

2. 제시문 (나)

무게중심 좌표의 활용하여 용량이 $7l, 6l, 5l$인 세 개의 컵 A, B, C에 $8l$의 물을 적당히 나누어 담을 수 있는 방법을 무게중심 좌표 $\mathrm{P}(x, y, z)$가 한정된 범위 즉, $x+y+z=8$을 만족하는 0 또는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍들이 배열되는 가능한 예와 그 특징을 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1-1]

무게중심 좌표의 특징과 직교좌표계의 차이점을 설명할 수 있는지와 무게중심 좌표로 직선을 표현하는 방법을 묻는 논제이다. 다시 말하면 무게중심 좌표의 성분 중 하나가 상수일 때 그것의 의미가 무엇인지를 묻는 논제이다.

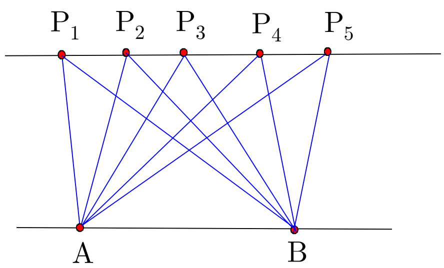
[논제 1-2]

무게중심 좌표에서 $(a, b, 0)$ 또는 $(0, b, c)$와 좌표가 무엇을 의미하는지에 관하여 묻는 논제이다. 동시에 삼각형에서 제약조건을 가진 점들을 어떻게 표현하는지 묻는 논제이다.

배경지식 쌓기

1. 등적변환

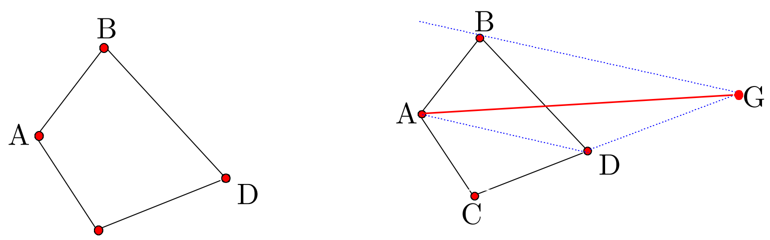
(1) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{P_1P_5}$이면 아래의 삼각형은 모두 같은 넓이를 가진 삼각형이다.



$$\triangle ABP_1 = \triangle ABP_2 = \triangle ABP_3 = \triangle ABP_4 = \triangle ABP_5$$

(2) 등적변환의 원리

임의의 사각형과 같은 넓이를 가진 삼각형을 작도할 수 있다. 이 원리를 확대하면 임의의 다각형과 같은 넓이를 가진 삼각형을 작도할 수 있다.



위의 그림에서 $\overline{AD} // \overline{BG}$이면 $\square ABCD = \triangle ACG$이다.

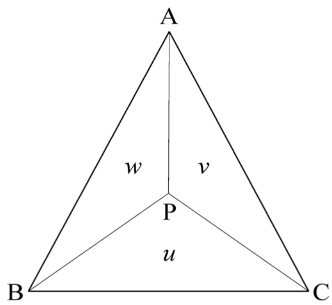
2. 무게중심의 성질

임의의 삼각형에서 무게중심은 세 중선을 $2:1$로 내분한다.

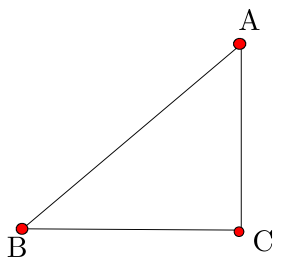
풀어보기

1. 임의의 삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있다. $\triangle \mathrm{BCP} = \dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}$를 만족할 때 점 P의 자취를 구하는 방법을 설명하시오.

2. 오른쪽 <그림 1>과 같이 삼각형 ABC 내부의 점 P의 위치에 따라 삼각형 PBC, PCA, PAB의 넓이 u, v, w가 변하는데 우리는 이 순서쌍 (u, v, w)로 점 P의 위치를 나타낼 수 있다. 이와 같은 좌표를 무게중심 좌표(혹은 면적좌표)라고 한다.
   다음과 같은 <그림 2>의 직각삼각형 ABC에서 외심을 무게중심 좌표로 나타내시오. 단, $\triangle \mathrm{ABC} = 1$이다.



<그림 1>



<그림 2>

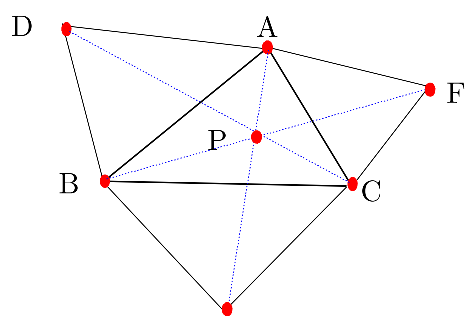
읽기 자료

무게중심 좌표의 활용[6)]

무게중심 좌표는 공학에 주로 많이 응용된다. 또 수학에서는 삼각형의 여러 가지 중심을 작도하는데 많이 사용되고 있다. 우리가 흔히 알고 있는 삼각형의 중심은 오심으로 내심, 외심, 무게중심, 수심, 방심이다. 이외에도 삼각형의 여러 가지 중심을 가지는데 현재까지 연구된 바에 의하면 3,580여 개의 중심이 발견되었다고 한다.

무게중심 좌표는 이러한 점들을 표현하는데 유용하게 사용된다고 한다. 예를 들어 삼각형의 내심은 다음과 같이 표현된다. 삼각형 ABC 의 꼭짓점을 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ 라 하고 꼭짓점 A, B, C에 대응하는 선분을 a, b, c라고 하면 $I = \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$ 로 나타낼 있는데 이것은 대표적인 무게중심 좌표 형식이고 직교좌표로 나타내면 $I = \left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$와 같은 의미이다. 위의 식에서 무게중심 좌표가 훨씬 간명한 형태임을 알 수 있다.

다음은 오심 외의 삼각형의 중심 가운데 자주 사용되는 페르마 포인트이다. 임의의 삼각형 ABC 에서 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 작도하고 그 꼭짓점을 이으면 한 점 P 에서 만난다. 이 때 점 P 를 페르마 포인트라고 부르며 삼각형 내부에서 각 꼭짓점에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}$가 된다.



<페르마 포인트>

6) C. Kimbering (2009). Encyclopedia of Triangle Centers를 참조함.

삼각형에서 무게중심 좌표와 직교 좌표 사이의 관계7)

임의의 삼각형 T가 꼭짓점 r_1, r_2, r_3에 의해서 정의될 때, 삼각형 위의 임의의 점에 놓인 점 r는 무게중심좌표로 다음과 같은 형식으로 표현될 수 있다.

$r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3$ 여기서 보통 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$을 무게중심 좌표라고 부른다.

여기서 r이 삼각형 내부의 점일 때는 다음과 같은 제한 조건을 갖는다.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$이고 이것은 $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$을 의미한다.

여기서 만약 r을 직교좌표계 $r(x, y)$로 표현하면 다음과 같다.

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \ , y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \cdots\cdots (※)$$

(※)에 $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$을 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) x_3, \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) y_3$ 이 식을 정리하면 $\lambda_1 (x_1 - x_3) + \lambda_2 (x_2 - x_3) + x_3 - x = 0, \ \lambda_1 (y_1 - y_3) + \lambda_2 (y_2 - y_3) + y_3 - y = 0$이다.

이제 위의 식은 일차변환 형식으로 보다 간단히 표현할 수 있다.

$T\lambda = r - r_3$ 여기서 λ는 무게중심좌표이고 r은 직교좌표를 성분으로 하는 벡터이고

T는 다음과 같은 행렬이다. $T = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}$이다. 그런데 여기서

$r_1 - r_3, r_2 - r_3$은 서로 일차독립이므로 T는 역행렬을 가진다.

(만약에 $r_1 - r_3, r_2 - r_3$이 일차독립이 아니면 r_1, r_2, r_3이 일직선 위에 있으므로 이것은 모순이다.)

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = T^{-1}(r - r_3)$으로 표현되는데 이것을 더욱 구체적으로 표현하면

$$\lambda_1 = \frac{(y_2 - y_3)(x - x_3) + (x_3 - x_2)(y - y_3)}{\det(T)},$$
$$\lambda_2 = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)}{\det(T)},$$
$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

이다.

참고로 $0 < \lambda_i < 1$이면 r는 삼각형 내부의 점이고 그렇지 않으면 삼각형의 변 또는 외부의 점이 된다.

7) 위키피디아의 barycentric coordinate system을 참조함.

예시 답안

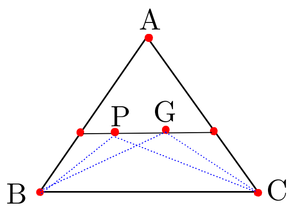
풀어보기 1

점 P 가 삼각형 내부에 있고 $\frac{1}{3}\triangle ABC = \triangle BCP$ 이므로 다음과 같이 점 P의 자취를 작도한다.

① $\triangle ABC$의 무게중심 G를 작도한다. 그러면 $\triangle BCG = \frac{1}{3}\triangle ABC$ 이다.

② 점 G를 지나고 $\overline{BC}$와 평행한 직선을 작도하여 $\triangle ABC$ 와 교점을 각각 D, E라고 하자.

③ $\overline{DE}$ 위의 임의의 점을 P 라고 하면 등적원리에 의하여



<넓이가 일정한 점 P의 자취>

$\triangle BCP = \triangle BCG = \frac{1}{3}\triangle ABC$ 이고 점 P 의 자취는 $\overline{DE}$ 임을 알 수 있다.

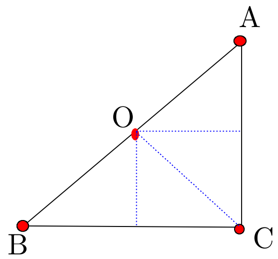
풀어보기 2

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 외심은 빗변의 중점이다. 즉, 점 O가 외심이다. 따라서

$\triangle BOC = \triangle ACO = \frac{1}{2}\triangle ABC$ 이고

$\triangle AOB = 0$이고 $\triangle ABC = 1$이므로

외심의 무게중심 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$이 된다.



논제 1-1 8)

직교좌표계에서는 임의의 x, y를 좌표로 하는 점 (x, y)가 존재하나 무게중심 좌표는 삼각형 ABC의 넓이를 배분하여 결정되었으므로 항상 $u+v+w=m$ (m은 삼각형 ABC의 넓이)를 만족해야 한다. 따라서 임의의 u, v, w가 아니라 $u+v+w=m$를 만족하는 u, v, w에 대해서만 무게중심 좌표를 (u, v, w)로 하는 점이 존재한다.

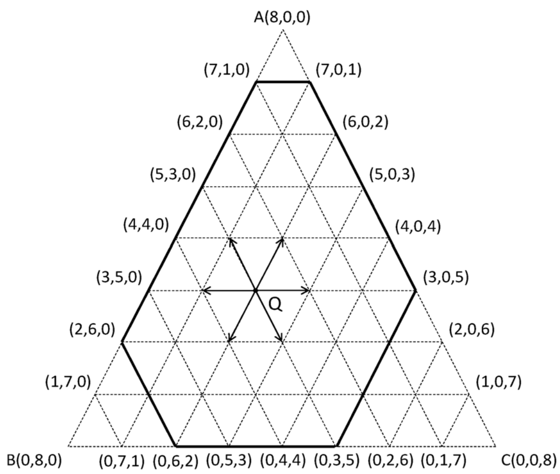
삼각형 PBC의 넓이는 고정된 밑변 BC의 길이와 점 P에서 직선 BC까지의 거리에 의해 결정된다. 따라서 삼각형 PBC의 넓이인 u가 상수가 되기 위해서는 P

8) 2011 경희대학교 예시답안

에서 BC까지의 거리가 상수이어야 하고 이러한 P의 자취는 직선 BC와 평행한 직선이다. 마찬가지 이유로 v가 상수인 점의 자취는 직선 CA와 평행한 직선이고, w가 상수인 점의 자취는 직선 AB와 평행한 직선이다.

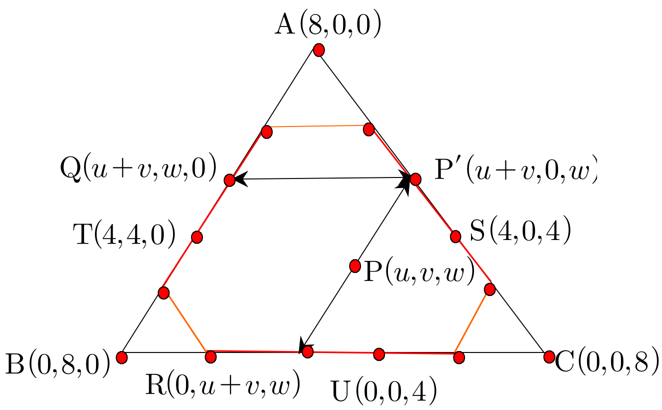
논제 1-2

한 번의 옮겨 담기 과정에서 세 컵 중 하나는 그 물의 양이 변하지 않으므로, 삼각형 ABC 위의 점이 움직이는 방향은 <그림 2>의 Q처럼 항상 삼각형의 한 변과 평행하다. 한편 어느 한 컵이 완전히 차있거나 비워진 상태는 <그림 2>의 굵은 선 위의 점에 대응된다.



<그림 2>

이제 용기의 물을 한쪽으로 전부 부은 상태를 무게중심 좌표로 표현하면 점 $\mathrm{P}(u,\, v,\, w)$가 점 $\mathrm{P}'(u+v,\, 0,\, w)$로 이동한 것으로 표현할 수 있다. 이것을 그림으로 표현하면 다음과 같다. (여기서 $u+v+w=8$이 항상 유지되어야 한다.)



<그림 3 점 P의 이동경로>

또 P'은 Q 또는 R로 움직일 수 있다. 따라서 각 점의 이동은 따라서 논제 (2)의 조건으로 옮겨 담는 과정에서는 항상 굵은 선 위의 점으로 삼각형의 한 변과 평행하게 이동한다. 또한 어느 한 컵을 완전히 채우거나 비워야 하므로 한 굵은 선분 위에서 다른 굵은 선분 위로 이동해야 한다.(위의 <그림 3>에서 P'으로 움직임을 참조.) 다만 이 조건이 두 선분의 교점으로 이동하는 경우도 포함하는 것에 유의) 굵은 선분 하나를 따라 이동할 때는 끝점으로 이동한다고 표현할 수도 있다. (여기서 끝점은 <그림 2>에서 무게중심 좌표 $(7,1,0)$, $(1,7,0)$, $(0,3,5)$등과 같이 굵은 선분의 방향이 바뀌는 점을 의미한다)

그런데 옮겨 담기를 반복하여 어느 한 컵에 정확히 $4l$의 물을 담은 상태는 굵은 선 위의 점들 중에서 적어도 하나의 좌표가 4인 점 $\mathrm{R}(4,4,0)$, $\mathrm{S}(0,4,4)$, $\mathrm{T}(4,0,4)$에 대응된다. 이것은 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세 변의 중점을 의미한다. 따라서 점 P가 삼각형의 세 변 중 어느 한 변과 평행하게 움직이면서 이 점에 도달하려면 $u=4 \text{ or } v+w=4$ 또는 $w=4 \text{ or } v+u=4$ 와 같은 형태의 점에 대응되어야 함을 알 수 있다.(삼각형의 중점연결정리를 생각하면 쉽게 이해할 수 있음.) 즉, 처음부터 어느 한 컵에 정확히 $4l$의 물이 담겨 있어야 한다.

MEMO

3 고려대학교 모의

제 시 문

(가)

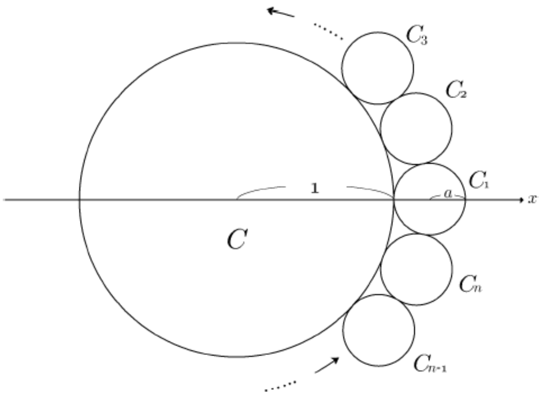
아래 그림과 같이 원 C는 중심이 x축 위에 있고 반지름이 1인 원이다. 원 C_i는 다음과 같은 조건을 만족한다.

(1) 원 C_i는 반지름이 a이고, 원 C에 접한다. (단, $i=1, \cdots, n$)

(2) 원 C_1의 중심은 x축 위에 있다.

(3) 원 C_i는 원 C_{i+1}에 접한다. (단, $i=1, \cdots, n-1$)

(4) 원 C_n은 원 C_1에 접한다.



<그림 1>

[논제 1(필수)]

(1) a와 n 사이의 관계를 구하시오.

(2) 조건 $a<1$을 만족하는 n의 범위를 구하시오.

(3) 원 $C_1, \cdots, C_n$들의 둘레의 합을 $L(n)$이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} L(n)$을 구하시오.

(4) 원 $C_1, \cdots, C_n$들을 x축으로 회전시킨 회전체의 부피의 합을 $V(n)$이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} n V(2n)$을 정적분 형태로 표현하시오.

제시문 분석

서로 외접하고 있는 n 개의 작은 원 각각이 큰 원 주변에도 외접하고 있는 상황을 설명하고 있다. 서로 접하는 원 C_i 와 C_{i+1} 사이의 관계를 설명함으로써 작은 원들의 조건을 귀납적으로 정의하고 있다.

논제 분석

[문제] (1) 주어진 도형의 조건을 이용하여 두 변수 a 와 n 사이의 관계식을 구할 수 있는가?

두 변수 사이의 관계식을 구하기 위해서는 삼각비에 관한 기본적인 지식 및 원과 직선이 접할 때 접선과 반지름이 직교한다는 기초적인 수학적 지식이 필요하다. 또한 이를 실제 문제에 적용할 수 있는 능력이 있어야 한다.

(2) 삼각부등식을 풀 수 있는가?

(1)에서 얻은 관계식을 변형하여 주어진 조건을 적용하면 삼각부등식이 생긴다. 간단한 형태의 삼각부등식을 풀 수 있는 능력이 있어야 한다. 혹은 작은 원의 반지름이 1일 때 6개의 작은 원이 필요하다는 상황을 기하적으로 설명하여도 된다.

(3) 작은 원들의 둘레의 길이의 합을 구하고 그 극한을 구할 수 있는가?

간단한 삼각함수의 극한을 구할 수 있는 능력이 있어야 한다.

(4) 작은 원들을 x 축으로 회전시켰을 때 생성되는 회전체의 부피의 합을 구하고 그 극한을 정적분으로 표시할 수 있는가?

이 논제에서는 회전체의 부피를 구할 수 있는지 그리고 정적분의 정의를 이용하여 합과 극한의 형식을 정적분으로 표현할 수 있는지를 묻고 있다. 파푸스-굴딘의 정리에 대한 지식이 필요하며 회전하는 원의 중심이 축 위에 있을 때와 없을 때를 구분하여 식을 만들어야 한다. 그렇지 않으면 답은 맞더라도 올바르지 않은 과정으로 인해 오류를 지적 받을 수 있다.

배경지식 쌓기

1. 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2. 파푸스-굴딘의 정리

평면 위에 면적이 A인 도형이 있다. 도형을 지나지 않는 직선 l을 축으로 도형을 360도 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피는 면적 A와 도형의 중심이 움직인 거리 d의 곱이다. 이를 파푸스-굴딘의 정리라 부른다. 여기서 도형의 중심이란 밀도가 일정하다고 가정하였을 때 도형의 질량중심을 말한다.

3. 정적분과 무한급수와의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

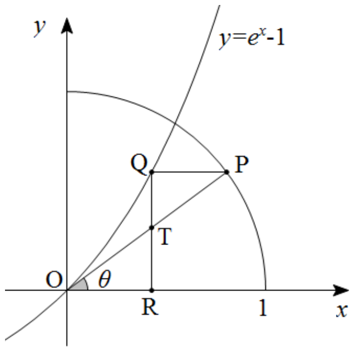
(단, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)

풀어보기

1. 함수의 극한에 관한 성질을 이용하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 증명하시오.

2. 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$ 과 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하시오. (2011 대수능)

3. 좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 ORT의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오. (2011 대수능)



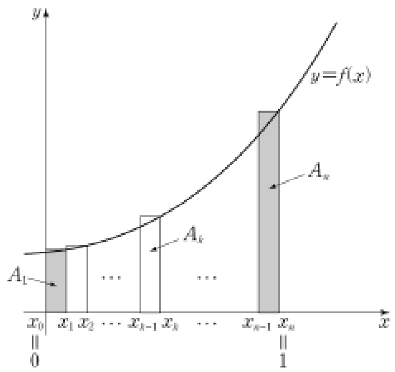
4. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\ (a\ge 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$0=x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$$

이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1, 2, \cdots, n)$
양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오. (2010 대수능)



읽기 자료

수학자 파푸스(Pappus)

1. 생애

파푸스의 생애에 대해 언급한 책이 현존하지 않기 때문에 그의 생애에 대해 알려진 것은 거의 없다. 그의 활동 시기에 대해서 서로 다른 주장을 하는 두 가지 고대 사료가 존재한다. 한 예로 Suda Lexicon에 나온 자료에서는 그가 알렉산드리아의 데온(Theon of Alexandria)과 동시대인이라고 언급되어 있다. 데온의 생몰년(335년경~405년경)으로 비추어 볼 때 그도 4세기 후반, 로마제국 테오도시우스 황제(379년~395년) 제위 기간에 활동했다는 것이다. 그러나 데온이 작성한 연대기에서는 파푸스의 이름이 디오클레티우스 황제(284년~305년) 옆에 적혀 있다. 그의 연대기는 프톨레마이오스나 히파르쿠스 같은 수학자들이 활동한 시기를 거의 정확히 적었기 때문에 그의 자료가 Suda의 자료보다 더 신빙성이 있는 것으로 보인다. 더군다나 프톨레마이오스 Almagest의 주석을 단 시기(C.320)나 Synagoge를 작성한 시기(C.340)로 보아 최소한 3세기 후반에 탄생한 것으로 보는 것이 타당하다. 확실하지는 않지만 파푸스는 알렉산드리아에서 태어나 평생을 그 지역에서 보낸 것으로 보인다. 사실 이 정도가 파푸스의 생애에 대해 알려진 거의 모든 것이다.

2. 업적

파푸스가 기록한 책인 Synagoge는 8개의 책으로 구성되어 있으나 완전하게 전하지 않는다. 1권을 분실했으며 나머지 7권의 책도 완전하게 전하지 않아 그의 모든 업적을 확인할 수는 없다. 그밖에도 그는 유클리드의 원론과 프톨레마이오스(프톨레미)의 Harmonika에 대해서 자신만의 주석을 남기기도 했다.

그의 서적인 Synagoge에 대해 좀 더 설명하자면 이 책은 유클리드의 원론처럼 수학적 정리를 체계적으로 설명한 것이 특징이다. 그의 책은 유클리드의 원론과는 달리 차례가 잘 나와 있다. 또한 그의 책에서는 파푸스가 고대 그리스로부터 축적된 지식을 막힘없이 체계적으로 설명하는 것을 알 수 있고, 그의 깔끔한 설명뿐만 아니라 상당히 뛰어난 문제도 일품이다. 사실 그의 책만 보아도 그때까지 알고 있었던 거의 모든 알 수 있다고 해도 과언이 아니다. 다만 분실된 내용이 많다는 게 아쉽다. 분실된 1권은 2권과 마찬가지로 산술과 관련된 것으로 추정된다. 2권도 14번째 정리부터 현존하고 있는데 2권에서는 아폴로니우스가 제시한 곱셈 방법에 대한 정리가 주를 이루고 있다.

3권에서는 크게 다섯 부분으로 기하학적인 문제에 대해 언급하고 있다. 두 선분 길이의 여러 가지 평균을 구하는 방법, 산술·기하·조화 평균에 관련된 문제, 유클리

드 1권 정리 21과 관련된 문제, 정다면체 다섯 개를 구에 내접하는 문제, 그리고 첫 번째 문제의 또 다른 풀이법이다.

4권은 서문을 분실했지만 기하학에 관한 문제를 계속 언급하고 있다. 피타고라스 풀이법, 원에 관련된 정리, 아르키메데스 나선의 성질, 각의 3등분에 관한 문제에 대해서 나와 있다.

5권에서는 여러 도형의 넓이와 정다면체를 포함한 입체도형의 부피를 측정하는 방법, 아르키메데스가 발견한 13개의 다면체에 대해 나와 있다.

6권은 천문학적인 내용을 포함하고 있다. 주로 프톨레마이오스의 알마게스트 같은 책에 대한 주석이 많다.

7권은 분석과 종합에 관련된 용어에 대한 설명이 많이 있다. 특히 부정설제(porism)이 어떻게 정리들이나 문제들과 관련 있는지에 대해 설명하고 있다. 또한 아폴로니우스의 De Sectione Determinate나 유클리드의 Porisms나 Surface Loci등의 보조정리에 대해서도 언급하고 있다.

8권에서는 무게중심이나 역학적 일률 등의 역학적인 주제에 대해 다루고 있다. 또한 다섯 점을 지나는 타원을 작도하는 방법 등의 순수기하학적인 정리도 나와 있다.

3. 파푸스의 정리

회전체의 부피를 구하는데 질량중심이 어떻게 이용되었는지 알아보자.

평면 위에서 주어진 직선 l의 한쪽에 완전히 놓여 있는 평면 영역 R을 생각하자. 이 R을 l주위로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피 V는 R의 넓이 A와 R의 중심이 움직인 거리 d의 곱이다. 즉,

$$V = Ad$$

(증명) 영역이 구간 $[a,b]$에서 $g(x) \le f(x)$인 두 함수의 그래프 사이에 있고 직선 l이 y축인 특별한 경우에 대하여 증명해 보자. 원주각의 방법을 이용하여 구해보면

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = 2\pi \bar{x} A = (2\pi \bar{x})A = Ad$$

이다. (여기서 A는 영역의 넓이이고,

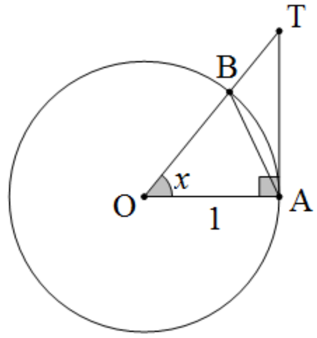
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

는 질량중심의 x좌표이고 $d = 2\pi\bar{x}$는 y축 주위로 중심이 움직인 거리이다.)

예시 답안

풀어보기 1

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때,



그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O의 둘레 위에 $\angle$AOB의 크기가 x라디안인 두 점 A, B를 잡고, 원 O 위의 점 A에서의 접선과 직선 OB가 만나는 점을 T라고 하자.

(△OAB의 넓이) < (부채꼴OAB의 넓이) < (△OAT의 넓이)

이므로 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ 이다.

따라서, $\sin x < x < \tan x$

그런데 $\sin x > 0$ 이므로 각 변을 $\sin x$ 로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

즉, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

여기서, $x \to +0$ 일 때 $\cos x \to 1$ 이므로

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

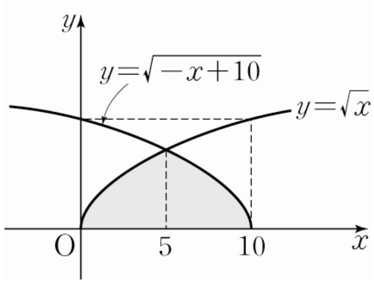
(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 일 때,

$x = -t$ 로 놓으면, $x \to -0$ 일 때 $t \to +0$ 이므로

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이다.

풀어보기 2



두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$ 의 교점의 x 좌표는
$\sqrt{x}=\sqrt{-x+10}$, $\therefore x=5$

이 때, 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=2\pi\int_0^5(\sqrt{x})^2\,dx=2\pi\int_0^5 x\,dx=2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5=25\pi=a\pi$$

$$\therefore\ a=25$$

풀어보기 3

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$ 라 하면

$$e^x-1=\sin\theta,\ e^x=\sin\theta+1,\ x=\ln(\sin\theta+1)$$

$$\therefore \mathrm{Q}(\ln(\sin\theta+1),\ \sin\theta),\ \mathrm{R}(\ln(\sin\theta+1),\ 0)$$

직선 OP 의 방정식은 $y=\tan\theta x$ 이므로 점 T 의 좌표는

$$\mathrm{T}(\ln(\sin\theta+1),\ \tan\theta\ln(\sin\theta+1))$$

따라서 삼각형 ORT 의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\{\ln(\sin\theta+1)\}^2$$

그러므로

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta\{\ln(\sin\theta+1)\}^2}{2\theta^3}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\ln(\sin\theta+1)}{\sin\theta}\right\}^2\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\times1\times\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\ln(\sin\theta+1)}{\sin\theta}\right\}^2\times\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\times1\times1^2\times1^2=\frac{1}{2}=a\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\therefore\ 60a=30$$

풀어보기 4

$f(x)=x^2+ax+b$ 에 대하여 $A_k=\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$ 이므로

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)=\frac{1+an+(1+a+2b)n^2}{n^3}=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

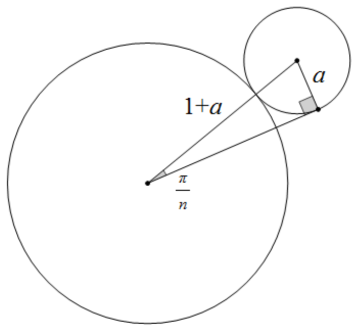
따라서 $a=0, b=3$ 이므로 $f(x)=x^2+3$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left\{8\left(\frac{k}{n}\right)^3+24\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$\int_0^1(8x^3+24x)\,dx=\left[2x^4+12x^2\right]_0^1=14$$

문 제 9)

(1) a와 n 사이의 관계를 구하시오.



그림과 같이 n개의 원 중 한 원의 중심과 큰 원의 중심을 연결한 선분, 작은 원의 반지름, 큰 원의 중심에서 작은 원에 그은 접선으로 이루어진 삼각형은 직각삼각형이 되고, 두 변의 길이와 한 각을 위와 같이 표시할 수 있다. 따라서 다음의 관계식을 얻는다.

$$(1+a)\sin\frac{\pi}{n}=a$$

9) 고려대 모의논술 예시답안

(2) 조건 $a<1$을 만족하는 n의 범위를 구하시오.

(1)에서 얻은 관계식을 a에 관해서 풀면 다음과 같다.

$$a=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

따라서 $a<1$이려면 $\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{2}$이다. 그러므로 $n>6$이다.

(3) 원 $C_1, \cdots, C_n$ 들의 둘레의 합을 $L(n)$이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} L(n)$을 구하시오.

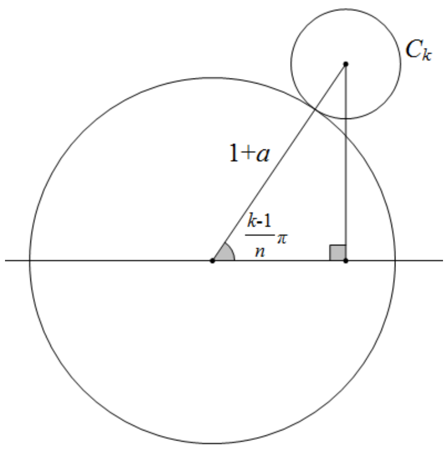
각 원의 둘레의 길이는 $2\pi a$ 이고 원의 개수는 n 개이므로,

$$L(n)=2\pi an=2\pi\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}L(n)=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\pi\times\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=2\pi^2$$ 이다.

(4) 원 $C_1, \cdots, C_n$ 들을 x축으로 회전시킨 회전체의 부피의 합을 $V(n)$이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} nV(2n)$을 정적분 형태로 표현하시오.



그림과 같이 원의 개수가 $2n$ 개일 때 k번 째 원의 중심의 x축으로 부터의 거리는 $(1+a)\sin\frac{k-1}{n}\pi$ 이다. (단, $k=2, 3, \cdots, n-1$)

파푸스-굴딘의 정리에 의하면 원 C_k $(k=2, 3, \cdots, n-1)$를 x축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피는 $\pi a^2 \times 2\pi(1+a)\sin\dfrac{k-1}{n}\pi = 2\pi^2 a^2(1+a)\sin\dfrac{k-1}{n}\pi$이다. 또, 원 C_1과 C_n을 회전시킨 입체는 반지름이 a인 구이므로 $V(2n)$은 다음과 같다.

$$V(2n) = \frac{8\pi}{3}a^3 + \sum_{k=2}^{n} 2\pi^2 a^2(1+a)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^3 + \sum_{k=2}^{n} 2\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} nV(2n)$ 은 다음과 같이 정적분으로 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} nV(2n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8n\pi}{3}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^3 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} 2n\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi^4}{2}\int_0^1 \sin\pi x\,dx$$

MEMO

4 고려대학교 수시

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 다항함수 $y=f(x)$와 임의의 정수 m, n, c에 대하여 그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_m^n f(x)dx=\int_{m-c}^{n-c} f(x+c)dx, \qquad \int_m^n f(x)dx=\int_{-n}^{-m} f(-x)dx$$

마찬가지로, $\sum_{k=m}^{n} f(k)$도 위와 유사한 성질을 만족한다.

(나) 미분의 곱의 법칙을 이용하면 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(다) 연속함수 $f_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

가 일반적으로 성립하진 않지만, 어떤 수열 $\{a_n\}$이 존재하여 $a\le x\le b$인 모든 x에 대하여 $|f_n(x)|\le a_n$이고 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$이 수렴하면 위의 등식이 성립한다.

(라) 다항함수 $f(x)$가 $f(a)=0$을 만족하면 $f(x)=(x-a)g(x)$인 다항함수 $g(x)$가 존재한다.

[논제 1]

(1) 다항함수 $f(x)$가 모든 정수 n에 대하여 $f(n)+f(2-n)=(n-1)^{10}+2(n-1)^2$을 만족할 때, 제시문 (가)를 참고하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n} f(k)$를 구하시오.

(2) 제시문 (나)의 공식을 반복 이용하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx \quad (\text{단, } n\text{은 음이 아닌 정수이다.})$$

(3) 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ 을 (b)의 결과와 제시문 (다)를 이용하여 정적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{p(x)}dx$ 의 꼴로 표시할 수 있음을 논리적으로 설명하고, 다항함수 $p(x)$를 구하시오. (단, $n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 이고 $0!=1$ 이다.)

(4) 다항함수 $f(x)$에 대하여 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt\right)$이 존재하기 위한 $f'(a)$의 조건을 제시문 (라)를 이용하여 구하고, 그 극한값을 구하시오. (단, 로피탈의 정리를 사용하지 마시오.)

제시문 분석

1. 제시문 (가)

함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 정적분을 다르게 표현할 수 있음을 설명하고 급수에서도 유사한 성질이 성립함을 유추하도록 하고 있다.

2. 제시문 (나)

정적분의 부분적분법을 설명하고 있다.

3. 제시문 (다)

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right)dx$ 이 성립하기 위한 연속함수 $f_n(x)$의 조건을 설명하고 있다.

4. 제시문 (라)

인수정리를 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1] (1) 극한값, 즉 무한급수의 합을 주어진 조건을 이용하여 정적분으로 나타낼 수 있는가?

제시문 (가)에서 유추한 급수의 성질과 논제에서 주어진 $f(x)$의 조건을 이용하여 $\sum_{k=2-n}^{n} f(k)$을 변형한 다음 주어진 극한값을 정적분으로 바꾸어 구하면 된다.

(2) 부분적분법을 반복 이용하면서 주어진 정적분에 나타나는 규칙을 추론할 수 있는가?

주어진 정적분에 부분적분법을 반복 적용하면 일정한 규칙을 찾을 수 있고 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

(3) 무한급수를 (2)의 결과와 제시문 (다)를 이용하여 정적분으로 나타낼 수 있는가?

(b)의 결과를 이용하면 $\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$을 정적분으로 나타낼 수 있다. 그 다음 제시문 (다)의 등식을 만족하는 $f_n(x)$를 찾고 이 등식을 이용하면 주어진 무한급수를 정적분으로 나타낼 수 있다.

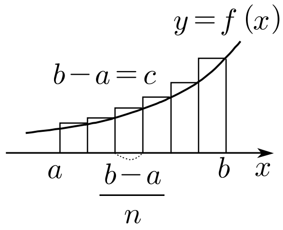
(4) 인수정리를 이용하여 극한값이 존재할 조건을 찾고, 극한값을 구할 수 있는가?

주어진 극한은 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 부정형이다. 이 극한값이 존재하기 위한 분자의 조건을 인수정리를 이용하여 찾고 항등식의 성질과 미분법을 이용하여 주어진 극한값을 구하면 된다.

배경지식 쌓기

1. 정적분의 정의를 이용하여 무한급수의 합 구하기

연속함수 $f(x)$에 대하여



(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a} f(a+x)dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{c}{n}k\right)\cdot\frac{c}{n}=\int_a^{a+c} f(x)dx=\int_0^{c} f(a+x)dx$

2. 정적분의 부분적분법

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

3. 정적분으로 정의된 함수의 미분

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=h(g(x))g'(x)-h(f(x))f'(x)$$

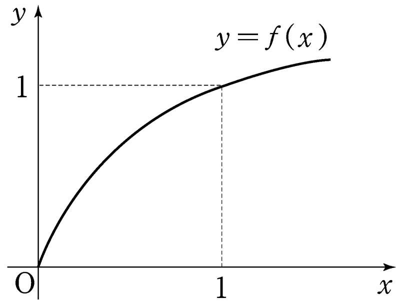
4. 무한등비급수의 합

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\quad(\text{단, } a\neq 0)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & (|r|<1)\\ \text{발산} & (|r|\geq 1)\end{cases}$$

풀어보기

1. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

와 같은 값을 갖는 것은? (2005 대수능)

① $\int_0^1 g(x)\,dx$ ② $\int_0^1 xg(x)\,dx$

③ $\int_0^1 f(x)\,dx$ ④ $\int_0^1 xf(x)\,dx$

⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

2. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 열린구간 $(0, 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은? (2009 대수능)

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

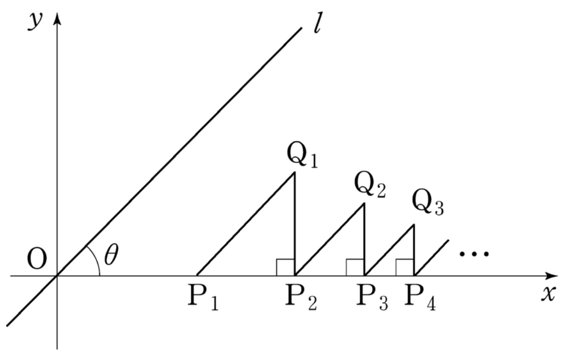
⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

3. $f(\pi)=f(0)$을 만족하는 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^\pi f(x)\sin 2x dx = k \cdot \int_0^\pi f'(x)\cos 2x dx$$

가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

4. 그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다. 점 $P_1(1, 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1}=\overline{P_1Q_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자. 점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2Q_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자. 점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고, 점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_3}=\overline{P_3Q_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n 에 대하여 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) (2005 평가원)



예시 답안

풀어보기 1

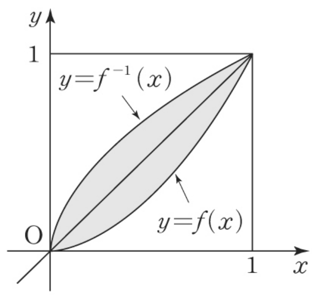
$$\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$
$$=\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)\right\}\frac{1}{n}+\left\{g\left(\frac{2}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}+\left\{g\left(\frac{3}{n}\right)-g\left(\frac{2}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}+\cdots+\left\{g\left(\frac{n}{n}\right)-g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{n}{n}$$
$$=g(1)-\left\{g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$
$$=1-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$\therefore (\text{주어진 식})=1-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

답 ③

풀어보기 2

$f'(x)>0,\ f''(x)>0$이므로
연속함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $[0,\ 1]$에서 아래로 볼록하게 증가한다.

또, 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그래프와 같다.



이때, $\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값은 위 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 이는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 정적분의 정의에 의해

$\int_0^1\{x-f(x)\}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ 이므로

$$\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx=2\int_0^1\{x-f(x)\}dx=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

답 ②

풀어보기 3

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x dx = \left[f(x)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)f'(x)dx$$

$$=0-\int_0^{x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x dx$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

풀어보기 4

$a_1=\overline{\mathrm{OP_1}}=1$, $a_2=\overline{\mathrm{P_1P_2}}=1\cdot\cos\theta$, $a_3=\overline{\mathrm{P_2P_3}}=1\cdot\cos^2\theta$, $a_4=\overline{\mathrm{P_3P_4}}=1\cdot\cos^3\theta\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$ 는 공비가 $\cos\theta$ 인 무한등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\cos\theta}=4$, $4\cos\theta=3$ $\therefore$ $\cos\theta=\frac{3}{4}$

논제 1(1)

[풀이 1] 제시문 (가)에 의해 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=m}^{n}f(k)=\sum_{k=m-c}^{n-c}f(k+c) \text{ 와 } \sum_{k=m}^{n}f(k)=\sum_{k=-n}^{-m}f(-k)$$

따라서

$$\sum_{k=2-n}^{1}f(k)=\sum_{k=-1}^{n-2}f(-k)=\sum_{k=-1+2}^{n-2+2}f(-(k-2))=\sum_{k=1}^{n}f(2-k)$$

가 되고, $f(1)=0$ 이므로

$$\sum_{k=2-n}^{n}f(k)=\sum_{k=2-n}^{1}f(k)+\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(2-k)+\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}$$

이 된다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n}f(k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k-1}{n}\right)^{10}+\frac{2(k-1)^2}{n^{10}}\right\}\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}$$

이다.

[풀이 2] 모든 정수 n에 대하여 $f(n)+f(2-n)=(n-1)^{10}+2(n-1)^2$ 을 만족하므로 $n=1$ 을 대입하면 $f(1)=0$ 이다.

$$\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=f(2-n)+f(3-n)+\cdots+f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

이다. 항의 개수가 $2n-1$ 개이므로 $f(1)=0$ 을 하나 더 추가해서 정리하면

$$f(n)+f(2-n)=(n-1)^{10}+2(n-1)^2$$
$$f(n-1)+f(3-n)=(n-2)^{10}+2(n-2)^2$$
$$\cdots$$
$$f(1)+f(1)=(n-n)^{10}+2(n-n)^2$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n-k)^{10}+2(n-k)^2\right\}$$

이고, 문제에 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n} f(k)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=1}^{n}\left\{(n-k)^{10}+2(n-k)^2\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{10}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(1-\frac{k}{n}\right)^{2}\frac{1}{n^9}\\&=\int_0^1(1-x)^{10}dx=\left[-\frac{1}{11}(1-x)^{11}\right]_0^1=\frac{1}{11}\end{aligned}$$

이다.

[풀이 3] 제시문 (가)의 결과를 사용하여 표현하면

$$\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=\sum_{k=-n}^{n-2} f(-k)=\sum_{k=-n+2}^{n} f(-(k-2))=\sum_{k=2-n}^{n} f(2-k)$$

이므로

$$2\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=\sum_{k=2-n}^{n}\{f(k)+f(2-k)\}=\sum_{k=2-n}^{n}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}$$

$$=\sum_{k=2-n}^{1}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}$$
$$=\sum_{k=-1}^{n-2}\left\{(-k-1)^{10}+2(-k-1)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}$$

이고

$$\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=-1}^{n-2}\left\{(-k-1)^{10}+2(-k-1)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)^{10}+2(k-1)^2\right\}\right]$$

이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n}f(k)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=-1}^{n-2}\{(-k-1)^{10}+2(-k-1)^{2}\}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^{10}+2(k-1)^{2}\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-1}^{n-2}\left\{(\frac{-k-1}{n})^{10}+\frac{2}{n^{8}}(\frac{-k-1}{n})^{2}\right\}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{(\frac{k-1}{n})^{10}+\frac{2}{n^{8}}(\frac{k-1}{n})^{2}\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{10}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^{10}dx$$

$$=\int_0^1 x^{10}dx$$

$$=\frac{1}{11}$$

논제 1(2)

$I(n,m)=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ 라 하자. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각 $f'(x)=x^n$, $g(x)=(1-x)^n$ 이라 두면 제시문 (나)에 의해

$$I(n,n)=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot(1-x)^n\right]_0^1+\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cdot(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{n+1}I(n+1,n-1)$$

같은 방법으로 하면

$$I(n+1,n-1)=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}(1-x)^{n-1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^{n+2}}{n+2}(n-1)(1-x)^{n-2}dx$$

$=\frac{n-1}{n+2}I(n+2,n-2)$ 이므로

$$I(n,n)=\frac{n}{n+1}I(n+1,n-1)=\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}I(n+2,n-2)$$

가 된다. 위와 같은 방법을 계속하면

$$I(n,n)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\cdot 2n}I(2n,0)$$

이다. 여기서 $I(2n,0)=\int_0^1 x^{2n}(1-x)^0dx=\frac{1}{2n+1}$ 이므로

$$I(n,n)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n\cdot(2n+1)}=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

이다.

논제 1(3)

(b)에서 $\int_0^1 (2x)^n (1-x)^n dx = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (2x)^n (1-x)^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx \right] \cdots ①$$

가 된다. $f_n(x) = \{2x(1-x)\}^n$ 라 두면 $0 \le x \le 1$ 인 모든 x에 대하여

$|f_n(x)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ 로 수렴하므로 제시문 (다)에 의해

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx \right] = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n \right] dx \ \cdots ②$$

가 성립한다.

$0 \le x \le 1$ 인 모든 x에 대하여 $0 \le 2x(1-x) \le \frac{1}{2}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n = 1 + \{2x(1-x)\}^1 + \{2x(1-x)\}^2 + \cdots = \frac{1}{1-2x(1-x)} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$$

이 된다. 따라서 ①, ②에 의해

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx \right]$$
$$= \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1} dx$$

이므로 다항함수 $p(x)$는 $p(x) = 2x^2 - 2x + 1$ 이다.

논제 1(4)

$f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 하자. 그러면

$$\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt = F\left(\frac{a+x}{2}\right) - F(a) - F(x) + F\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

$= 2F\left(\frac{a+x}{2}\right) - F(x) - F(a)$이다. $G(x) = 2F\left(\frac{a+x}{2}\right) - F(x) - F(a)$라고 하면

$G(a) = 0$이므로 $G(x) = (x-a)G_1(x)$ 인 다항함수 $G_1(x)$가 존재한다. 따라서

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^3} \left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt \right) = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)G_1(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \to a} \frac{G_1(x)}{(x-a)^2}$$

이 극한값이 존재하기 위해서는 $\lim_{x \to a} G_1(x) = G_1(a) = 0$ 이어야 하므로

$G_1(x) = (x-a)G_2(x)$ 인 다항함수 $G_2(x)$가 존재한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{G_1(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)G_2(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{G_2(x)}{(x-a)}$$

마찬가지로 이 극한값이 존재하기 위해서는 $\lim\limits_{x\to a}G_2(x)=G_2(a)=0$ 이어야 하므로 $G_2(x)=(x-a)g(x)$ 인 다항함수 $g(x)$가 존재한다. 따라서

$$\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt=2F\left(\frac{a+x}{2}\right)-F(x)-F(a)$$

$$=(x-a)G_1(x)=(x-a)^2G_2(x)=(x-a)^3g(x)$$

이다. 즉, 주어진 극한값이 존재하기 위해서

$$\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt=(x-a)^3g(x)$$

꼴이 되어야 한다. 양변을 x로 미분하면

$$f\left(\frac{a+x}{2}\right)-f(x)=3(x-a)^2g(x)+(x-a)^3g'(x)\ \cdots\ ①$$

등식 ①을 다시 x로 미분하면

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'(x)=6(x-a)g(x)+6(x-a)^2g'(x)+(x-a)^3g''(x)\ \cdots\ ②$$

등식 ②에 $x=a$를 대입하면 $f'(a)=0$ 이므로

극한값 $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt\right)$이 존재하기 위한 $f'(a)$의 조건은 $f'(a)=0$ 이다.

그리고 구하려는 극한은

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left\{\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt\right\}=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

이므로 등식 ②를 x로 미분하면

$$\frac{1}{4}f''\left(\frac{a+x}{2}\right)-f''(x)=6g(x)+18(x-a)g'(x)+9(x-a)^2g''(x)+(x-a)^3g'''(x)\ \cdots③$$

등식 ③에 $x=a$를 대입하면 $g(a)=-\frac{1}{8}f''(a)$ 이다. 따라서

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt\right)=g(a)=-\frac{1}{8}f''(a)$$ 이다.

[참고] 로피탈의 정리를 이용한 풀이

$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left\{\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt\right\}$에서

$x\to a$일 때, (분모)$\to 0$ 이고 (분자)$\to 0$ 이므로 $\frac{0}{0}$인 부정형 형태이다.

따라서 분모, 분자를 모두 x에 관해 미분한 후 다시 극한값을 계산해 본다.

즉,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{a+x}{2})\frac{1}{2}-\left\{f(x)-f(\frac{a+x}{2})\frac{1}{2}\right\}}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{a+x}{2})-f(x)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(\frac{a+x}{2})\frac{1}{2}-f'(x)}{6(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{4}f''(\frac{a+x}{2})-f''(x)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}f''(a)-f''(a)\right\}$$

$$=-\frac{1}{8}f''(a)$$

MEMO

5 서강대학교 수시1차

<문제 1> 다음 글을 읽고, 물음 [1-1], [1-2], [1-3], [1-4]에 답하라.

제 시 문 1

a, b를 실수라 하고, $i^2 = -1$이라 하자. 좌표평면에서 복소수 $a+bi$를 <그림 1>과 같이 점 $P(a, b)$에 대응시키자. $r = \sqrt{a^2+b^2}$이라 하고, 원점 O와 점 P를 지나는 동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$이다. 따라서 점 $a+bi$는 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$로 나타낼 수 있다(<그림 2> 참조). 만일 $r=1$이면 $a+bi$는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다.

a, b, c, d가 실수일 때, 복소수 $a+bi$와 $c+di$의 곱셈은

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

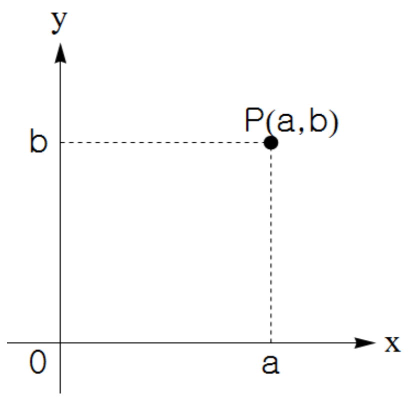
이고, 이것을 집합 $\{(a,b) \mid a, b \text{는 실수}\}$에서의 곱셈 연산

$$(a,\ b)(c,\ d) = (ac-bd,\ ad+bc) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

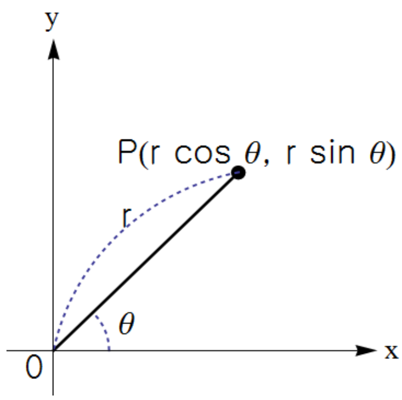
로 쓸 수 있다. 식 ①을 행렬로 나타내면

$$(a,\ b)(c,\ d) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

이다. 또한 점 $P(a, b)$에 대하여 원점 O를 시점으로 하는 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 (a, b)이다. 따라서 (a, b)는 복소수 $a+bi$로 볼 수도 있고, 벡터로 볼 수도 있다. 즉, $(a, b) = a+bi$이다.



<그림 1>



<그림 2>

[1-1] 회전변환을 이용하여 점 $(2, 1)$을 원점을 중심으로 45° 만큼 회전한 점을 구하라.

[1-2] 실수 α, β에 대하여, 식 ①, ②를 이용하여

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

임을 보여라.

[1-3] $(\cos\theta, \sin\theta)^1=(\cos\theta, \sin\theta)$ 라 하고, 1보다 큰 자연수 n에 대하여 $(\cos\theta, \sin\theta)^n=(\cos\theta, \sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)^{n-1}$이라 정의하자. 자연수 n에 대하여 $(\cos\theta, \sin\theta)^n=(\cos n\theta, \sin n\theta)$ 임을 보여라.

[1-4] 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 위의 서로 다른 점이며, 점 A_m의 좌표는 $(1,0)$이다. 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$은 정$m$각형의 꼭짓점이다. $z=(\cos\frac{2\pi}{m}, \sin\frac{2\pi}{m})=\cos\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{2\pi}{m}i$ 라 할 때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}_m}$을 z를 이용하여 나타내고, 이 벡터의 합과

$$1+\cos\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{4\pi}{m}+\cdots+\cos\frac{2(m-1)\pi}{m},\quad \sin\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{4\pi}{m}+\cdots+\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}$$

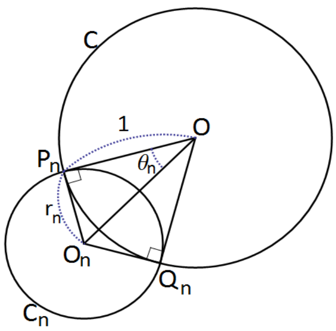
값을 구하라.

<문제 2> 다음 글을 읽고, 물음 [2-1], [2-2], [2-3], [2-4]에 답하라.

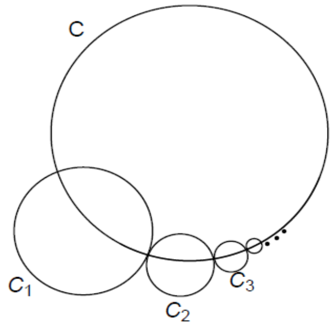
제 시 문 2

두 개의 원이 직각으로 만난다는 것은, 두 개의 점에서 만나며 각 교점에서의 각 원에 대한 접선이 수직인 것을 말한다. 중심이 점 O이고 반지름이 1인 원 C에 대하여, <그림 3>과 같이 C와 직각으로 만나며 반지름이 r_n이고 중심이 O_n인 원 C_n들을 배치하려고 한다($n=1,2,\cdots$). 이때 원 $C_1, C_2, C_3, \cdots$의 내부들은 서로 만나지 않도록 한다. C와 C_n의 두 교점을 각각 P_n, Q_n이라 하면 직선 OP_n과 OQ_n은 각각 점 P_n, Q_n에서의 C_n의 접선임을 알 수 있다.

그런데 $r_n=\dfrac{1}{n}$이면 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 들을 모두 배치하는 것이 불가능하지만, $r_n=\dfrac{1}{2^n}$이라면 <그림 4>와 같이 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 들을 시계 반대 방향으로 돌아가면서 접하게 배치해 나가면 C_n들을 모두 배치할 수 있을 것이다.



<그림 3>



<그림 4>

[2-1] <그림 3>에서처럼 원 C위의 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$에 해당하는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$을 θ_n이라 하자. 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$으로 둘러싸인 영역의 넓이 A_n을 θ_n으로 나타내어라. r_n이 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$를 만족한다고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{r_n^2}$을 구하라.

[2-2] $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 일 때, 부등식 $x \le \tan x \le 2x$ 가 성립함을 보여라.

[2-3] 앞의 문항 [2-2]의 부등식을 이용하여 제시문 속의 밑줄 친 내용이 타당함을 설명하라.

[2-4] $r_n = \frac{1}{2^n}$ 일 때 <그림 4>와 같이 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 들을 접하게 하지 않고, 임의의 위치에 배치해 나간다면 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 을 모두 배치하는 것이 항상 가능한지를 논하라.

제시문 분석

1. 제시문 1

복소수 $a+bi$를 좌표평면 위의 점 (a, b)로 일대일대응을 시킬 수 있음을 설명하고 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$의 곱셈을 이용하여 두 점 (a, b)와 (c, d)의 곱셈을 정의하고 있다.

2. 제시문 2

한 원과 직각으로 만나는 원을 무한히 배치하기 위한 반지름의 조건에 대해 설명하고 있다.

논제 분석

[1-1] 회전변환을 나타내는 행렬을 알고 있는가?

회전변환을 나타내는 행렬을 이용하여 회전한 점을 구하면 된다.

[1-2] 두 점의 곱셈을 행렬로 표현한 식을 이용하여 삼각함수의 덧셈정리를 증명할 수 있는가?

②에 대한 기하학적 의미를 이용하여 삼각함수의 덧셈정리를 증명할 수 있다.

[1-3] 수학적 귀납법을 이용하여 ‘드 무아브르의 정리’를 증명할 수 있는가?

두 점의 곱셈에 대한 기하학적 의미와 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있다.

[1-4] 벡터의 합을 복소수의 합으로 나타내고 활용할 수 있는가?

[1-3]의 결과를 이용하면 벡터의 합을 복소수의 합으로 나타낼 수 있고 주어진 값을 계산할 수 있다.

[2-1] 주어진 도형(활꼴)을 n에 대한 식으로 나타내고 극한을 구할 수 있는가?

부채꼴의 넓이에서 삼각형의 넓이를 빼면 활꼴의 넓이를 구할 수 있고 이를 이용하여 극한을 구할 수 있다.

[2-2] 주어진 구간에서 그래프를 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가?

도함수를 이용하여 그래프의 개형을 파악하고 부등식이 성립하기 위한 조건을 생각해 본다.

[2-3] 한 원과 직각으로 만나는 원을 무한히 배치하기 위한 조건을 발견할 수 있는가?

[2-2]의 결과를 이용하여 주어진 원의 중심각과 직각으로 만나는 원의 반지름의 관계를 부등식으로 나타내어 본다.

[2-4] 한 원과 직각으로 만나는 원을 서로 접하게 무한히 배치할 수 있을 때 임의의 위치에 배치하더라도 무한히 배치할 수 있는가?

주어진 원과 직각으로 만나는 원 n개를 임의의 위치에 배치했다고 가정할 때 $n+1$번째 원을 남은 자리에 배치할 수 있는지 생각해 본다.

배경지식 쌓기

1. 회전변환

원점을 중심으로 각 θ만큼 회전이동하는 회전변환을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

이다.

2. 드 무아브르의 정리

자연수 n에 대하여

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

이다.

3. 수학적 귀납법

명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 (1), (2)를 증명하면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다. (2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

위와 같은 방법으로 명제가 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

4. 부등식과 미분

(1) $[a,\ b]$ 에서 $f(x) > 0$ 의 증명

① 극값이 존재할 때 (최솟값)> 0

② 증가함수일 때, $f'(x) \geq 0,\ f(a) > 0$

③ 감소함수일 때, $f'(x) \leq 0,\ f(b) > 0$

(2) $f(x) > g(x)$ 의 증명

$F(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓고, $F(x)$의 증감 상태를 조사하여

$F(x) = f(x) - g(x) > 0$ 임을 보인다.

풀어보기

1. 제 1사분면 위의 점 $P_0(x_0,\ y_0)$이 주어졌을 때, 자연수 n에 대하여 점 $P_n(x_n,\ y_n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix}$$

이 때, 점 P_{2003}의 좌표는? (2003 대수능)

① (x_0, y_0)

② $(x_0, -y_0)$

③ $\left(\dfrac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

④ $\left(\dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right)$

⑤ $\left(\dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \dfrac{-x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

2. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(n^2+1)\cdot n!=n\cdot(n+1)!$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!=k\cdot(k+1)!$$

이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$

$$=\boxed{\text{(가)}}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$

$$=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\cdot(k+1)!$$

$$=(k+1)\cdot\boxed{\text{(다)}}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

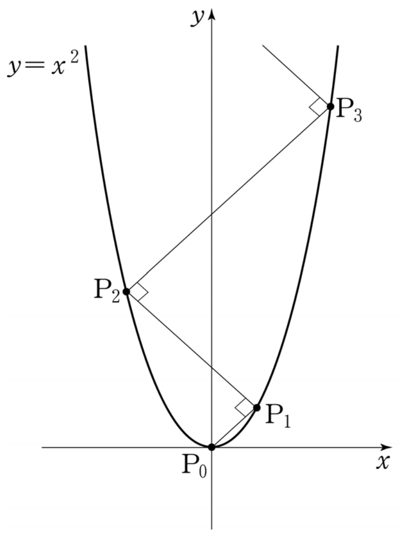
위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? (2008 대수능)

	(가)	(나)	(다)
①	$k\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$
②	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
③	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+1)!$
④	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
⑤	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$

3. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
> (나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
> (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은? (2009 대수능)

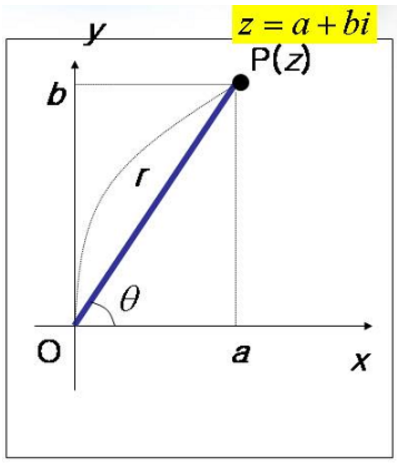


① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

읽기 자료

복소수의 극형식과 복소평면

허수단위 i와 임의의 실수 a, b에 대하여 $a+bi$는 복소수가 된다. 또한 임의의 복소수는 $a+bi$의 꼴로 표기할 수 있다. 복소수 $a+bi$를 좌표평면 위의 점 (a, b)에 대응시키면, 이 대응은 복소수 전체의 집합에서 좌표평면으로의 일대일대응이다. 따라서 좌표평면 위의 점 (a, b)가 복소수 $a+bi$를 나타낸다고 할 수 있다. 이와 같이 생각한 좌표평면을 **복소평면**이라고 한다. 이때 x축 위의 점 $(a, 0)$은 실수를 나타내고 y축 위의 점 (o, b)는 순허수를 나타내므로 x축을 실수축, y축을 허수축이라고 한다. 그리고 복소수 z를 나타내는 복소평면 위의 점을 그냥 간단히 '점 z'라고 부른다.



복소수 $z=a+bi$가 0이 아니고, 이 복소수를 나타내는 점을 P라고 하자. 선분 OP의 길이를 r, 동경 OP를 나타내는 각을 θ라고 하면

$$a=r\cos\theta\,,\quad b=r\sin\theta$$

가 된다. 따라서

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

를 얻는다. 위 등식의 우변의 꼴로 나타낸 복소수를 복소수 z의 **극형식**이라고 한다. 이때 r를 복소수 z의 절댓값, θ를 z의 편각이라고 하며 각각

$$r=|z|\,,\quad \theta=\arg z$$

로 나타낸다. 참고로 복소수 0의 절댓값은 실수의 절댓값과 마찬가지로 $|0|=0$으로 정의한다. 또한 0의 편각은 정의되지 않는다. 0이 아닌 복소수의 편각은 하나로 정해지지 않는다. 예를 들어 $-i$의 편각은 $(2n+1)\pi$의 꼴이 된다. 즉 arg는 여러 개의 값을 갖는 함수가 된다. 이렇게 여러 개의 값을 갖는 함수를 다가함수라고 한다. 다가함수는 엄밀히 말해서 함수가 아니므로 $\theta=\arg z$와 같이 등호를 사용하는 것은 논리적으로 옳지 않지만, 편의상 이와 같은 표기를 사용하는 것이다. 주어진 복소수 z의 편각 중에서 0 이상 2π 미만인 것을 $Arg z$로 표기한다.

복소수의 절댓값 $|z|$와 편각 θ는

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

로 결정된다.

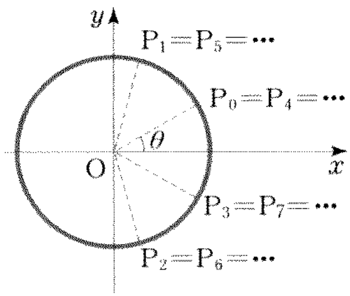
예시 답안

풀어보기 1

행렬 $\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}$는 원점을 중심으로 45°만큼 회전이동시키는 일차변환을 나타내고, 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$은 x축에 대한 대칭변환을 나타낸다.

따라서 두 일차변환에 의해서 점을 옮겨도 원점으로부터의 거리가 변하지 않는다.

아래의 그림에서 점 P_0이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하고, 점 P_1, P_2, P_3, P_4와 원점을 이은 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 차례로 구해 보면 $\theta+\frac{\pi}{4}$, $-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$, $-\theta$, θ가 되어 $P_0=P_4$임을 알 수 있다. 즉, $P_n=P_{n+4}$이므로 $P_{2003}=P_3$이다. 따라서 P_{2003}의 좌표는 $(x_0, -y_0)$이다.



답 ②

풀어보기 2

① $\underbrace{\boxed{k(k+1)!}}^{(\text{가})}+\left\{(k+1)^2+1\right\}\cdot(k+1)!$

$=\left\{k+(k+1)^2+1\right\}\cdot(k+1)!$

$=\underbrace{\boxed{\left\{k^2+3k+2\right\}}}_{(\text{나})}\cdot(k+1)!$

$=(k+1)(k+2)(k+1)!$

$=(k+1)\underbrace{\boxed{(k+2)!}}_{(\text{다})}$

답 ②

풀어보기 3

직선 P_0P_1의 기울기가 1이므로 직선 P_1P_2의 기울기는 -1이다.

점 $P_1(1, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$이므로 점 P_2의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$x<0$이므로 $x=-2$ $\therefore$ $P_2(-2, 4)$

점 $P_2(-2, 4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$이므로 점 P_3의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0$

$$(x+2)(x-3)=0$$

$x>0$이므로 $x=3$ $\therefore$ $P_3(3, 9)$

점 $P_3(3, 9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-9=-(x-3)$ 즉, $y=-x+12$이므로 점 P_4의 좌표를 구하면

$x^2=-x+12$에서 $x^2+x-12=0$

$$(x+4)(x-3)=0$$

$x<0$이므로 $x=-4$ $\therefore$ $P_4(-4, 16)$

이와 같은 방법으로 P_n의 좌표를 구하면

$$P_{2m-1}(2m-1, 4m^2-4m+1),\ P_{2m}(-2m, 4m^2)$$

$n=2m$일 때,

$$l_n=l_{2m}=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}=\sqrt{2}(4m-1)=\sqrt{2}(2n-1)$$

$n=2m+1$일 때,

$$l_n=l_{2m+1}=\overline{P_{2m}P_{2m+1}}=\sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}=\sqrt{2}(4m+1)=\sqrt{2}(2n-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}$$

$$=2\sqrt{2}$$

답 ②

논제 1-1

점 $(2,1)$ 을 원점을 중심으로 45° 만큼 회전한 점은

$$\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 구하는 점은

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

이다.

논제 1-2

식 ②를 이용하면

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)(\cos\beta,\ \sin\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

이다. 이 식의 우변은 점 $(\cos\beta, \sin\beta)$ 를 원점을 중심으로 α만큼 회전한 점이므로

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$$

이다.

따라서 실수 α, β 에 대하여

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

이다.

논제 1-3

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)^n=(\cos n\theta,\ \sin n\theta)\ \ \cdots\ ㉠$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=(\cos\theta,\ \sin\theta)^1=(\cos\theta,\ \sin\theta)=(\text{우변})$$

따라서 $n=1$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)^k=(\cos k\theta,\ \sin k\theta)\ \ \cdots\ ㉡$$

이 성립하므로 ㉡의 양변에 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 을 곱하면

$$\begin{aligned}(\cos\theta,\ \sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta,\ \sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)^k\\ &=(\cos\theta,\ \sin\theta)(\cos k\theta,\ \sin k\theta)\\ &=(\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta,\ \sin\theta\cos k\theta+\cos\theta\sin k\theta)\\ &=(\cos(k+1)\theta,\ \sin(k+1)\theta)\end{aligned}$$

$$\therefore\ (\cos\theta,\ \sin\theta)^{k+1}=(\cos(k+1)\theta,\ \sin(k+1)\theta)$$

위의 등식은 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

논제 1-4

점 A_m의 좌표가 $(1,0)$이고, 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$은 정$m$각형의 서로 다른 꼭짓점이므로

$$\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m\}=\{z, z^2, \cdots, z^m\}$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}_m}=z+z^2+z^3+\cdots+z^m$$

이다. $z=\cos\dfrac{2\pi}{m}+\sin\dfrac{2\pi}{m}i$, $z^m=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}_m}=z+z^2+z^3+\cdots+z^m=\frac{z(z^m-1)}{z-1}=0$$

이다. 또한

$$0=z+z^2+z^3+\cdots+z^m=\sum_{k=1}^{m}z^k=\sum_{k=1}^{m}\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{2\pi}{m}i\right)^k=\sum_{k=1}^{m}\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+\sin\frac{2k\pi}{m}i\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sum_{k=1}^{m}\sin\frac{2k\pi}{m}$$

$$=\left\{1+\cos\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{4\pi}{m}+\cdots+\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right\}+i\left\{\sin\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{4\pi}{m}+\cdots+\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right\}$$

이므로

$$1+\cos\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{4\pi}{m}+\cdots+\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}=0,\ \sin\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{4\pi}{m}+\cdots+\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}=0$$

이다.

논제 2-1

$A_n=$ (부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 의 넓이) $-$ (삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 의 넓이)

$$=\frac{1}{2}r_n^2(\pi-2\theta_n)-\frac{1}{2}r_n^2\sin(\pi-2\theta_n)$$

이다. 또한 $r_n=\tan\theta_n$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}\tan^2\theta_n(\pi-2\theta_n)-\frac{1}{2}\tan^2\theta_n\sin(\pi-2\theta_n)$$

이다.

$$\frac{A_n}{r_n}=\frac{1}{2}(\pi-2\theta_n)-\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta_n)=\frac{1}{2}\{(\pi-2\theta_n)-\sin(\pi-2\theta_n)\}$$

이고, $n\to\infty$ 이면 $r_n\to 0$, $\theta_n\to 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{r_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\{(\pi-2\theta_n)-\sin(\pi-2\theta_n)\}\right]=\frac{\pi}{2}$$

이다.

논제 2-2

(i) $f(x)=\tan x-x$ 라 하자. 그러면 $f'(x)=\sec^2 x-1$ 이고

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 일 때 $1\le\sec^2 x\le 2$ 이므로 $f'(x)\ge 0$ 이다.

$f(0)=0$ 이므로 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이다. 따라서 $x\le\tan x$ 이다.

(ii) $g(x)=\tan x-2x$ 라 하자. 그러면 $g'(x)=\sec^2 x-2$ 이고

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 일 때 $1\le\sec^2 x\le 2$ 이므로 $g'(x)\le 0$ 이다.

$g(0)=0$ 이므로 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 일 때 $g(x)\le 0$ 이다. 따라서 $\tan x\le 2x$ 이다.

그러므로 (i), (ii)에 의해 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 일 때, $x\le\tan x\le 2x$ 이다.

논제 2-3

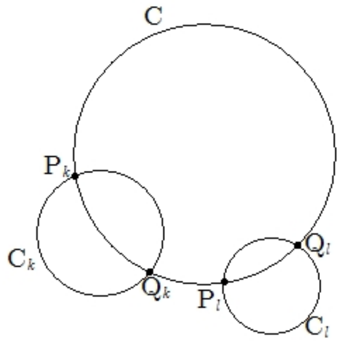
$0<\tan\theta_n=r_n=\frac{1}{n}\le 1$이므로 $0<\theta_n\le\frac{\pi}{4}$ 이다. [2-2]의 부등식에 의해

$$\theta_n\le\tan\theta_n=\frac{1}{n}\le 2\theta_n \quad \cdots \text{㉠}$$

이다. C_1, C_2, C_3, $\cdots$ 들을 모두 배치하려면 $\sum_{n=1}^{\infty}2\theta_n\le 2\pi$ 이어야 한다. 그런데 ㉠에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}2\theta_n$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}2\theta_n>2\pi$ 이다. 그러므로 $r_n=\frac{1}{n}$ 이면 C_1, C_2, C_3, $\cdots$ 들을 모두 배치하는 것이 불가능하다.

논제 2-4

$r_n = \dfrac{1}{2^n}$ 일 때 n개의 원 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$들을 접하게 하지 않고, 임의의 위치에 배치하였다고 하자. 아래의 그림과 같이 서로 인접한 두 원 C_k, C_l



$(1 \le k \le n,\ 1 \le l \le n\ \ k, l$은 자연수)에 대하여 원 C 위의 호 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_l$, $\mathrm{P}_l\mathrm{Q}_k$ 중 길이가 짧은 것을 원 C_k, C_l의 간격이라고 하자. 그러면 총 n개의 간격이 존재한다.

(원 C위의 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이)$=1\times 2\theta_n = 2\theta_n$이고

$$\theta_n \le \tan\theta_n = \frac{1}{2^n} \le 2\theta_n$$

이므로

$$\frac{1}{2^n} \le 2\theta_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

이다. 그리고

$$1-\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \le \sum_{k=1}^{n} 2\theta_k \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

이고

$$(n\text{개의 간격의 길이의 합}) = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} 2\theta_k$$

이므로

$$2\pi - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} \le (n\text{개의 간격의 길이의 합}) \le 2\pi - 1 + \frac{1}{2^n}$$

이다.

따라서 n개의 간격 중 적어도 하나의 길이는 $\dfrac{1}{n}\left(2\pi - 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$보다 크거나 같다.

또한 $f(x) = (\pi-1)2^{x+1} - x + 2$라고 하자. $f'(x) = (\pi-1)2^{x+1}\ln 2 - 1$이므로 $x \ge 1$일 때 $f'(x) > 0$이고 $f(1) > 0$이다. 따라서 $x \ge 1$일 때

$$(\pi-1)2^{x+1}-x+2>0$$

이다. 그러므로 자연수 n에 대하여

$$(\pi-1)2^{n+1}+2>n$$

이고

$$\frac{(\pi-1)2^{n+1}+2}{2^n}>\frac{n}{2^n}$$

이므로

$$\frac{1}{n}(2\pi-2+\frac{1}{2^{n-1}})>\frac{1}{2^n} \quad \cdots \text{㉠}$$

이다. 또한

$$\frac{1}{2^{n+1}}\leq 2\theta_{n+1}\leq\frac{1}{2^n} \quad \cdots \text{㉡}$$

이므로 ㉠, ㉡에 의해 n개의 간격 중 적어도 하나의 길이는 $2\theta_{n+1}$보다 크다.

따라서 n개의 간격 중 적어도 하나에 원 C_{n+1}을 배치할 수 있다. 그러므로 이 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 들을 접하게 하지 않고, 임의의 위치에 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 을 모두 배치하는 것은 항상 가능하다.

MEMO

6 서강대학교 수시2차

[문제 1] 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

제 시 문 1

실수와 유리수를 구분 짓는 핵심은 적합한 극한 이론 구성의 가능성과 관련된 공리이다. 유리수는 수학을 위해 필요한 산술적 성질과 그 밖의 많은 중요한 성질들을 갖고 있지만, 유리수만으로는 수렴하는 수열의 극한값을 표현할 수 없기 때문에 체계적인 극한 이론을 위해서는 적당하지 않다. 예를 들면 $\sqrt{2}$를 소수 n째 자리까지 나타낸 항들로 이루어진 유리수의 수열 $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$는 명백히 $\sqrt{2}$로 수렴하는데, 우리가 이미 알고 있듯이 해당 수열의 극한값 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. 이와 같은 이유로, 극한 이론에서 출발한 미적분학이 수학적 체계를 갖추기 위해서는 완비성을 갖춘 실수의 구성이 필요하였다. 프랑스의 수학자 코시(Cauchy)는 유리수에서 출발하여 유리수 수직선에 새로운 점들을 추가하는 방식으로 실수의 집합을 구성했고, 이와는 다른 방식으로 완비성을 갖춘 실수의 집합을 구성하는 방법은 이후에 독일 수학자 데데킨트(Dedekind)에 의하여 개발되었다.

실수의 완비성을 공리로 구성하는 방법은 여러 가지가 있으며, 그 방법들은 각각 서로 동치이다. 그 중 하나는 위로 유계인 단조증가 수열이 반드시 실수값의 극한을 갖는다고 가정하는 것이다. 이를 수학적으로 표현하자면 **무한수열 $\{a_n\}$과 어떤 양수 M이 있어, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le a_{n+1}$이고 $a_n < M$이면, 수열 $\{a_n\}$은 적당한 실수 α에 수렴한다.** 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이다. 위에서 언급한 실수의 성질을 수학자들이 공리로 받아들임으로써 순환하지 않는 무한소수까지도 모두 실수에 속하게 된다.

단조증가 수열의 대표적인 예는 음이 아닌 항들로 구성된 급수의 부분합 수열이다. 무한수열 $\{a_n\}$의 각 항을 모두 더한 식을 무한급수 또는 간단히 급수라 하고 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 로 나타낸다. 이 급수에서 첫째항부터 n항까지의 합 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 급수의 제 n 부분합 또는 간단히 부분합이라 부른다.

이렇게 정의된 부분합의 수열 $\{s_n\}$이 s에 수렴할 때, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$는 s에 수렴한다고 정의하고 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ 라 표기한다. 이러한 정의에 따르면 <u>① 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 가</u>

수렴하는 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. 또한 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 각각 α와 β에 수렴할 때, 임의의 실수 p, q에 대해 수열 $\{pa_n + qb_n\}$은 $p\alpha + q\beta$에 수렴한다는 것으로부터, 두 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 가 각각 s와 t에 수렴하는 경우 임의의 실수 p, q에 대하여, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(pa_k + qb_k)$ 는 $ps + qt$ 에 수렴함을 알 수 있다.

위에서 언급한 실수의 완비성을 무한급수에 적용하면, ② 모든 n에 대하여 $0 \le b_n \le c_n$ 이고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ 가 수렴하는 경우, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 도 수렴하게 된다. 마찬가지로 수열 $\{b_n\}$의 각 항이 음수가 아닐 때, 모든 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} b_k \le a_n$ 을 만족하고 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하면, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 도 적당한 실수에 수렴한다. 이에 대한 구체적인 예를 들자면 ③ $a_n = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ 을 이용해서 무한급수 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$이 수렴함을 보일 수 있다. 이는 해당 급수가 수렴하게 되는 극한값을 구체적으로 찾지 않고서도 실수의 완비성으로부터 급수가 어떤 실수값에 수렴함을 알 수 있다는 것을 의미한다.

[1-1] 밑줄 친 ①을 증명하라.

[1-2] 실수의 수열 $\{a_n\}$에서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 가 수렴하면, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$도 수렴함을 증명하라. (밑줄 친 ②와 $0 \le |a_k| - a_k \le 2|a_k|$ 임을 이용할 것)

[1-3] 밑줄 친 ③을 구체적으로 설명하라.

[1-4] 두 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(2a_k + 3b_k)$ 과 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - 2b_k)$ 가 모두 수렴할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 수렴하는가?

[문제 2] 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

제 시 문 2

미분 가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있을 때, 곱의 미분법에 의하면 $f(x)g(x)$의 도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

부정적분의 기호를 사용해서 위 식을 나타내면 다음과 같다.

$$\int[f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]dx=f(x)g(x) \quad \text{또는}$$

$$\int f(x)g'(x)dx+\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)$$

위 식을 정리하면 아래의 식을 얻는다.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

이 식을 사용하는 적분법을 부분적분법이라 부른다. 또한 위 식에서 $u=f(x)$ 그리고 $v=g(x)$라 놓으면 $du=f'(x)dx$이고 $dv=g'(x)dx$이므로, 다음의 간편한 식을 얻게 된다.

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

부분적분법은 많은 경우 피적분함수가 두 함수의 곱으로 이루어진 경우에 적용할 수 있다. 하지만 일반적인 곱의 적분법은 존재하지 않기 때문에 부분적분법을 사용하여 부정적분을 구할 수 있는 경우는 한정되어 있다. $\int x\sin x\,dx$를 예로 살펴보자. $f(x)=x$ 그리고 $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos x$ 이므로 부분적분법에 의하여 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$$

한편 $f(x)=\sin x$ 그리고 $g'(x)=x$로 놓고 부분적분법을 사용하면 $f'(x)=\cos x$이고 $g(x)=x^2/2$ 이므로

$$\int x\sin x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin x-\frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$$

를 얻게 되고, 이 식은 부정적분 $\int x\sin x\,dx$ 을 구하는데 전혀 도움이 되지 않는다. 따라서 부분적분법을 사용해서 부정적분을 구할 수 있는 경우라 하더라도 어느 것을 $f(x)$, 어느 것을 $g'(x)$ 로 놓아야 할 것인가를 올바로 판단해야 한다. 일반적으로 피적분함수가 x^n 과 $\sin x$ (또는 $\cos x$, 또는 e^x)의 곱일 때에는 $f(x)=x^n$ 그리고 $g(x)=\sin x$ (또는 $g(x)=\cos x$ 또는 $g(x)=e^x$)라 놓고 부분적분법을 반복 사용한다.

이제 부정적분 $\int x\sin(x^2)\,dx$ 을 살펴보자. 피적분함수 $x\sin(x^2)$은 x와 $\sin(x^2)$의 곱으로 표시되어 있지만 부분적분법으로는 $\int x\sin(x^2)\,dx$ 을 구할 수 없다. 반면에 $u=x^2$ 으로 치환하면 $du=2x\,dx$ 즉 $x\,dx=\frac{1}{2}du$ 가 되므로

$$\int x\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos(x^2)+C$$

를 얻을 수 있다. 부분적분법을 정적분에 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[2-1] 함수 $f(x)$가 연속인 2계 도함수를 갖고, $f(1)=f(2)=5$ 이고 $f'(1)=3,\ f'(2)=2$ 일 때, $\int_1^2 xf''(x)\,dx$ 의 값을 구하라.

[2-2] n이 2 이상의 자연수일 때 $\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$ 임을 설명하고 이를 이용하여 $\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2n}x\,dx$ 의 값을 구하라.

[2-3] $a_n=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^n x\,dx$ 이라 놓을 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1$ 이 성립함을 설명하라.

[2-4] $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ 가 표준정규분포의 확률밀도함수임을 이용하여, k가 자연수일 때 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{2k}e^{-x^2/2}dx=\frac{(2k)!}{k!\,2^{k+1}}\sqrt{2\pi}$ 임을 증명하라.

(단, 임의의 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ 이다.)

제시문 분석

1. 제시문 1

급수의 수렴판정법 중에서 비교판정법(comparison test)와 적분판정법(integral test)을 소개하고 있다.

2. 제시문 2

부분적분법의 일반적인 방법을 소개하고 있다.

논제 분석

[논제 1-2]

주어진 힌트를 활용하면 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$가 수렴(절대수렴, absolutely convergence) 하면, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$도 수렴함을 보일 수 있다.

[논제 2-4]

확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 면적이 1이므로 그 반은 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}$ 이다.

배경지식 쌓기

1. 비교판정법(comparison test)

모든 n에 대하여 $0 \le b_n \le c_n$ 이고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 가 수렴하는 경우, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 도 수렴한다.

<증명> 모든 n에 대하여 $0 \le b_n \le c_n$ 이므로

$$0 \le S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

이때 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$가 C로 수렴하면

$$0 \le S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k = C$$

가 성립한다. 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$의 부분합 수열 $\{S_n\}$이 증가수열이고 위로 유계이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$는 수렴한다.

2. 삼각함수의 적분

일반적으로 삼각함수 거듭제곱의 적분은 부분적분을 이용하면 다음과 같은 점화 관계식을 얻을 수 있다.

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

풀어보기

1. '급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$' 이지만 그 역은 성립하지 않는다. 그 예를 두 가지만 들어라.

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x) = 2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a) = 0\ ,\quad \int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}\,dx = k\ \ (a > 0\ ,\ 0 < k < 1)$$

일 때, $\int_0^{2a} \frac{f(x)^2}{x^2}\,dx$의 값을 k로 나타내어라.10)

10) 2011 대수능

읽기 자료

완비성 공리[11)]

실수의 집합은 유리수의 집합처럼 사칙연산을 자유롭게 할 수 있는 성질을 가지고 있으며, 임의의 두 실수의 크기를 비교할 수 있으며 극한도 자유롭게 사용할 수 있다. 이와 같이 극한을 이용하여 함수의 다양한 성질을 밝히는 수학 분야를 ‘해석학(Analysis)’이라고 한다.

17세기에 창안되어 급격히 발전한 수학의 분야로 미적분학을 들 수 있다. 이 분야는 극한 개념을 기초로 이루어진 것으로, 극한 개념을 제대로 다루려면 실수의 성질을 완벽하게 이해할 필요가 있다. 물론 초창기의 미적분학은 다분히 직관적인 방식으로 다루어졌다. 실수라는 것도 이미 인간이 어느 정도 알고 있는 것으로 치부되었다. 그러나 미적분학의 수준이 점점 높아지면서, 유리수와는 다른 실수의 성질 때문에 직관과는 다른 결과들이 발견되기 시작하였다. 이런 상황에서 미적분학을 엄밀히 다루려면 실수가 무엇인지 제대로 설명할 수 있어야 하였다. 여기에 성공한 두 위대한 인물이 독일의 수학자 데데킨트(Richard Dedekind)와 칸토어(Georg Cantor)였다.


R. Dedekind(1831~1916)

그림 출처: Wikipedia

그들은 유리수를 이용하여 실수를 구성하는 독창적인 방법을 제시하였다. 데데킨트는 유리수를 두 집합으로 나누는 절단(cut, 독일어로 Schnitt)이라는 개념을 이용하였고, 칸토어는 유리수로 이루어진 무한수열을 이용하였는데, 나중에 수학자들은 이 두 방법이 사실상 같은 결과를 나타낸다는 것을 증명할 수 있었다. 여기서 두 수학자의 방식을 엄밀하게 설명하기는 어려우니, 고대 수학자들이 실수를 다룬 방식과 관련지어 설명하겠다.

먼저 데데킨트의 방식은 다루려는 실수보다 작은 유리수와 큰 유리수의 두 집합으로 나누어 집합 자체를 수처럼 다루는 방식이다. 즉, 실수 하나가 유리수 집합을 둘로 절단한다. 이것은 실수의 모델인 수직선에서 착안한 것으로, 수직선 위를 빼곡히 채우고 있는 유리수를 이용하여 유리수로 채우지 못하는 빈틈인 무리수를 설명하려는 것이다.

한편 칸토어의 방식은 무한소수를 이용한 것이다. 무한소수가 실수를 나타내므로, 무한소수를 직접 다룰 수는 없다. 따라서 유한소수를 무한히 늘어놓는 수열을 생각하고, 이 수열 자체를 하나의 수처럼 다루는 방식이다. 데데킨트의 방식처럼 집합을 수처럼 다루거나 칸토어의 방식처럼 수열을 수처럼 다루는 것은 처음에는 무척 어색하게 보이지만, 여기에는 현대 수학의 철학이 잘 반영되어 있다고 할 수 있다.

11) 네이버 캐스트 수학산책 중에서

이렇게 만들어진 실수는 유리수와는 다른 특징이 많다. 실수와 유리수 모두 무한히 많지만, 집합론의 관점에서는 무한한 정도가 다르다. 이를 농도라고 한다. 자연수, 정수, 유리수의 농도는 모두 같으나, 실수는 더 큰 농도를 갖는다. 또, 유리수로 이루어진 수열이 어떤 값에 무한히 가까워진다고 해서 그 값 자체가 유리수라고는 할 수 없지만, 실수로 이루어진 수열이 어떤 값에 무한히 가까워진다면 그 값은 반드시 실수가 된다. 이것은 실수의 모델인 수직선이 빈틈없이 연결되어 있다는 점을 생각하면 당연해 보이기도 한다. 이와 같은 성질을 완비성(completeness)이라 한다. 이것은 유리수와 실수를 구분하는 가장 큰 특징이기도 하며, 이 때문에 실수를 이해하기 위해서는 극한의 개념이 반드시 필요하다.

예시 답안

풀어보기 1

$a_n=\dfrac{1}{n}$ (조화수열) 과 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

풀어보기 2

$$\int_a^{2a} x^{-2}\cdot\{f(x)\}^2dx=\left[-x^{-1}\cdot\{f(x)\}^2\right]_a^{2a}-\int_a^{2a}\{-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)\}dx$$

$$=\left[-2a^{-1}\cdot\{f(2a)\}^2+a^{-1}\cdot\{f(a)\}^2\right]+\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

그런데, $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고 $f(a)=0$이므로 $f(2a)=2f(a)f'(a)=0$

$$\therefore\ \int_a^{2a}x^{-2}\cdot\{f(x)\}^2dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx=\int_{2t}^{4t}\frac{2f(t)}{t}\cdot\frac{1}{2}dt(\because\ 2x=t\rightarrow 2dx=dt)$$

$$=\int_{2t}^{4t}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

논제 1-1

급수 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$이 S로 수렴한다고 하면 $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=S$이다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

이다.

논제 1-2

모든 자연수 k 에 대하여 $0 \le |a_k| - a_k \le 2|a_k|$ 이고, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 가 수렴하므로 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = S$ 라 둘 수 있다. $|a_k| - a_k = b_k$ 라 하자. ② 번에 의해 $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| - a_k)$ 도 수렴하므로 그 합을 S' 라 두면 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S'$ 이다. $a_k = |a_k| - b_k$ 이고

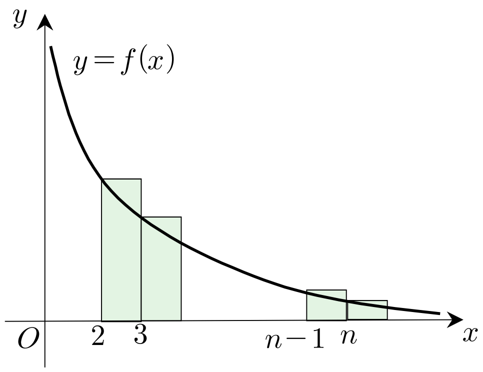
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S - S'$$

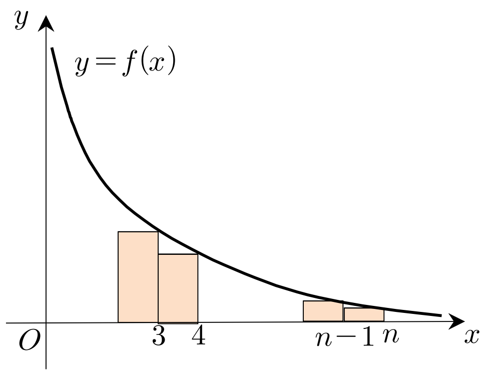
이므로 무한급수는 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S - S'$ 으로 수렴한다.

논제 1-3

함수 f 를 $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}\ (x \ge 2)$ 로 두면, $f(x)$ 는 감소함수이므로

$f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \ge \int_2^{n+1} f(x)dx$ 이고, $f(3)+f(4)+\cdots+f(n) \le \int_2^n f(x)dx$ 이다.(아래 그림참조)





따라서

$$f(2) + \{f(3)+f(4)+\cdots+f(n)\} \le f(2) + \int_2^n f(x)dx$$

이다. 한편, $a_n = \int_2^n \dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$ 에서 $\ln x = t$ 로 치환하면 x 가 $2 \to n$ 까지 변할 때 t 는 $\ln 2 \to \ln n$ 까지 변한다. 그리고 $\dfrac{1}{x}dx = dt$ 이므로

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_{\ln 2}^{\ln n}\frac{1}{t^2}dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$$

을 얻는다. 이때 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\ln 2}$ 로 수렴한다.

따라서 $c_n = f(2) + a_n = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + a_n$ 이라 두면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$ 에 수렴하고 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2} \le c_n$ 을 만족하므로 제시문에 의하여 무한급수 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$ 이 수렴한다.

논제 1-4

제시문에 의하면 두 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(2a_k + 3b_k)$ 과 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - 2b_k)$ 가 모두 수렴할 때 임의의 실수 p, q 에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty}\{p(2a_k + 3b_k) + q(a_k - 2b_k)\}$ 는 수렴한다.

(i) $p = \frac{2}{7}, q = \frac{3}{7}$ 이면 $\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{7}(2a_k + 3b_k) + \frac{3}{7}(a_k - 2b_k)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 이므로 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 는 수렴한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(ii) $p = \frac{1}{7}, q = -\frac{2}{7}$ 이면 $\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{7}(2a_k + 3b_k) - \frac{2}{7}(a_k - 2b_k)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 이므로 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 는 수렴한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

(i)과 (ii) 에 의해 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 0 으로 수렴한다.

논제 2-1

부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 x f''(x)\,dx = [xf'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x)dx = \{2f'(2) - f'(1)\} - [f(x)]_1^2 = 1 - 0 = 1$$

논제 2-2

$\int \sin^n x\,dx = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx$ 에서 $f(x) = \sin^{n-1}x,\ g'(x) = \sin x$ 라 놓고 부분적분법을 사용하면 $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2}x \cdot \cos x,\ g(x) = -\cos x$ 이다.

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx$$

가 된다. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx\end{aligned}$$

오른쪽 마지막 항을 왼쪽으로 이항하여 정리하면

$$n\int \sin^n x\,dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

즉,

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

이다. 여기서 $a_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} x\,dx$ 라 두면 $a_0 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ 이고

$a_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1$이다. 따라서

$$\begin{aligned}a_{2n} &= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n} x\,dx = \left[-\frac{1}{2n}\sin^{2n-1} x \cdot \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2n-1}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n-2} x\,dx \\ &= \frac{2n-1}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n-2} x\,dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot a_{2n-2}\end{aligned}$$

를 얻는다. 이 과정을 계속하면

$$a_{2n} = \frac{2n-1}{2n}a_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}a_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2} \cdot a_0$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{\pi}{2}$$

가 된다. 이 값은 다음과 같은 표현도 가능하다.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} x\,dx = a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

논제 2-3

위와 같은 방법으로 하면

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}a_{2n-1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}a_1$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \quad \left(\text{또는 } a_{2n+1} = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)$$

이고, $a_{2n-1}=\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)}$ 임을 알 수 있다.

그리고 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 에서 $0\le\sin x\le 1$ 이므로 $\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x$ 이고

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n+1}x\,dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n}x\,dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n-1}x\,dx$$

가 되므로 $a_{2n+1}\le a_{2n}\le a_{2n-1}$, 즉, $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+1}}\le\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\le\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$ 이다.

여기서 $\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}=\dfrac{2n+1}{2n}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+1}}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}=1$ 가 되고 조임정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1$$

이다.

(교육과정 외 풀이)

a_{2n} 과 a_{2n+1} 을 직접 구하여 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

을 얻는다.

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\quad\text{(Wallis Product)}$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1$ 을 구할 수 있다.

논제 2-4

$\left(e^{-x^2/2}\right)'=-xe^{-x^2/2}$ 이므로 $\int(-x)e^{-x^2/2}dx=e^{-x^2/2}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^t x^{2k}e^{-x^2/2}dx&=\int_0^t\left(-x^{2k-1}\right)(-x)e^{-x^2/2}dx\\&=\left[-x^{2k-1}e^{-x^2/2}\right]_0^t+(2k-1)\int_0^t x^{2k-2}e^{-x^2/2}dx\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\left[x^{2k-1}e^{-x^2/2}\right]_0^t=t^{2k-1}e^{-t^2/2}=\dfrac{\left(t^2\right)^k}{te^{t^2/2}}=\dfrac{2^k}{t}\cdot\dfrac{\left(t^2/2\right)^k}{e^{t^2/2}}$ 이므로 문제의 조건에 의해

$$\lim_{t\to\infty}\left[x^{2k-1}e^{-x^2/2}\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\frac{2^k}{t}\cdot\frac{\left(t^2/2\right)^k}{e^{t^2/2}}=0$$

이다. 그러므로

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{2k}e^{-x^2/2}dx=\lim_{t\to\infty}(2k-1)\int_0^t x^{2k-2}e^{-x^2/2}dx$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}(2k-1)\int_0^t x^{2k-2}e^{-x^2/2}dx &= (2k-1)(2k-3)\int_0^t x^{2k-4}e^{-x^2/2}dx\\ &= \cdots\\ &= (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\int_0^t e^{-x^2/2}dx\end{aligned}$$

이다. 또한 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ 가 확률밀도함수이므로

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{2}$ 이고 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x^2/2}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}(2k-1)\int_0^t x^{2k-2}e^{-x^2/2}dx=\lim_{t\to\infty}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\int_0^t e^{-x^2/2}dx\\ &=\frac{(2k!)}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{(2k)!}{2^{k+1}k!}\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

이다. 즉

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{2k}e^{-x^2/2}dx=\frac{(2k)!}{k!\,2^{k+1}}\sqrt{2\pi}$$

이다.

MEMO

7 서울대학교 정시

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 우리 주변에서 발생하고 있는 여러 가지 현상들 중에는 과거에 일어났던 일에 영향을 받는 경우가 많이 있다. 이러한 현상을 수학적으로 표현해 보면 시간에 따른 적분에 의존하고 있음을 알 수 있다. 예컨대, 환자에게 약물을 투여하면 약물의 효과는 일정한 시간이 지난 후에야 나타나게 된다. 시간이 충분히 지난 후 약물 농도가 평형상태로 수렴하는지, 만일 수렴한다면 평형상태가 주어진 초기 조건과 시간 지연에 의해 어떻게 달라지는지를 예측하는 것은 약물의 생체 적용에 있어 중요한 문제 중 하나이다.

시간 지연에 따른 약물 농도의 변화는 수학적 모델링 과정을 통해 예측해 볼 수 있다. 투여한 약이 작용 부위에 도달하는 시간을 지연 시간 T라고 하자. 측정을 통해 구간 $[-T,\ 0]$에서 시간에 따른 작용 부위의 약물 농도값을 얻었을 때, 구간 $[0,\ \infty)$에서 약물 농도 $f(t)$를 구하는 것은 매우 어려운 일일 수도 있지만, 우리가 관심을 갖고 있는 평형상태의 존재성과 평형상태로의 수렴성은 수학적으로 접근해볼 수 있다.

(나) 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 $f(t)$가 $f(a)<f(b)$를 만족할 때, 임의의 실수 $c\in(f(a),f(b))$를 택하면 $f(\alpha)=c$인 점 $\alpha\in(a,b)$가 존재한다는 사실을 연속함수의 '중간값의 정리'라고 한다. 이러한 α는 여러 개 존재할 수도 있는데 그 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, α_1은 아래의 성질을 만족한다.

$t<\alpha_1$일 때는 $f(t)<c$이고, $t=\alpha_1$일 때는 $f(\alpha_1)=c$이다.

[논제 1] T_1을 $0<T_1<1$인 실수라고 하자. 함수 $g(t)$ $(-T_1\le t\le 0)$와 함수 $f(t)$ $(t\ge -T_1)$는 다음 관계식 (1), (2)를 만족하는 연속함수들이다.

$$f(t)=g(t) \qquad (-T_1\le t\le 0) \qquad (1)$$

$$f(t)=-\int_{t-T_1}^{t} f(s)ds \quad (t\ge 0) \qquad (2)$$

구간 $[-T_1,\ 0]$에서 함수 $|g(t)|$의 최댓값을 M_1으로 정의할 때, 연속함수 $f(t)$가 다음 부등식을 만족함을 보여라.

$$|f(t)| \le M_1 \quad (t>0)$$

※ 구간 $[a,b]$ 에서 연속함수 $h(t)$ 에 대해서

부등식 $\left|\int_a^b h(t)dt\right| \le \int_a^b |h(t)|dt$ 이 성립한다.

[논제 2] 논제 1과 같은 상황에서 수학적 귀납법을 이용하여 0 이상의 모든 정수 n 에 대하여 $t \ge nT_1$ 일 때, $|f(t)| \le {T_1}^{n+1}M_1$ 임을 보여라.

[논제 3] 약물의 효과를 알아보기 위해, 쥐에 특정한 약물을 투여하는 실험을 진행하였다. $f(t)$를 시간 t에서 쥐의 특정 부위의 약물 농도라고 하자. $0<T_2<1$일 때 구간 $[-T_2,\ 0]$에서 연속인 농도함수 $g(t)$를 측정하고, 또한 $t>0$일 때 $f(t)$의 변화에 관한 아래의 관계식을 세웠다.

$$f(t)=g(t) \qquad (-T_2 \le t \le 0) \qquad (3)$$

$$f(t)=-\int_{t-T_2}^{t} f(s)ds+g(0)+\int_{-T_2}^{0} g(s)ds \qquad (t \ge 0) \qquad (4)$$

이 관계식들로부터 연속함수 $f(t)$가 시간이 지남에 따라 상수인 평형상태 E_∞로 수렴한다고 가정하고 E_∞를 추측해보자. 시간 t가 충분히 크면, 구간 $(t-T_2,\ t)$에서 $f(t)$가 E_∞에 근접하므로 식 (4)로부터 아래 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E_\infty &\approx -\int_{t-T_2}^{t} E_\infty ds+g(0)+\int_{-T_2}^{0} g(s)ds \\ &= -T_2E_\infty+g(0)+\int_{-T_2}^{0} g(s)ds \end{aligned}$$

이로부터 E_∞을 아래와 같이 두고 실제로 $f(t)$가 이 값으로 수렴함을 보이고자 한다.

$$E_\infty=\frac{1}{1+T_2}\left\{g(0)+\int_{-T_2}^{0} g(s)ds\right\}$$

[3-1] 구간 $[-T_2,\ 0]$에서 함수 $|g(t)-E_\infty|$의 최댓값을 M_2라고 하자. $t \ge nT_2$일 때, $|f(t)-E_\infty| \le {T_2}^{n+1}M_2$ 임을 보여라.

[3-2] t가 무한대로 감에 따라 $f(t)$가 E_∞로 수렴함을 보여라.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

도입부로 논제에서 이야기하고 있는 수학적 모델의 의미와 질문 내용을 충분히 이해할 수 있도록 관련 배경을 설명하고 있다.

2. 제시문 (나)

논제 해결에 필요한 연속함수의 중간값 정리에 대해 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1]

수학적 증명 방법의 중요한 도구인 귀류법과 연속함수의 개념 및 성질을 얼마나 잘 이해하고 있는지를 확인하는 논제이다.

[논제 2]

수학 Ⅰ에서 배운 수학적 귀납법을 함수의 예측에 어떻게 적용할 수 있는지에 대한 이해를 평가하는 논제이다.

[논제 3]

약물 투여 실험 시 시간 지연 효과가 약물 농도의 평형상태와 평형상태로의 수렴성에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 이해를 평가하는 논제이다. 이 논제는 [논제 1]과 [논제 2]를 활용하여 해결할 수 있는 논제이다.

배경지식 쌓기

1. 수학적 귀납법

자연수 n에 관한 어떤 명제 $P(n)$에서 명제 $P(n)$이 임의의 자연수에 대하여 성립하는 것을 증명하려면, 다음 2가지를 증명하면 된다.

(1) $P(1)$이 성립한다.

(2) 명제 $P(k)$가 성립한다고 가정한다면, $P(k+1)$도 성립한다.

이와 같은 (1), (2)의 2단계에 의해서 주어진 명제 $P(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 보이는 증명법을 수학적 귀납법이라고 한다.

2. 귀류법

어떤 명제가 참임을 증명하려할 때 그 명제의 결론을 부정함으로써 가정(假定) 또는 공리(公理) 등에 모순됨을 보여 간접적으로 그 결론이 성립한다는 것을 증명하는 방법이다.

3. 중간값의 정리

닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f(t)$가 $f(a)<f(b)$를 만족할 때, 임의의 실수 $c\in(f(a),f(b))$를 택하면 $f(\alpha)=c$인 점 $\alpha\in(a,b)$가 존재한다.

풀어보기

1. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

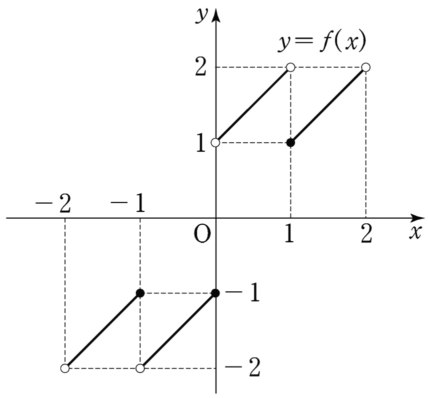
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명> 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$ 이라 할 때, $a_n>1$임을 보이면 된다. (1) $n=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$이다. (2) $n=k$일 때 $a_k>1$이라고 가정하면, $n=k+1$일 때 $a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{(가)}$ 한편, $(3k+2)(3k+4)$ $\boxed{(나)}$ $(3k+3)^2$이므로 $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\boxed{(다)}$ 그런데 $a_k>1$이므로 $a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+1}+(다)-(가)\right)>1$ 그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하시오. [12]

12) 2005 대수능

2. 열린구간 $(-2, 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르시오.[13)]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

13) 2007 대수능

읽기 자료

수학적 귀납법[14)]

우리는 때때로 양의 정수에 관한 어떤 명제가 모든 양의 정수에 대하여 또는 연속한 정수의 유한 또는 무한 수열에 대하여 참임을 증명하고자 한다. 이런 증명은 수학적 귀납법(mathematical induction)에 의하여 증명할 수 있다. 그 방법의 유효성은 양의 정수에 대한 다음 공리에 의존한다.

[귀납적 공리]

S를 다음 성질을 갖는 $\mathbb{N}$의 부분 집합이라 하자.
1. $1 \in S$
2. 만약 $k \in S$이면, $(k+1) \in S$이다.

그러면 $S = \mathbb{N}$

이 공리에서 즉시 수학적 귀납법을 얻을 수 있다.

[수학적 귀납법]

양의 정수 n에 관한 명제 $P(n)$에 대하여
1. $P(1)$이 참이고
2. 만약 $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참이라고 증명하면 $P(n)$은 모든 양의 정수 n에 대하여 참이다.

대다수의 경우 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이고 싶어한다. 만약 그것이 단지 $r, r+1, r+2, \cdots, s-1, s$에 대하여 성립함을 보이고 싶으면 $P(r)$이 참이고 또한 $r \le k \le s-1$의 k에 대하여 $P(k)$가 $P(k+1)$를 유추함을 보이면 된다. 참고로 r는 양, 음 또는 0등의 어떤 정수라도 좋다.

아래 문제는 수학적 귀납법을 잘못 사용하는 경우인데 어느 부분에서 오류가 있는지 생각해 보자.

1. 다음 증명은 분명히 틀린 것이다. 어느 부분이 틀렸는지 찾아보자.

두 양의 정수 i, j가 같다는 사실을 증명한다.

$\max(i,\ j) = \begin{cases} i & (i \ge j) \\ j & (i < j) \end{cases}$ 라 하자.

$P(n)$: $\max(i,\ j) = n$이면 $i = j$이다.

14) John B, Fraleigh(전창호 역), 현대 대수학

만약 $P(n)$이 모든 정수 n에 대하여 참이면 어떤 두 개의 양의 정수 i와 j가 같다. 수학적 귀납법을 이용하여 모든 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$을 증명하자. 만약 $i,\ j \in \mathbb{N}$이고 $\max(i,\ j)=1$이면 $i=j=1$이다. $P(k)$가 참이라고 가정하자. i와 j를 $\max(i,\ j)=k+1$이 되는 정수로 두면 $\max(i-1,\ j-1)=k$이므로 귀납법 가정에서 $i-1=j-1$이다. 그러므로 $i=j$이고 $P(k+1)$은 참이다. 결론적으로 $P(n)$은 모든 n에 대하여 참이다.

2. 다음 논리가 옳은지 그른지 판단해 보자.

모든 양의 정수는 어떤 흥미있는 성질을 가지고 있음을 보이자. $P(n)$을 n이 흥미있는 성질을 가지는 명제로 하고, 수학적 귀납법으로 증명하고자 한다. 1은 자신의 제곱과 같다는 성질을 가지는 유일한 양의 정수이므로, $P(1)$은 참이다. $1 \leq m \leq k$에 대하여, $P(m)$이 참이라 하자. 만약 $P(k+1)$이 참이 아니라면, $k+1$이 흥미있는 성질을 갖지 않는 가장 작은 정수일 것이다. 그 사실 자체가 $k+1$의 흥미있는 성질일 수 있다. 따라서, $P(k+1)$은 참이다. 그러므로 $P(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 참이다.

3. (가)에서 틀린 부분이 있다면 찾아보고 (나)의 답을 찾아보자.

(가) 어떤 살인자가 사형선고를 받았다. 그는 판사에게 사형 집행 날짜를 알려주지 말도록 판사에게 요구했다. 판사가 말하길 “나는 1월의 어느날 오전 10시에 당신을 처형할 것을 선고하지만, 나는 그날 아침 8시가 될 때까지 당신이 처형될 것이라는 것을 알지 못하게 할 것을 약속한다.”고 했다. 그 죄수는 감옥에 가서 다음과 같이 자기가 1월에 처형될 수 없음을 증명하였다. $P(n)$을 “나는 1월 $(31-n)$일에 처형될 수 없다.”는 명제라 두자. 나는 $0 \leq n \leq 30$에 대하여 $P(n)$이 참임을 보이겠다. 자, 나는 1월 31일에 처형될 수 없다. 왜냐하면 그 달의 마지막 날이고 나는 그 달에 처형되기로 되어 있었으므로 8시가 되기 전에 그 날이 처형날이라는 것을 알게 될 것이고, 그렇게 되면 판사의 판결에 모순이 되기 때문이다. 따라서 $P(0)$는 참이다. $0 \leq m \leq k$에 대하여 $P(m)$이 참이라고 가정하자. 여기서 $k \leq 29$이다. 즉, 나는 1월 $(31-k)$일에서 1월 31일 사이에 처형될 수 없다고 가정하자. 그러면 1월 $(31-k-1)$일이 처형하기 위한 마지막 가능한 날임에 틀림없다. 그리고 나는 이 사실을 8시 이전에 알게 될 것이고 그렇게 되면 판사의 판결에 모순이 되기 때문이다. 따라서 나는 1월 $(31-(k+1))$일에 처형될 수 없다. 즉 $P(k+1)$은 참이다. 그러므로 나는 1월달 내에 처형될 수 없다.
(물론 그 죄수는 1월 17일에 처형되었다. 개인적인 생각이지만 이 죄수는 매우 똑똑한 사기범이 아닐까 싶다.)

(나) 한 교수가 월요일부터 금요일까지 주당 5일간 강의한다. 그는 자기 반의 학생들에게 말하길 마지막 주중에 한 번 더 시험을 치르겠지만 학생들이 강의실에 와서야 그날이 시험치는 날임을 알게 될 것이다. 어느 요일이 이 조건을 만족시키며 시험을 치를 수 있는 날이 되겠는가?

예시 답안

풀어보기 1

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

(1) $n=1$일 때, $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$

(2) $n=k$일 때, $a_k > 1$이라 가정하면

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

$n=k+1$일 때,

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} = a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}\right) - \boxed{\frac{1}{k+1}}$$

한편,

$$(3k+2)(3k+4) \boxed{<} (3k+3)^2$$

에서

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} = \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} > \frac{6k+6}{(3k+3)^2} = \frac{2}{3k+3}$$

이다.

$$\therefore \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{\frac{2}{3k+3}}$$

$a_k > 1$이므로

$$a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \frac{2}{3k+3}\right) - \frac{1}{k+1} > 1$$

이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$이다.

풀어보기 2

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -1$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to +0} g(x) = \lim\limits_{x\to +0} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to -0} g(x) = \lim\limits_{x\to -0} \{f(x) + f(-x)\} = -1 + 1 = 0$

$$\therefore \lim_{x\to0} g(x)=0 \quad \therefore \text{ 참}$$

ㄷ. $g(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$

$$\lim_{x\to1+0} g(x)=\lim_{x\to1+0}\{f(x)+f(-x)\}=1+(-1)=0$$

$$\lim_{x\to1-0} g(x)=\lim_{x\to1-0}\{f(x)+f(-x)\}=1+(-1)=0$$

$\therefore\ g(1)=\lim_{x\to1} g(x)=0$이므로, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

논제 1

귀류법으로 증명하자.

$$|f(a)|> M_1$$

이 성립하는 적당한 양의 실수 a가 존재한다고 하자.

$$|f(0)|=\left|\int_{-T_1}^{0} g(t)dt\right|\le \int_{-T_1}^{0}|g(t)|dt \le T_1M_1 < M_1$$

이고 함수 $|f(t)|$은 연속함수이므로 [중간값 정리]에 의해 $|f(c)|=M_1$인 점 $c\in(0,\ a)$가 존재한다. 또한 제시문 (나)에 의해 $|f(c)|=M_1$인 점 $c\in(0,\ a)$는 여러 개 존재할 수 있는데 그 중 가장 작은 값을 c_1이라 하면, c_1은 아래의 성질을 만족한다.

$t<c_1$일 때는 $\|f(t)\|<M_1$이고, $t=c_1$일 때는 $\|f(c_1)\|=M_1$이다.

$$M_1=|f(c_1)|=\left|\int_{c_1-T_1}^{c_1} f(x)dx\right|\le \int_{c_1-T_1}^{c_1}|f(x)|dx \le T_1M_1 < M_1$$

이므로 $M_1=M_1$이라는 사실에 모순이다. 따라서 $t\ge0$일 때

$$|f(t)|\le M_1$$

이다.

논제 2

(i) $n=0$일 때, 부등식이 성립함을 증명하자.

$$|f(t)|=\left|\int_{t-T_1}^{t} f(x)dx\right|\le \int_{t-T_1}^{t}|f(x)|dx$$

인데 [논제 1]에 의해 $t\ge0$일 때

$$|f(t)| \le M_1$$

이다. 그러므로

$$\int_{t-T_1}^{t} |f(x)|dx \le T_1 M_1$$

이다.

따라서 $n=0$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k \ge 1)$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하자. 즉, $t \ge kT_1$일 때,

$$|f(t)| \le {T_1}^{k+1} M_1$$

이 성립한다고 하자.

$t \ge kT_1 + T_1$인 임의의 t에 대하여

$$|f(t)| = \left| \int_{t-T_1}^{t} f(x)dx \right| = \left| \int_{t}^{t+T_1} f(x-T_1)dx \right| \le \int_{t}^{t+T_1} |f(x-T_1)|dx$$

이고, 가정에 의해

$$|f(t-T_1)| \le {T_1}^{k+1} M_1$$

이므로

$$\int_{t}^{t+T_1} |f(x-T_1)|dx \le {T_1}^{k+2} M_1$$

이다.

따라서 $t \ge kT_1 + T_1$이면

$$|f(t)| = \left| \int_{t_1}^{t+T_1} f(x-T_1)dx \right| \le \int_{t}^{t+T_1} |f(x-T_1)|dx \le {T_1}^{k+2} M_1$$

이다.

그러므로 0 이상의 모든 정수 n에 대하여 $t \ge nT_1$일 때,

$$|f(t)| \le {T_1}^{n+1} M_1$$

이 성립한다.

논제 3-1

$k(t) = g(t) - E_\infty$, $h(t) = f(t) - E_\infty$라 하자. [논제 3]의 (3)과 (4)에 의해 $k(t)$, $h(t)$는 연속이고 $-T_2 \le t \le 0$일 때

$$k(t) = h(t)$$

이다. [논제 1]을 활용하기 위해 $t \ge 0$일 때,

$$h(t) = -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds$$

임을 증명하자.

$g(0) + \int_{-T_2}^{0} g(s)ds = A$ 라 두면

$$E_\infty = \frac{1}{1+T_2}\left\{g(0) + \int_{-T_2}^{0} g(s)ds\right\}$$

에서

$$(1+T_2)E_\infty = A$$

이다. 그리고

$$h(t) = f(t) - E_\infty = -\int_{t-T_2}^{t} f(s)ds + A - E_\infty = -\int_{t-T_2}^{t} \{h(s) + E_\infty\}ds + A - E_\infty$$

$$= -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds - T_2E_\infty + A - E_\infty = -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds - (1+T_2)E_\infty + A$$

$$= -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds \qquad (t \ge 0)$$

이므로 $t \ge 0$일 때,

$$h(t) = -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds$$

이다.

그러므로 함수 $k(t)\,(-T_2 \le t \le 0)$와 함수$h(t)\,(t \ge -T_2)$는 다음 관계식 (1), (2)를 만족하는 연속함수들이다.

$$h(t) = k(t) \qquad (-T_2 \le t \le 0) \tag{1}$$

$$h(t) = -\int_{t-T_2}^{t} h(s)ds \quad (t \ge 0) \tag{2}$$

따라서 [논제 1]과 [논제 2]에 의해 구간 $[-T_{2,}\ 0]$에서 함수 $|k(t)|$의 최댓값을 M_2라 하면 $t \ge nT_2$일 때,

$$|h(t)| \le T_2^{\,n+1}M_2$$

이고

$$|f(t) - E_\infty| \le T_2^{\,n+1}M_2$$

이다.

논제 3-2

$nT_2 \le t \le (n+1)T_2$ 에서 $t \to \infty$ 이면 $n \to \infty$ 이다.

또한 모든 자연수 n 에서

$$0 \le |f(t) - E_\infty| \le T_2^{\,n+1} M_2$$

이다.

$0 < T_2 < 1$ 이므로 $n \to \infty$ 이면 $T_2^{\,n+1} \to 0$ 이다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}(f(t) - E_\infty) = 0$ 이고 $\lim_{t\to\infty} f(t) = E_\infty$ 이다.

MEMO

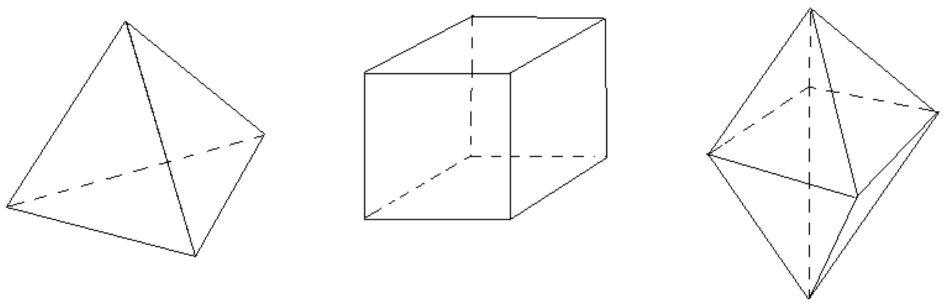
8 서울시립대학교 모의

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

[문제 1]

모든 모서리의 길이가 1인 정사면체, 정육면체, 정팔면체가 있다. 한 모서리를 회전축으로 하여 각각의 정다면체를 회전시킬 때, 정다면체의 어떤 면 또는 단면을 회전시킨 것으로 보면 되는가? 자신의 주장에 대한 이유를 밝히고, 세 개의 회전체의 부피도 각각 구하시오.



[문제 2]

좌표평면에서 세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있을 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) 삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$이면 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 보이시오.

(b) 삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$일 때, $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위에 대하여 논하시오.

(c) 삼각형 ABC의 무게중심이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으면 삼각형 ABC가 어떤 꼴의 삼각형인지 논하시오.

제시문 분석

1. 문제 1

문제 1에서는 정다각형의 한 축을 중심으로 회전한 회전체를 정의하고 있다.

2. 문제 2

문제 2에서는 삼각형의 무게중심과 원 위의 임의의 세 점에서 정의된 삼각형을 제시하고 있다.

논제 분석

[문제 1]

정다면체의 한 모서리를 축으로 회전시켰을 때, 그 모양을 예측하고 부피를 구할 수 있는지를 묻고 있다. 정다면체의 한 모서리를 회전축으로 정하고 회전시킨 도형의 모양은 실제로 그 도형이 품고 있는 넓이가 가장 큰 다각형의 한 모서리를 축으로 회전시킨 것과 같음을 묻고 있다.

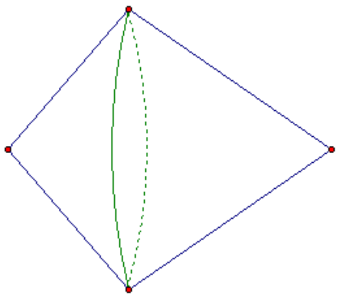
[문제 2]

(1) 삼각형의 무게중심의 성질과 원에서 지름을 한 변으로 하고 호 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이 됨을 묻고 있다.
(2) 삼각함수의 합성 혹은 원에 접하는 직선의 최댓값을 묻고 있다.
(3) 삼각형이 회전이동하면 삼각형의 무게중심도 따라서 회전이동한다는 사실을 알고 있는지 묻고 있다.

배경지식 쌓기

1. 회전체의 부피

삼각형을 한 모서리를 중심축으로 회전시키면 원뿔 두 개를 엎어 놓은 모양이 되고 사각형을 회전시키면 원기둥이 된다.



2. 삼각형의 무게 중심

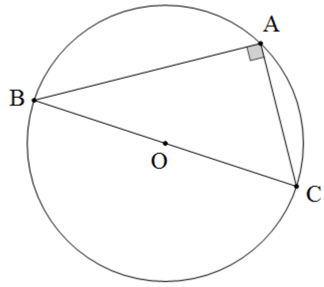
세 점 $A(x_1,\ y_1), B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3)$을 지나는 삼각형 무게중심은 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다

3. 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\ \text{단, }\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. 원에 내접하는 삼각형의 성질

원에 내접하는 삼각형이면서 한 변이 원의 지름을 지나면 그 삼각형은 직각삼각형이다.



풀어보기

1. 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류 뿐임을 오일러의 공식을 이용하여 증명하시오.

   (참고) 오일러의 공식: 구와 연결 상태가 같은 도형에서 모서리의 개수를 e, 꼭짓점의 개수를 v, 면의 개수를 f라고 하면, $v-e+f=2$이다.

2. 정다면체에는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류가 있다. 이 중에서 꼭짓점 근처를 적당히 자르면 계속해서 정다면체를 만들 수 있다. 이런 과정을 정다면체의 순환이라고 한다. 정사면체에서 각 꼭짓점 근처를 규칙적으로 자르면 정팔면체, 정육면체에서는 정사면체, 정십이면체에서 정육면체를 만들 수 있다. 그 이유를 간략히 서술하시오.

3. 정육면체 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$의 대각선 $\overline{\mathrm{AG}}$를 $1:2$로 내분하는 점 P는 $\triangle\mathrm{BDE}$의 무게중심임을 증명하시오.

읽기 자료

오일러 표수(특성수 혹은 공식)[15]

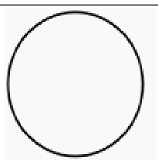
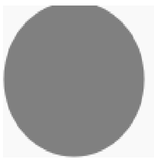
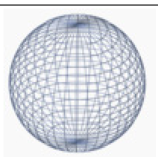
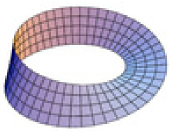
<그림 1> 오일러의 초상화

대수적 위상수학(algebraic topology) 혹은 다면체 조합론(Polyhedral combinatorics)에서 오일러 표수(Euler characteristic)란 위상기하학적 불변량으로서, 위상공간 속의 도형이나 구조가 구부러지는 것에 관계가 없는 값이다. 오일러-푸앵카레 표수(Euler-Poincaré characteristic)라고도 부르며, 보통 그리스 문자 x로 표기한다.

오일러 표수는 원래 다면체에서 정의되었고, 정다면체의 분류를 포함한 다양한 다면체의 정리에 관련하여 이용되었다. 이 개념을 이름 붙인 레온하르트 오일러는 이 개념의 초창기 업적에 공헌이 있고, 현대 수학에서는 호몰로지를 비롯한 다양한 개념과 연결되어 있다.

v를 꼭짓점, e를 모서리, f를 면의 수라고 할 때 오일러 표수x는 다음과 같다. $x = v - e + f$ 만약 구와 연결 상태가 같을 경우(homeomorphic) 오일러 표수의 값은 그 모양에 관계없이 항상 2가 된다.

우리는 흔히 점(꼭짓점)을 0차원 도형, 선분을 1차원 도형, 선분을 2차원, 입체를 3차원 도형이라고 부른다. 일반적으로 n차원 도형에서 k차원 도형의 개수를 a_k라고 하면, $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n = 1$이라고 추측할 수 있다. 이것이 n차원에서 **일반화된 오일러 특성수 혹은 오일러 공식**이라고 할 수 있다.

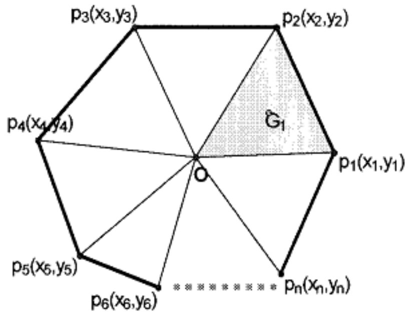
도형의 이름	그림	오일러 표수	도형의 이름	그림	오일러표수
원		0	토러스		2
원판		1	이중토러스		-2
구		2	뫼비우스 띠		0

15) 오일러의 초상화와 아래의 내용은 위키피디아에서 발췌.

무게중심을 확장하기16)

다각형의 무게중심을 구하려면 다각형을 삼각형으로 나누고 그 각각의 삼각형의 무게중심의 평균 위치를 구하면 된다. 이 때 삼각형은 큰 것과 작은 것이 있으므로 넓이를 가중치로 하는 가중평균을 구하면 된다.

다음 그림의 다각형 $p_1p_2\cdots p_n$의 무게중심 좌표를 구하자.



삼각형 OP_1P_2에 대하여 넓이와 무게중심을 좌표를 통하여 구해 보면

넓이 $A_1=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{2}$이고, 무게중심 $G_1=\left(\dfrac{x_1+x_2}{3},\dfrac{y_1+y_2}{3}\right)$이다.

이와 같은 방법으로

삼각형 OP_iP_{i+1}에 대하여 넓이와 무게중심을 좌표를 통하여 구해 보면

$A_i=\dfrac{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}{2}$, $G_i=\left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{3},\dfrac{y_i+y_{i+1}}{3}\right)$이고

$A_n=\dfrac{x_ny_1-x_1y_n}{2}$, $G_n=\left(\dfrac{x_n+x_1}{3},\dfrac{y_n+y_1}{3}\right)$이다.

무게중심의 위치벡터={(각 삼각형의 무게중심의 위치벡터)×(각 삼각형의 넓이)}/(다각형 전체 넓이)이므로

다각형 전체의 무게중심 G는 다각형 전체 넓이 $A(=\sum A_i)$를 사용하여 나타내면 다음과 같다. $G=\dfrac{\sum G_iA_i}{A}$이다.

16) 임채명의 "GSP를 이용한 볼록 n각형의 무게중심 작도"(석사 학위논문).

예시 답안

풀어보기 1

정다면체에서 꼭짓점의 개수를 V, 모서리의 개수를 E, 면의 개수를 F라 하자. 또 각각의 면을 구성하는 모서리의 개수를 p, 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수를 q 개라고 하자. 그러면 각각의 면에서 모서리는 두 번씩 계산되므로 $pF=2E$가 되고 같은 방법으로 각 모서리에는 꼭짓점이 2개씩 계산되므로 $qV=2E$이다. 이것을 오일러의 공식에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$2=V-E+F=\frac{2}{q}E-E+\frac{2}{p}E=\left(\frac{2}{q}-1+\frac{2}{p}\right)E$$

이다. 따라서 다음의 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$E=\frac{2pq}{2p+2q-pq},\ V=\frac{4p}{2p+2q-pq},\ F=\frac{4q}{2p+2q-pq}$$

위의 식은 모두 자연수이므로 우리는 다음을 유추할 수 있다.

$2p+2q-pq>0$, 이 식의 양변에 -4를 더하면 $2p+2q-pq-4>-4$

다시 위의 식에 (-1)을 곱하고 인수분해 하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$(p-2)(q-2)<4$$

그런데 p는 다각형을 구성하는 모서리(변)의 수이므로 3 이상이고, q는 다면체에서 한 꼭짓점에서 모이는 모서리 수이므로 3 이상이다. 따라서 가능한 경우의 수는 다음의 5 가지뿐이다.

$p=3, q=3$; 이 경우는 정사면체이다.

$p=4, q=3$; 이 경우는 정육면체이다.

$p=3, q=4$; 이 경우는 정팔면체이다.

$p=5, q=3$; 이 경우는 정십이면체이다.

$p=3, q=5$; 이 경우는 정이십면체이다.

(참고) 유클리드의 증명

일반적으로 입체도형을 만들기 위해서는 한 꼭짓점에 적어도 3개의 면이 모여야 한다. 왜냐하면 두 개의 면으로 입체를 만들 수 없기 때문이다. 그런데 한 꼭짓점에 모인 다각형의 내각의 합이 360° 보다 크면 볼록한 다면체를 만들 수 없다.

정n각형에서 한 내각의 크기는 $\frac{n-2}{n}\times 180^\circ$이고 한 꼭짓점에 이것이 3 개 이상 모여 있어야 하므로 $\frac{n-2}{n}180^\circ\times 3\le 360^\circ$인데 이것을 풀면 $n\le 6$이다. 즉, 정삼각형, 정사각형, 정오각형만이 정다면체의 한 면이 될 수 있고 정육각형 이상은 될 수 없다.

이제 정삼각형의 경우: 한 내각의 크기가 60° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정삼각형의 개수는 3 개, 4 개, 5 개이다. 3 개인 경우에는 정사면체, 4 개인 경우에는 정팔면체, 5 개인 경우에는 정이십면체가 된다.

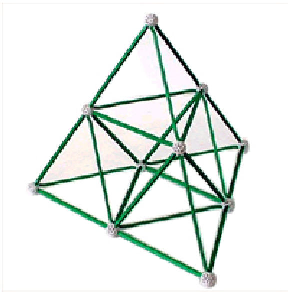
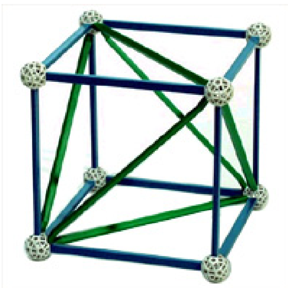
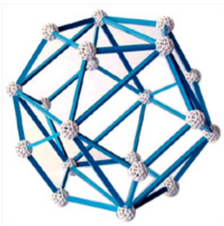
정사각형인 경우: 한 내각의 크기가 90° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정사각형의 개수는 3 개이고 이 경우 정육면체가 된다.

정오각형인 경우: 한 내각의 크기가 108° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정사각형의 개수는 3 개이고 이 경우 정십이면체가 된다.

참고로 이 증명 방법에는 직관적인 요소가 있다. 그래서 오일러는 위와 같은 증명을 하였다.

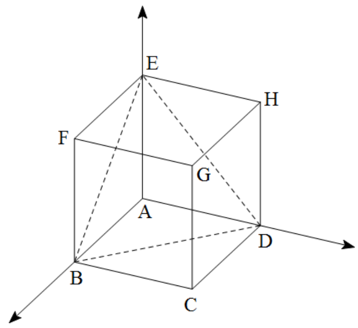
풀어보기 2

정다면체의 꼭짓점을 규칙적으로 잘라서 만드는 정다면체의 순환은 아래의 그림과 같이 만들 수 있다.

정다면체의 순환 구조	그림	방법
1. 정사면체에서 정팔면체 만들기		정사면체의 각 모서리의 중점을 연결하여 꼭짓점에서 생성되는 작은 정사면체(기존의 절반의 크기)를 잘라내면 왼쪽 그림과 같은 정팔면체를 만들 수 있다.
2. 정육면체에서 정사면체 만들기		정육면체의 각 면에 대각선을 왼쪽 그림과 같이 연결되게 그으면 6개의 선분을 가진 입체도형이 되는데 바로 정사면체이다. 따라서 면의 대각선 3개와 한 꼭짓점을 포함한 삼각뿔을 잘라내면 된다.
3. 정십이면체에서 정육면체 만들기		정십이면체의 면의 개수와 정육면체는 모서리의 개수가 서로 같으므로 정십이면체의 각 면 위에 선을 하나씩 그려 그 선이 모서리가 되도록 하면 정육면체를 만들 수 있다. 오른쪽 그림에서 지붕 모양을 하는 꼭짓점을 잘라내면 정육면체를 만들 수 있다.

풀어보기 3

오른쪽 그림과 같이 $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,\ a,\ 0)$, $D(0,a,0)$, $E(0,0,a)$, $F(a,0,a)$, $G(a,a,a)$, $H(0,a,a)$로 좌표를 붙여주면 평면 BED의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ 즉, $x+y+z=a \cdots$①을 얻는다.



또 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG}=(ka,\ ka,\ ka)\cdots$②를 얻는다.

②를 ①에 대입하면 $3ka=a$, $\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 점 P는 $\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$이다. 이것은 점 P가 $\triangle$EBD의 무게중심임을 의미한다.

문 제 1 [17)]

정사면체의 한 변을 회전축으로 하여 회전시키면 <그림 1> 아랫면 또는 윗면삼각형만 회전시켜 주면 된다. 왜냐하면 축과 만나고 있는 두 면 이외의 절단된 면은 이등변 삼각형으로 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 작기 때문에 <그림 4> 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 회전시킨 입체로 간주하면 된다.

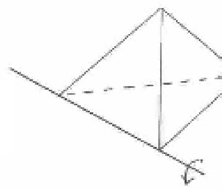
정육면체를 회전시킨 입체는 변의 길이가 1, $\sqrt{2}$인 직사각형을 길이 1인 변을 회전축으로 하여 회전시킨 입체로 간주할 수 있다. 왜냐하면 다른 절단면은 직사각형은 되지만 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$보다 작다는 것을 알 수 있다<그림 2>.

길이 1인 정팔면체를 회전시키면 한 변의 길이가 1인 정사각형을 회전시킨 입체로 볼 수 있다. 왜냐하면 다른 절단면은 등변사다리꼴로 윗변의 길이는 1보다 작고, 사다리꼴의 높이는 정삼각형의 높이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 부터 정사각형의 높이 1까지 직선을 따라 증가하므로 <그림 5> 높이는 1보다 작게 된다. 정팔면체의 다른 변을 회전축으로 하여 회전시키면 정팔면체의 대칭성에 의하여 여전히 같은 입체가 나오게 된다.

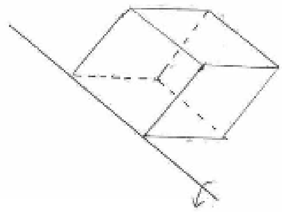
결론적으로 정사면체는 길이가 1인 정삼각형을 회전시킨 것이고, 정팔면체는 길이가 1인 정사각형을 회전시킨 것이고, 정육면체는 길이가 1, $\sqrt{2}$인 직사각형을 회전시킨 것이다.

정사면체 회전입체 부피는 원뿔 2개를 붙인 것으로 볼 수 있어서 $2\times\frac{1}{3}\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이고 정팔면체 회전입체 부피는 반지름과 높이가 1인 원기둥으로 부피가 π 가 된다. 정육면체 회전입체 부피는 반지름 $\sqrt{2}$, 높이가 1인 원기둥으로 부피가 2π 가 된다.

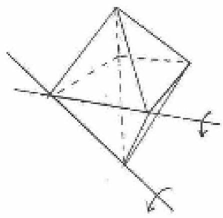
17) 서울시립대 예시답안



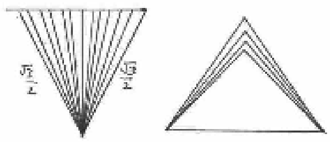
<그림 1>



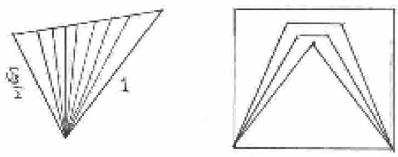
<그림 2>



<그림 3>



<그림 4>



<그림 5>

문 제 2-a

삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$이므로 $x_1+x_2+x_3=3$, $y_1+y_2+y_3=0$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(3-x_3)^2+(-y_3)^2,$$

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2=9-6x_3+x_3^2+y_3^2,\quad x_1x_2+y_1y_2=-3x_3,$$

$$y_1y_2=-3x_3-x_1x_2=-3(3-x_1-x_2)-x_1x_2=-(3-x_1)(3-x_2)$$

[다른풀이 1]

같은 방법으로 $y_1y_3=-(3-x_1)(3-x_3)$, $y_2y_3=-(3-x_2)(3-x_3)$이므로

$$y_1^2y_2^2y_3^2=-(3-x_1)^2(3-x_2)^2(3-x_3)^2,\ y_1y_2y_3=(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=0$$

이다. 따라서 $x_1=3$ 또는 $x_2=3$ 또는 $x_3=3$이다.

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $x_2+x_3=0$, $y_2+y_3=0$이므로 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이다. 즉, $A(3, 0)$이고 $B(x_2, y_2)$이고 $C(x_3, y_3)=(-x_2, -y_3)$이다. 그런데 점 B와 C는 원점에 대칭이므로 $\overline{BC}$는 원점(중심)을 지나는 선분이므로 원 $x^2+y^2=9$의 지름이다. 같은 방법으로 $x_2=3$이면 선분 AC가 $x_3=3$이면 선분 AB가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

[다른풀이 2]

따라서 $(9-x_1^2)(9-x_2^2)=y_1^2y_2^2=(3-x_1)^2(3-x_2)^2$이므로 다음이 성립한다.

$$(3-x_1)(3+x_1)(3-x_2)(3+x_2)=(3-x_1)^2(3-x_2)^2$$
$$(3-x_1)(3-x_2)\{(3+x_1)(3+x_2)-(3-x_1)(3-x_2)\}=0$$
$$(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=0$$

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $x_2+x_3=0,\ y_2+y_3=0$이므로 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이다. 따라서 선분 BC가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이다.

같은 방법으로 $x_2=3$이면 선분 AC가, $x_3=3$이면 선분 AB가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

문 제 2-b

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이므로 다음이 성립한다.

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|=3+2(|x_2|+|y_2|)$$

[다른풀이 1] $x_2^2+y_2^2=9$이므로 $|x_2|=3\cos t,\ |y_2|=3\sin t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$|x_2|+|y_2|=3(\cos t+\sin t)=3\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 $|x_2|+|y_2|$의 값의 범위는 $[3,\ 3\sqrt{2}\,]$이다.

따라서 $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

$x_2=3$ 또는 $x_3=3$인 경우도 같은 방법으로 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

[다른풀이 2] $x^2+y^2=9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y=k$ 라 하자. 직선 $x+y=k$가 점 $(3,0)$을 지날 때 $x+y$는 최솟값 3, 직선 $x+y=k$가 $x^2+y^2=9$과 점 $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$에서 접할 때 최댓값 $3\sqrt{2}$을 갖는다.

따라서 $x+y$의 값의 범위는 $[3,\ 3\sqrt{2}\,]$이므로

$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

$x_2=3$ 또는 $x_3=3$인 경우도 같은 방법으로 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

문 제 2-c

삼각형 ABC의 무게중심을 $G(a,b)$ $(a^2+b^2=1)$, $O(0,0)$, $T(1,0)$라 하고 $\angle GOT=\theta$라고 하자. 또 세 점 A, B, C를 원점을 중심으로 시계 방향으로 각각 θ만큼 회전이동 시킨 점을 A′, B′, C′이라고 하자. 이때, 삼각형 A′B′C′의 무게중심이 $(1,0)$이므로 (1)에서 보인 바에 의하여 삼각형 A′B′C′는 직각삼각형이다. 그런데 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′이 합동이므로 삼각형 ABC도 직각삼각형이다.

9 성균관대학교 모의

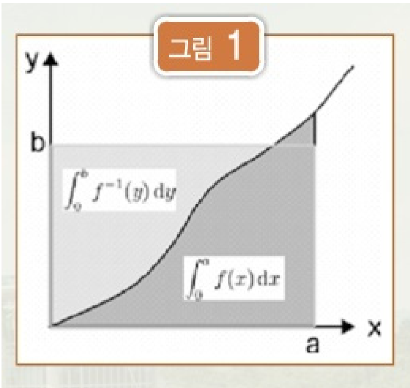
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 단힌구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 구간위의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 좌표평면에서 $y=f(x)$와 x축, $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 영역의 부호를 가진 넓이로 해석될 수 있다.

(나) 함수 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 가 <그림 1> 과 같이 $x\geq 0$ 에서 연속이고 증가하는 일대일대응이라고 하자. 만약, $f(0)=0$ 이고 $x\geq 0$ 에서 $f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$가 모든 $y\geq 0$에 대하여 존재한다면, <그림 1>과 같이 제시문 (가)로부터 모든 양수 a, b 에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



[논제 1] p 가 1보다 큰 양수이고, q 가 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 을 만족하는 양수일 때, 제시문 (나)의 식(1)을 이용하여 모든 양수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 논증하시오.(필요한 경우, $k\neq -1$ 실수일 때, $\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}+C$ 임을 이용하시오.)

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

[논제 2] 제시문 (나)의 식 (1)에서 등호가 성립할 때, a 와 b 의 관계를 <그림 1>로부터 유추하고 또한 이로부터 <문제1>의 부등식에서 등호가 성립할 조건, 즉, $ab=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 가 성립할 조건을 추론하시오.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

정적분의 의미를 넓이로 해석하고 있다.

2. 제시문 (나)

(가)에서 제시한 정적분의 의미로부터 부등식

$$ab \le \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

이 성립함을 그림을 이용하여 직관적으로 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1] 주어진 부등식을 나타내기 위한 적당한 함수를 선택하여 결과를 유도할 수 있는가?

[논제 1]에 추가로 주어진 조건을 관찰하여 $\frac{a^p}{p}$라는 항을 만들기 위해 필요한 일대일대응이 되는 함수식을 찾고, 이 함수식을 이용하여 역함수를 구한 후 제시문 (나)에 주어진 부등식을 이용하여 증명하면 된다.

[논제 2] 제시문 (가)에 나오는 <그림 1>을 기하학적으로 관찰하여 등호가 성립하는 경우를 추론할 수 있는가?

[논제 1]의 부등식에서 등호가 성립하기 위해서는 두 양수 a, b 사이에 $f(a)=b$ 인 관계가 성립하여야 하므로 [논제 1]에서 찾은 함수식에 대입하여 나타내면 된다.

배경지식 쌓기

1. 일대일함수

함수 $f: X \to Y$에서 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

2. 일대일대응

일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수를 일대일대응이라고 한다.

3. 역함수

함수 $f: X \to Y$가 일대일대응일 때, f의 역함수는 $f^{-1}: Y \to X$로 나타내고

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

와 같이 정의된다.

풀어보기

1.[18] 다음 함수의 역함수를 구하시오.

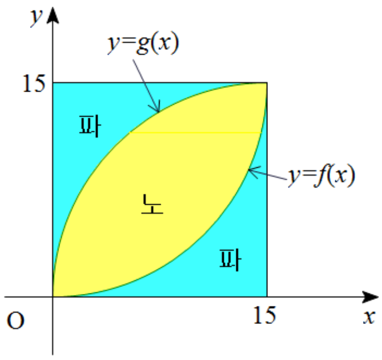
$$y = x^3 + 2$$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^2 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx$의 값을 구하시오.

3.[19] 구간 $[1, 2]$에서 연속인 함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다. $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $\int_1^2 f(x)dx = 2\int_2^3 f^{-1}(y)dy$일 때, 정적분 $\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

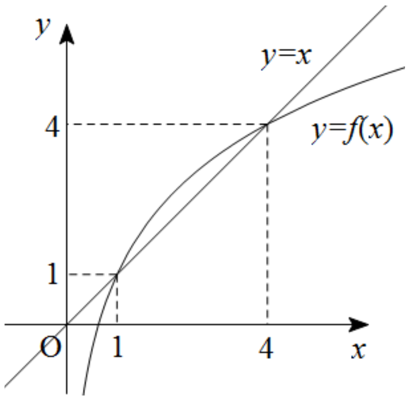
18) James Stewart. 미분적분학, 청문각, 2009
19) 유병근 외 2명. 한수위 적분과통계, 도서출판 한수위, 2010

4. 정사각형 모양의 타일이 좌표평면에 그림과 같이 가로, 세로가 각각 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 경계로 하여 파랑색과 노랑색을 칠하려고 한다. 파랑색과 노랑색이 칠해지는 부분의 면적의 비가 2 : 3일 때, $\int_0^{15} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다) (1997 대수능)



5. 두 점 $(1,1), (4,4)$를 지나고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. $\int_1^4 \{f(x)-x\}dx = \frac{5}{2}$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\frac{3k}{n}\right)-f\left(1+\frac{3k-3}{n}\right)\right\}\left(1+\frac{3k}{n}\right)$ 의 값은?[20]



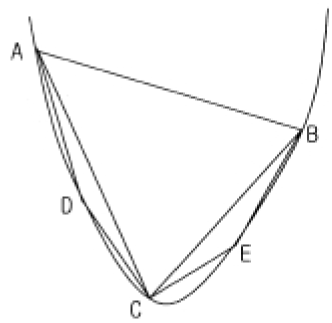
20) 수능아우라 수리영역 수학Ⅱ 800제 (2010)

읽기 자료

적분법의 역사

적분법의 개념은 미분법의 개념과는 독립적으로 발달하였다. 그 기원은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 처음으로 논의한 그리스 시대로 거슬러 올라간다. 아르키메데스(Archimedes ; BC 212 ~ BC 287)는 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 다음과 같이 구하였다. 아래 그림과 같이 선분 AB의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 C라고 하고, 선분 AC, BC의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 각각 D, E라고 하자. 포물선의 기하학적 성질로부터 다음이 성립함을 밝혔다.

$$\triangle ADC + \triangle BCE = \frac{1}{4}\triangle ABC$$



아르키메데스는 이러한 생각을 반복하여 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 다음과 같이 구하였다.

$$\triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \frac{1}{4^2}\triangle ABC + \frac{1}{4^3}\triangle ABC + \cdots$$
$$= \triangle ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) = \frac{4}{3}\triangle ABC$$

그러나 이 때에는 엄격한 뜻에서 극한의 개념을 이용하여 넓이를 구한 것은 아니며, 처음으로 극한의 개념을 도입하여 넓이를 구한 사람은 케플러(Kepler, J ; 1571 ~ 1630)이다. 케플러는 원의 넓이를 구하기 위해 원을 작은 삼각형으로 분할하여 삼각형의 넓이의 합의 극한으로 원의 넓이를 계산하였다. 그의 방법은 선을 합하면서 면적을 구하려는 생각으로 적분법과는 다른 방법으로 이루어진 것이다. 이러한 극한에 의한 구분구적법은 뉴턴(Newton, I ; 1642 ~ 1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646 ~ 1716)에 의하여 정적분으로 연결되었다. 라이프니츠는 카발리에리(Cavalieri ; 1598 ~ 1647)의 방법을 따른 원리를 이용해 기하학적인 접선의 관점에서 독립적으로 구적법(적분)과 접선법(미분)이 서로 역연산의 관계가 있음을 밝혔으

며 그의 업적은 구적법과 접선법을 합리화하고 dx, dy 등의 기호를 써서 그들 사이의 규칙을 확립하였다. 라이프니츠는 카발리에리의 불가분량의 합을 나타내는 라틴어 sum의 첫 문자를 딴 S를 길게 늘인 문자로서 현대 적분 기호인 $\int$을 처음 사용하였다. 또한 그는 적분을 $\int xdx$, $\int ydy$ 와 같이 쓰는 것과 마찬가지로 미분과 도함수를 오늘날 우리가 사용하는 것과 같이 쓰고 있었다. 하지만 극한의 수학적인 정의를 사용하여 적분의 개념을 정의함으로써 미적분학의 논리적 기초를 엄밀하게 확립한 사람은 프랑스의 코시(Cauchy, A. L. ; 1789 ~ 1857)였고, 그 후 19세기 말경에 독일의 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826 ~ 1866)에 의하여 보다 엄밀한 적분법이 확립되었다. 그러나 리만적분법도 적분법으로서 완전한 것이 못되었고, 프랑스의 르베그(Lebesque, H. L. ; 1875 ~ 1941)에 의하여 더욱 일반적인 적분론이 확립되었다.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
그림 출처 : www.somangnote.com

적분이 실생활과 관련해서 사용되는 몇 가지 예로는 CT(Computed Tomography)가 있다. CT란 병원에서 내장 기관의 상태를 알아 볼 때 쓰이는, 자르지 않고도 단면을 볼 수 있는 장치이다. 우리말로는 '컴퓨터 단층촬영기'로 뇌를 단층촬영할 때 뇌를 빙 둘러 가면서 X-ray를 비추어 맞은편에서 그 강도를 측정하는 것이다. 그러면 X-ray가 가는 길에 있는 조직의 밀도를 하나의 함수로 볼 때 그 정적분 값을 알 수 있게 된다. 이런 일을 계속해서 모든 방향에서의 적분값을 알면 계산에 의해 뇌의 2차원적 밀도분포함수를 알아낼 수 있게 된다. 즉 CT의 컴퓨터가 하는 일은 적분값으로부터 원래의 함수를 알아내는 것이다. 또한 댐이 받는 힘을 계산할 때도 적분이 활용된다. 정해진 수면의 깊이에서 댐에 수직으로 미치는 수압이 일정하고 댐의 폭과 댐에 일정 높이까지 물이 찼을 때 미치는 힘이 어떠한지 알아내려면 W(힘)=S(면적)×P(수압)으로 계산할 수 있다. 그러나 댐의 모든 면에서 수압이 일정하지 않아 깊이에 따라 수압이 변하는데, 이것을 미분방정식을 세워 적분시키면 일반방정식으로 구할 수 있다. 그 계산 결과로 댐이 받는 힘에 따라 댐의 밑부분 두께와 윗부분 두께를 변화시켜 나가는 것이다.

예시 답안

풀어보기 1

함수 $f(x)$ 를 $y=x^3+2$ 로 다시 쓰고 x 에 대하여 풀면

$$x^3=y-2\,,\ \text{즉}\ x=\sqrt[3]{y-2}$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면, $y=\sqrt[3]{x-2}$ 이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$ 이다.

풀어보기 2

$f'(x)=3x^2-4x+2=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이고, 일대일대응이다. 따라서 역함수 $g(x)$ 가 존재하므로 $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ 이다. 그러므로

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^4 g(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^4 g(y)dy=2\cdot4-1\cdot1=7$$

풀어보기 3

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ 이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f^{-1}(y)dy=\int_1^2 ydx+\int_2^3 xdy=2\cdot3-1\cdot2=4$ 이다. 따라서

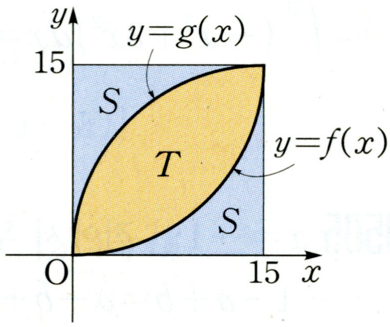
$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f^{-1}(y)dy=\int_1^2 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{2}\int_1^2 f(x)dx=4$ 이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\frac{8}{3}$ 이다.

풀어보기 4

$y=g(x)$ 의 그래프가 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 파랑색이 칠해지는 두 부분의 넓이는 같다. 파랑색이 칠해지는 두 부분의 넓이를 각각 S, 노랑색이 칠해지는 부분의 넓이를 T 라 하면 $2S+T=15^2\cdots$ ㉠, $2S:T=2:3\cdots$ ㉡

두 식을 연립하며 풀면 $5S=225$, 즉 $\displaystyle\int_0^{15} f(x)dx=S=45$

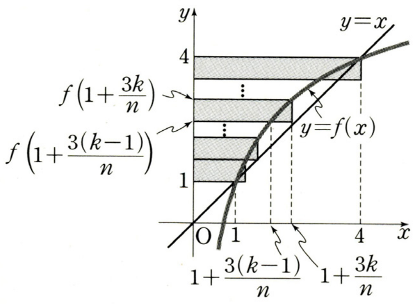


풀어보기 5

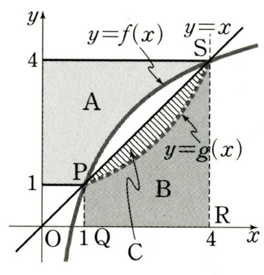
주어진 식의 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\frac{3k}{n}\right)-f\left(1+\frac{3k-3}{n}\right)\right\}\cdot\left(1+\frac{3k}{n}\right)$ 는 <그림 1>과 같고, 이는 $n\to\infty$ 일 때, <그림 2>의 A 부분의 넓이이다. $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로 주어진 A 부분의 넓이는 B 부분의 넓이 $\int_1^4 g(x)dx$ 와 같다.

그러므로

$$\int_1^4 g(x)dx=(\square\text{PQRS의 넓이})-(\text{C의 넓이})=\frac{15}{2}-\int_1^4\{f(x)-x\}dx=\frac{15}{2}-\frac{5}{2}=5$$



[그림 1]



[그림 2]

논제 1 21)

$\frac{a^p}{p}$ 이라는 항을 만들기 위해서는 x^{p-1} 을 적분하여야 한다. $p>1$인 경우 $f(x)=x^{p-1}$ 은 구간 $[0,\ \infty)$에서 $[0,\ \infty)$로 가는 일대일대응이 된다. x와 y를 바꾸는 과정, 즉 $y=x$ 에 대칭이동을 함으로써 역함수를 구할 수 있다.

21) 성균관대 모의논술 해설

역함수는 $x=y^{p-1}$, 즉 $y=x^{\frac{1}{p-1}}\ (x\geq 0)$ 가 된다. 제시문에서 주어진 식 (1) $ab\leq\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ 을 적용하고자 한다.

$f(x)=x^{p-1}$, $f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$ 라 두면, $\int_0^a x^{p-1}dx=\left[\frac{1}{p}x^p\right]_0^a=\frac{a^p}{p}$ 이 되고, $\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy=\left[\frac{p-1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}\right]_0^b=\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}$ 가 성립한다. 문제에서 q는 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 을 만족하므로, $q=\frac{p}{p-1}$ 이고, 따라서

$$\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy=\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}=\frac{b^q}{q}$$

이 성립한다.

그러므로 식(1)의 우변은 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 가 되고, 따라서 주어진 부등식 $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 가 성립한다.

논제 2

부등식 $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ 의 등호가 성립하는 경우는 <그림 1>로부터 직사각형의 넓이와 적분영역의 넓이가 같아지는 경우이다. 즉, $b=f(a)$ 를 만족하는 경우이다. [논제1]의 풀이에서 찾은 함수 $y=f(x)$에 적용하면, 주어진 부등식의 등호가 성립하는 조건은 $b=a^{p-1}$, 즉 $b^q=a^p$ 이다.

MEMO

10 성균관대학교 수시

✽ 다음 <제시문 1>을 읽고 [논제 1-1]와 [논제 1-2]를 풀이와 함께 답하시오.

제 시 문 1

세 종류의 물질 a, b, c의 농도는 시간에 따라 변한다. 시간 t에서 물질 a, b, c의 농도를 각각 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$라 할 때 초기의 농도는 각각 $A(0)=10$, $B(0)=20$, $A(0)=10$, $B(0)=20$, $C(0)=30$이다. 세 물질이 반응을 시작하여 n초 후 농도와 $n+1$초 후 농도는 다음 관계식을 만족한다.

$$A(n+1)=(1-K_{ab}-K_{ac})A(n)+K_{ab}B(n)+K_{ac}C(n)$$

$$B(n+1)=K_{ab}A(n)+(1-K_{ab}-K_{bc})B(n)+K_{bc}C(n)$$

$$C(n+1)=K_{ac}A(n)+K_{bc}B(n)+(1-K_{ac}-K_{bc})C(n)$$

여기서 K_{ab}, K_{ac}, K_{bc}는 양의 상수이고, n은 0보다 크거나 같은 정수이다.

[논제 1-1] 물질 a, b, c 농도의 합은 시간에 관계없이 항상 일정함을 보이고, 그 값을 구하시오.

[논제 1-2] $K_{ab}=\dfrac{1}{2}$이고 $K_{ac}=K_{bc}=\dfrac{1}{6}$이라고 하자. 시간 $t=2011$초에서 물질 a와 b의 농도의 합 $A(2011)+B(2011)$을 구하시오. 또한 n이 한없이 커질 때 물질 c의 농도 $C(n)$이 어떤 값으로 수렴하는지 구하시오.

✽ 다음 <제시문 2>를 읽고 [논제 2-1]과 [논제 2-2]를 풀이와 함께 답하시오.

제 시 문 2

성균이는 다음의 카드놀이 게임을 하고자 한다. 1에서 $2n$까지 숫자가 적힌 $2n$장의 카드가 상자 안에 있다(여기서 n은 양의 정수이다). 이 중에서 한 장의 카드를 뽑아 숫자를 확인한 후 남은 $2n-1$장의 카드 중에서 한 장을 더 뽑는다고 한다. 성균이는 두 번째 카드의 숫자를 확인하기 전에 이미 숫자를 확인한 첫 번째 카드의 숫자보다 두 번째 카드의 숫자가 클 것인지 작을 것인지 정한다. 두 번째 카드의 숫자를 확인하여 성균이의 예상과 맞으면 게임을 이기고, 예상과 다르면 게임을 지는 것으로 한다. 만약 첫 번째 카드의 숫자가 n보다 작거나 같다면 성균이는 두 번째 카드의 숫자가 첫 번째 카드의 숫자보다 클 것으로 예상하기로 했다. 또한 첫 번째 카드가 n보다 큰 값이 나온다면 두 번째 카드의 숫자는 첫 번째 카드보다 작은 숫자가 나올 것으로 예상하기로 했다.

[논제 2-1] $n=5$인 경우, 즉 1에서 10까지의 숫자가 적힌 10장의 카드를 가지고 게임을 할 때, 성균이가 게임을 이길 확률을 구하시오.

[논제 2-2] n이 한없이 커짐에 따라 성균이가 게임을 이길 확률이 어떤 값으로 수렴하는지 구하시오.

제시문 분석

1. 제시문 1

세 종류의 물질 a, b, c의 농도에 관한 점화식을 설명하고 있다.

2. 제시문 2

논제 해결에 필요한 확률적 상황에 대해 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1-1]

주어진 점화식에 관한 기초적인 변형을 할 수 있는가를 묻는 논제이다.

[논제 1-2]

초기조건을 통해 점화식의 일반항을 구할 수 있는지를 묻는 논제이다.

[논제 2-1]

일반화하여 논제를 해결하기에 앞서 특수한 경우를 통해 확률값을 구하는 과정을 묻는 논제이다.

[논제 2-2]

[논제 2-1]을 바탕으로 일반적인 경우의 확률값을 구하는 과정을 묻는 논제이다.

배경지식 쌓기

1. 수열의 점화식

수학에서 점화식(Recurrence relation)이란 수열의 항 사이에서 성립하는 관계식을 말한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항 a_n이 함수 f를 이용해서

$$a_{n+1} = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

처럼 귀납적으로 정해져 있을 때, 함수 f를 수열 $\{a_n\}$의 점화식이라고 하며, 또한, 수열 $\{a_n\}$은 점화식 f에 의해 정의된다.

점화식을 푼다는 것은 귀납적으로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 n의 명시적인 식(Explicit formula)으로 나타내는 것을 말한다.

2. 확률의 덧셈정리 (addition theorem of probability)

어떤 2개의 사건(event) A와 B가 동시에 나타날 수 없는 경우에 이 두 사건을 서로 배반사건이라고 한다.

2개의 사건 A와 B가 배반사건일 경우에 A 또는 B가 일어날 확률을 $P(A \cup B)$라고 하면 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$인데, 이를 확률의 덧셈정리라고 한다.

풀어보기

1. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

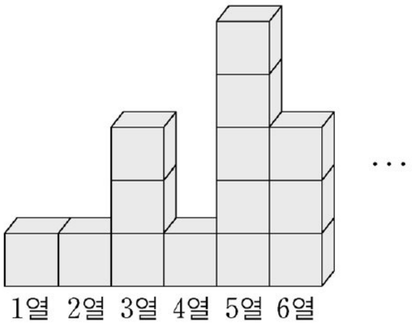
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.

예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 22)



2. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)23)

22) 2011 대수능
23) 2010 평가원

읽기 자료

수열의 극한의 의미

수열의 극한에 대한 의미를 다음 기본명제를 가지고 설명해 보자.

기본 명제 : "수열 $\frac{1}{n}$ 의 극한은 0이다." (기호로는 $n \to \infty$ 일 때 $\frac{1}{n} \to 0$)

여기서 수열 $\frac{1}{n}$ 이란 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ 과 같이 무한히 계속되는 수의 열을 말한다.

[의미]

① n이 ∞로 증가할 때 수열 $\frac{1}{n}$ 의 값은 $L=0$에 충분히 가깝게 다가간다.

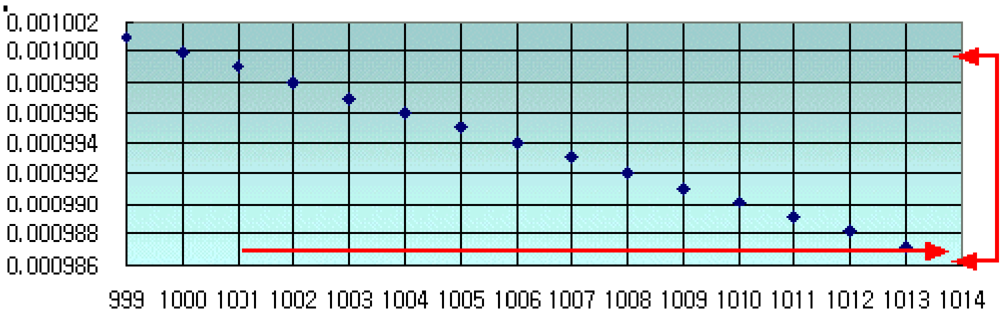
② 여기서 '가깝다'는 것은 $\frac{1}{n}$ 과 그 극한 $L=0$ 과의 거리가 결국(n이 충분히 커지면) '원하는 만큼 얼마든지 적게' 될 수 있음을 의미한다.

③ '원하는 만큼 얼마든지 적게'란 '가까움'의 기준을 얼마든지 까다롭게(즉, 얼마든지 가깝게) 정할 수 있음을 의미한다.

예컨대, 가까움의 기준을 우선 $\varepsilon=0.001$로 잡아보자. 그러면, n이 충분히 커지면 (보다 구체적으로, n이 1000보다 더 커지면) 그 이후 수열의 모든 값은

$$\frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \frac{1}{1003}, \cdots$$

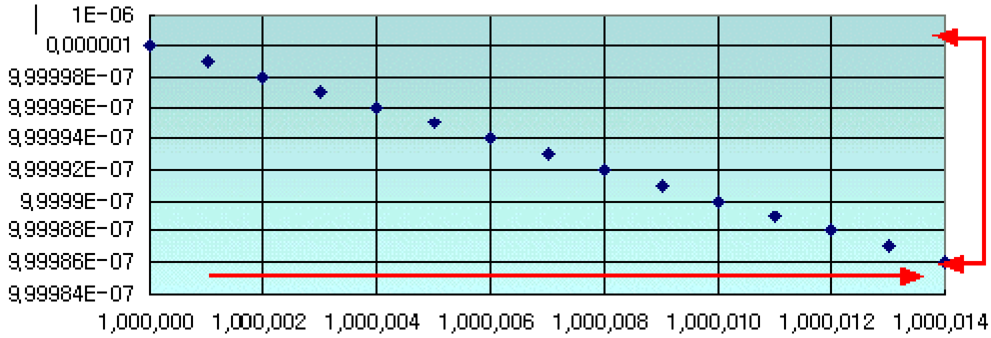
등이 되며, 이들과 극한 $L=0$ 과의 거리는 $\varepsilon=0.001$보다 작아진다. 이 점은 아래 그림에서도 확인된다.



다음으로, 가까움의 기준을 더 엄격하게 $\varepsilon=0.000001$로 잡아보자. 그러면, n이 충분히 커지면(보다 구체적으로, n이 1,000,000보다 더 커지면) 그 이후 수열의 모든 값은

$$\frac{1}{1000001}, \frac{1}{1000002}, \frac{1}{1000003} \cdots$$

등이 되며, 이들과 극한 $L=0$ 과의 거리는 $\varepsilon=0.000001$보다 작아진다.



④ 수열의 극한은, 그 수열의 처음 몇 항들의 값에 구애받지 않으며 n이 충분히 커진 후의 값들에 의해 좌우된다. 따라서, 수열 $\left\{\frac{1000}{n}\right\}$, 즉

$$1000\,,\ \frac{1000}{2}\,,\ \frac{1000}{3}\cdots$$

의 극한도 역시 0이다. 그리고 수열 $\left\{\frac{1000000000000}{n}\right\}$의 극한 역시 0이다.

극한과 비극한

위 논의를 보면, 아주 작은 수, 예컨대, $a=0.0000000000000000001$은 어떻게 보면 0과 크게 다르지 않으며, 따라서 수열 $\frac{1}{n}$의 극한이 될 수 있을 것 같이 생각되기도 한다. 즉, n이 무한히 커질 때 수열 $\frac{1}{n}$이 결국 이 작은 수 $a=0.0000000000000000001$에 가까이 간다고 말할 수 없을까? 그 답은 “그렇게 말할 수 없다”이다.

이 점을 증명하기 전에 이보다 좀 큰 수 $a=0.001$에 대해 생각해 보자. 우리는

“$a=0.001$은 수열 $\frac{1}{n}$의 극한이 아니다.”

라는 점을 아래와 같이 보일 수 있다.

[설명]

어떤 작은 값 ε을 잡아보면, 어떤 n값 이후의 수열의 값들이 모두 0.001에서 ε보다 더 떨어져 있게 됨을 의미한다.

예컨대, 가까움의 기준으로서 우선 $\varepsilon=0.0005$를 잡아 보자. 이 경우, n이 2000 $(=\frac{1}{\varepsilon})$보다 커지면(즉, $n=2001$부터) 수열의 값 $\frac{1}{n}$과 $a=0.001$간의 거리는 바로 이 기준 $\varepsilon=0.0005$보다 더 커진다. 왜냐하면

$$n > 2000 \rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{2000} \rightarrow -\frac{1}{n} > -\frac{1}{2000} = -0.0005$$

이므로

$$a - \frac{1}{n} > 0.001 - \frac{1}{2000} = 0.001 - 0.0005 = 0.0005 = \varepsilon$$

이기 때문이다.

예시 답안

풀어보기 1

2^{n+1} 열 짜리 블록의 개수는

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n, \cdots, 2^{n+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 1 회 시행 후 홀수는 그대로 두고 짝수는 2 로 나누어 나타내면

$$1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1) \quad \cdots\cdots ㉡$$

과

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n \quad \cdots\cdots ㉢$$

으로 표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합은

i) ㉠은 $f(2^{n+1})$

ii) ㉡은 $1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1) = \dfrac{2^n(2^{n+1}-1+1)}{2} = 2^{2n} = 4^n$

iii) ㉢은 $f(2^n)$

$\therefore\ f(2^{n+1}) = 4^n + f(2^n) \leftarrow$ 계차수열을 이용하자.

$$f(2^n) = f(2^1) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} = \frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{q}{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{\dfrac{4^{n+2}+2}{3}} = \frac{3}{16} \qquad \therefore\ p+q = 16+3 = 19$$

풀어보기 2

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 (a, b, c)로 나타내기로 하자.

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 $(0, 1, 2)$이면 두 번의 시행으로는 $(0, 0, 0)$ 또는 $(1, 1, 1)$ 또는 $(2, 2, 2)$를 만들 수가 없다.

또한, 세 번의 시행으로 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times3\times3=27$ 이고 세 번의 시행에서 $(0, 0, 0)$이 되는 경우는

$(0, 1, 2)\to(0, 2, 2)\to(0, 2, 3)\to(0, 3, 3)$

$(0, 1, 2)\to(0, 2, 2)\to(0, 3, 2)\to(0, 3, 3)$

$(0, 1, 2)\to(0, 1, 3)\to(0, 2, 3)\to(0, 3, 3)$

의 3가지이고 $(1, 1, 1)$ 또는 $(2, 2, 2)$가 될 수 있는 경우도 각각 3가지씩이다.

따라서 3번째 시행에서 사건 A가 일어나지 않을 확률은

$$P(A^C)=1-\frac{3+3+3}{27}=\frac{2}{3}$$

이다. 또한, 3번의 시행 후에는 모든 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 $(0, 1, 2)$ 또는 $(0, 0, 0)$ 또는 $(1, 1, 1)$ 또는 $(2, 2, 2)$ 이므로 4번째, 5번째 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고 6번째 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 같은 방법으로 생각하면 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은

$$1\times1\times\frac{2}{3}\times1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore p+q=11$$

논제 1-1

$n+1$초 후 물질 a, b, c농도의 합은 $A(n+1)+B(n+1)+C(n+1)$이다.

제시문에서 주어진 식을 변변 더하면

$$A(n+1)+B(n+1)+C(n+1)=A(n)+B(n)+C(n)$$

이다.

따라서

$$A(n+1)+B(n+1)+C(n+1)=A(0)+B(0)+C(0)=60$$

이다.

논제 1-2

$K_{ab}=\dfrac{1}{2}$ 이고 $K_{ac}=K_{bc}=\dfrac{1}{6}$ 일 때 세 물질 a, b, c가 반응을 시작하여 n초 후 농도와 $n+1$초 후 농도는 다음 관계식을 만족한다.

$$A(n+1)=\frac{1}{3}A(n)+\frac{1}{2}B(n)+\frac{1}{6}C(n) \quad \cdots\cdots \text{(가)}$$

$$B(n+1)=\frac{1}{2}A(n)+\frac{1}{3}B(n)+\frac{1}{6}C(n) \quad \cdots\cdots \text{(나)}$$

$$C(n+1)=\frac{1}{6}A(n)+\frac{1}{6}B(n)+\frac{2}{3}C(n) \quad \cdots\cdots \text{(다)}$$

$A(n)+B(n)=D(n)$이라 하고 (가)와 (나)를 변변 더하면

$$D(n+1)=\frac{5}{6}D(n)+\frac{1}{3}C(n)$$

이고

$$2C(n)=6D(n+1)-5D(n) \quad \cdots\cdots \text{(라)}$$

이다.

(라)를 (다)에 대입하면

$$3D(n+2)-\frac{5}{2}D(n+1)=\frac{1}{6}D(n)+\frac{1}{3}(6D(n+1)-5D(n))$$

이고

$$D(n+2)-\frac{3}{2}D(n+1)+\frac{1}{2}D(n)=0$$

이므로 정리하면

$$2D(n+2)-3D(n+1)+D(n)=0 \quad (\text{단, } D(0)=30,\ D(1)=35)$$

이다.

$$2\{D(n+2)-D(n+1)\}=D(n+1)-D(n)$$

에서

$$D(n+1)-D(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{D(1)-D(0)\} \quad (\text{단, } n\geq 0)$$

이고

$$D(n+1)-D(n)=5\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이다.

그러므로

$$D(n)-D(0)=5\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이고

$$D(n)=30+10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\quad (\text{단},\ n \geq 0)$$

이다.

$D(2011)=30+10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2011}\right\}$이므로 $A(2011)+B(2011)$의 값은

$$30+10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2011}\right\}$$

이다.

또한 n이 한없이 커질 때 $D(n)=30+10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 40에 수렴한다.

물질 a, b, c농도의 합은 시간에 관계없이 항상 일정(60)하므로 물질 c의 농도 $C(n)$은

$$60-40=20$$

에 수렴한다.

(다른 풀이)

(가)+(나)를 하면

$$\begin{aligned} A(n+1)+B(n+1) &= \frac{5}{6}\{A(n)+B(n)\}+\frac{1}{3}C_n \\ &= \frac{5}{6}\{A(n)+B(n)\}+\frac{1}{3}[60-\{A(n)+B(n)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{A(n)+B(n)\}+20 \end{aligned}$$

$D(n)=A(n)+B(n)$이라 두면

$$D(n+1)=\frac{1}{2}D(n)+20,\ D(0)=A(0)+B(0)=30$$

이다.

$$D(n+1)-40=\frac{1}{2}\{D(n)-40\}$$

이므로

$D(n)$은 첫 항이 $D(0)-40=-10$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 일반항은 $D(n)=-10\left(\frac{1}{2}\right)^n+40\ (n=0,1,2,\cdots)$이다.

그러므로

$$D(2011)=A(2011)+B(2011)=-10\left(\frac{1}{2}\right)^{2011}+40$$

이다.

또한 $C(n)+D(n)=60$, $\lim_{n\to\infty} D(n)=40$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} C(n)=\lim_{n\to\infty}\{60-D(n)\}=60-40=20$$

이다.

논제 2-1

$n=5$일 때 성균이가 이기는 경우는 다음과 같다.

첫 번째 카드	두 번째 카드	확률
1	$2\sim10$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-1}{9}$
2	$3\sim10$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-2}{9}$
3	$4\sim10$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-3}{9}$
4	$5\sim10$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-4}{9}$
5	$6\sim10$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-5}{9}$
6	$1\sim5$	$\frac{1}{10}\times\frac{6-1}{9}$
7	$1\sim6$	$\frac{1}{10}\times\frac{7-1}{9}$
8	$1\sim7$	$\frac{1}{10}\times\frac{8-1}{9}$
9	$1\sim8$	$\frac{1}{10}\times\frac{9-1}{9}$
10	$1\sim9$	$\frac{1}{10}\times\frac{10-1}{9}$

따라서 $n=5$일 때 성균이가 이길 확률은

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{10}\times\frac{10-k}{9}\right)+\sum_{k=6}^{10}\left(\frac{1}{10}\times\frac{k-1}{9}\right)=\frac{70}{90}=\frac{7}{9}$$

이다. 그러므로 구하는 확률은 $\frac{7}{9}$ 이다.

논제 2-2

성균이가 이길 확률은

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n}\times\frac{2n-k}{2n-1}\right)+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{2n}\times\frac{k-1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2n(2n-1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}(2n-k)+\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{2n(2n-1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}(2n-k)\right\}=\frac{3n^2-n}{2n(2n-1)}$$

이다.

따라서 n이 한없이 커짐에 따라 성균이가 게임을 이길 확률은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n(2n-1)}=\frac{3}{4}$$

이다.

MEMO

11 숭실대학교 수시

✽ 제시문 (가)와 (나)를 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 이산확률변수 X가 가지는 값들이 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$일 때 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \,\mathrm{P}(X=x_i)$$

여기서 $\mathrm{P}(X=x_i)$는 X가 x_i일 확률을 의미한다.

예를 들어 1의 눈이 한 번 나올 때까지 반복적으로 주사위를 던지는 실험을 할 때 주사위를 던진 총 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값들의 집합은 $\{1, 2, 3, \cdots\}$이며, X의 확률분포는 다음의 표와 같다.

X	1	2	3	4	$\cdots$	n	$\cdots$
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$	$\cdots$

이때 X의 기댓값 $E(X)$는 아래의 (식①)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=6$$

일반적으로 $-1<a<1$인 상수 a에 대하여 다음의 무한급수는 수렴하고 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}=1+2a+3a^2+\cdots=\frac{1}{(1-a)^2} \quad \cdots\cdots\cdots (식①)$$

(나) '숭실 햄버거' 가게에서 판촉행사의 일환으로 어린이 고객이 한 개의 햄버거를 살 때마다 세 종류의 장난감 a, b, c 가운데 하나를 임의로 선택하여 나누어 주고 있다. 고객은 장난감 종류를 결정할 수 없고, 햄버거 가게에는 세 가지 장난감이 동일한 비율로 무수히 많이 준비되어 있다. 즉, 고객이 한 개의 햄버거를 새로 살 때 각각의 장난감 a, b, c를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$로 동일하다.

이 햄버거 가게에서 고객이 한 번에 한 개의 햄버거를 살 때, 한 세트(장난감 종류별로 한 개씩)의 장난감을 수집할 때까지 구입한 햄버거의 개수를 확률변수

X라고 하자. 한 세트의 장난감을 수집하기 위해서는 최소 3개 이상의 햄버거를 구입해야 한다. X의 값에 따라 다음의 표와 같이 상황을 설명할 수 있다.

사건	설명
$X=3$	세 번 모두 다른 종류의 장난감을 받음
$X=4$	처음 세 개의 햄버거를 살 때까지는 두 종류의 장난감을 받고, 네 번째 살 때 남은 한 종류의 장난감을 받음
$X=5$	처음 네 개의 햄버거를 살 때까지는 두 종류의 장난감을 받고, 다섯 번째 살 때 남은 한 종류의 장난감을 받음
$\vdots$	

[논제] 제시문 (나)의 상황에서 다음 질문에 답하시오.

(1) $\mathrm{P}(X=3)$과 $\mathrm{P}(X=4)$를 계산하는 과정을 기술하고, 그 값을 구하시오.

(2) 3 이상의 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(X=n)$을 n에 관한 식으로 나타내시오.

(3) 논제(2)의 결과를 이용하여 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하시오.

[도움말]

- $X=n$인 사건은 마지막 n번째 받은 장난감이 a인 경우, b인 경우, c인 경우로 나누어진다.
- 제시문 (가)의 (식①)을 활용하여 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 계산할 수 있다.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

이산확률변수 X의 기댓값에 대한 정의와 예제를 통해 기댓값의 계산법을 공식과 함께 설명하고 있다.

2. 제시문 (나)

이산확률분포를 가지게 되는 문제 상황을 구체적인 예제를 통해 언급하고 있다.

논제 분석

[논제]

(1) 제시문 (나)에서 주어진 이산적 상황을 이해하고 주어진 확률변수에 대한 확률을 계산할 수 있는가에 대한 논제이다.

(2) (1)을 일반화하여 $X=n$일 때 경우를 이해하고 이것의 확률을 계산할 수 있는지에 대한 논제이다.

(3) (2)의 결과를 이용하여 제시문 (가)에서 제시한 기댓값의 정의와 무한급수의 계산식(식①)을 적절히 활용하여 제시문 (나)의 기댓값을 계산할 수 있는지를 알아보는 논제이다.

배경지식 쌓기

이산확률변수와 확률분포

1. 이산확률변수 : 변수 X가 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 중에서 어느 값을 갖고, 각각에 대한 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_n$으로 정해질 때, X를 확률변수라 한다. 이 때, 확률변수 X가 유한 개의 값을 취할 때, X를 이산확률변수라 하고, 이산확률변수 X가 x_i를 취할 확률을 $P(X=x_i)$로 나타낸다.

2. 확률분포 : 확률변수 X가 취하는 값 x_i와 각각에 대한 확률 p_i와의 대응 관계

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

3. 확률분포의 성질 : 확률분포 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$에서

① $0 \le p_i \le 1$　　② $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

③ $P(X=x_i \text{ 또는 } X=x_j)=P(X=x_i)+P(X=x_j)=p_i+p_j$ (단, $i \neq j$)

4. 이산확률변수의 평균과 분산

이산확률변수 X의 확률변수가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때,

(1) 평균(기댓값) : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(2) 분산 : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i = E(X^2)-\{E(X)\}^2$

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

풀어보기

1.[24] 이산확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	10	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_{10}	1

(단, $p_i > 0$이고 $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$이다.)

집합 $\{x \mid 0 \le x \le 10\}$에서 정의된 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가

$$F(x)=\mathrm{P}(0 \le X \le x),\ G(x)=\mathrm{P}(X>x)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $G(3)=1-F(3)$

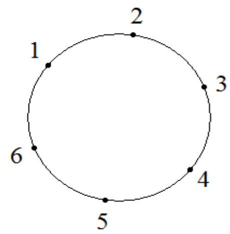
ㄴ. $\mathrm{P}(3 \le X \le 8)=F(8)-F(3)$

ㄷ. $\mathrm{P}(3 \le X \le 8)=G(2)-G(8)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

2.[25] 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 6등분한 점에 1부터 6까지의 번호를 하나씩 부여하였다. 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수에 해당하는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 확률변수 X라 할 때, X의 평균과 표준편차를 구하시오.



24) 한국교육과정평가원 (2006)
25) 한국교육과정평가원 (2008)

읽기 자료

여러 가지 이산확률분포[26)]

1. 음이항분포

사건 A가 발생할 확률이 p $(0<p<1)$인 독립시행을 반복할 때, 사건 A가 r번 발생할 때까지 시행한 횟수를 X라고 하면 X는 확률변수가 된다. 이때, X의 분포를 음이항분포라 한다. 또, 사건 A 가 r번 발생할 때까지 시행한 횟수를 n이라고 하면

$$\mathrm{P}(X=n)={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}(1-p)^{n-r}p^{r},\ n=r,\ r+1,\ \cdots$$

이다. 또한 이 시행을 무한히 반복하면 언젠가는 사건 A가 r번 일어날 것이므로

$$\sum_{n=r}^{\infty}\mathrm{P}(X=n)=1$$

이 성립함을 예상할 수 있다.

음이항 분포를 따르는 확률변수 X의 기댓값(평균)을 구해보자.

$\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{n=r}^{\infty} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\,p^{r}(1-p)^{n-r}$ 에서 $n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=r\,{}_{n}\mathrm{C}_{r}$ 임을 이용하자.

$m=n+1$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}{}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r+1}(1-p)^{n-r}\\&=\frac{r}{p}\sum_{m=r+1}^{\infty}{}_{m-1}\mathrm{C}_{r}\,p^{r+1}(1-p)^{m-(r+1)}\\&=\frac{r}{p}\ \left(\because \sum_{m=r+1}^{\infty}{}_{m-1}\mathrm{C}_{r}\,p^{r+1}(1-p)^{m-(r+1)}=1\right)\end{aligned}$$

2. 기하분포

사건 A가 발생할 확률이 p $(0<p<1)$일 때, 사건 A 가 발생할 때까지 시행한 횟수를 X라고 하면 X는 확률변수가 된다. 이 때, X의 분포를 기하분포라 한다. (단, 매 시행은 독립이다.) 이때, 사건 A 가 정확히 n번째 시행에서 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(X=n)=(1-p)^{n-1}p$$

이다. 또한 이 시행을 무한히 반복하면 언젠가는 사건 A가 일어날 것이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(X=n)=1$$

이 성립함을 예상할 수 있다.

$\lim\limits_{n\to\infty} np^{n}=0(\ 0<p<1)$임을 이용하여 기하분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 구해보자. $\mathrm{P}(A)=p$ 일 때,

26) INTRODUCTION TO PROBABILITY AND STATISTICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS, McGraw-Hill Series, 1997 / 2010 EBS 상위 1%

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}p=p\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\,(1-p)^{k-1}$$

이므로 , $q=1-p,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,q^{k-1}$ 이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,q^{k-1}=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$$

$$qS_n=q+2q^2+\cdots+(n-1)q^{n-1}+nq^n$$

$\therefore\ S_n=\dfrac{(1-q^n)}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{p^2}$ 이므로 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ 이다.

3. 초기하분포

크기가 N인 모집단이 m개의 원소로 이루어진 A그룹과, $(N-m)$개의 원소로 이루어진 B그룹으로 구성되어 있다. 이 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 뽑을 때 A그룹으로부터 뽑힌 원소의 개수를 X라고 하자. 이때, X의 분포를 초기하분포라고 한다.

[예제][27)]

지수는 자신이 설계한 실험을 위해 수조에 N마리의 금붕어를 키우고 있다. 어느 날 지수가 N마리 중 m마리의 금붕어에 특별한 표식을 달고 다시 수조에 넣어 두었다. 며칠이 지난 뒤 실험 결과를 확인하기 위해 수조에서 n마리의 금붕어를 동시에 빼내었다. n마리의 금붕어 중 지수가 표식을 달아 둔 금붕어의 수를 X라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $\mathrm{P}(X=i)$ (2) $\mathrm{E}(X)$

[풀이]

(1) 표식을 달아 둔 금붕어 m마리 중 i마리가 잡히고 $\left({}_mC_i\right)$, 나머지 $(n-i)$마리는 표식을 달지 않은 $(N-m)$마리 중에서 잡히는 경우이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X=i)=\frac{{}_mC_i\times{}_{N-m}C_{n-i}}{{}_NC_n}$$

이다. 이로부터 $\sum_{i=0}^{m}\dfrac{{}_mC_i\times{}_{N-m}C_{n-i}}{{}_NC_n}=1$ 임을 알 수 있다.

(2) $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}k\dfrac{{}_mC_k\times{}_{N-m}C_{n-k}}{{}_NC_n}$

여기에서 ${}_{km}C_k=m_{m-1}C_{k-1},n_NC_n=N_{N-1}C_{n-1}$임을 이용하면

$$\mathrm{E}(X)=\frac{nm}{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n-1}C_{k-1}\times{}_{N-m}C_{n-k}}{{}_{N-1}C_{n-1}}=\frac{nm}{N}$$

27) 2010 EBS 상위1%

4. 포아송분포[28]

포아송분포(Poisson distribution)은 확률론과 통계학에서 어떤 특정 시간대에 걸쳐 알려진 어떤 사건의 발생률의 분포를 표현하기 위한 이산형 확률 분포이다. 포아송분포는 거리, 면적, 체적 등 다른 값의 특정 간격 안에서 발생하는 사건들의 확률을 다루는 데도 쓰일 수 있다. 주로 시간, 거리, 또는 공간상에서 무작위로 드물게 발생하는 사건의 수를 묘사하는 데 사용되고 있다. 18세기에 시메옹 드니 포아송에 의해 발견되고 1838년 출간된 『민사 사건과 형사사건의 재판의 확률에 관한 연구』에서 알려졌다. 이 연구는 주어진 길이의 시간 간격 속에서 일어나는 사건의 이산형 데이터를 세는 확률변수 N을 집중연구한 것이다.

어떤 주어진 간격 사이에 어떤 사건이 일어날 기댓값이 λ라 하면, 사건이 n회 일어날 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{P}(n;\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ ,\ n=0,1,2,\cdots\ ,\ \lambda>0$$

예시 답안

풀어보기 1

1. $G(3)=\mathrm{P}(X>3)$
   $=1-\mathrm{P}(0\le X\le 3)=1-F(3)$ (참)
2. $\mathrm{P}(3\le X\le 8)=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X<3)$
   $=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$
   $=F(8)-F(2)$ (거짓)
3. $\mathrm{P}(3\le X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 3)-\mathrm{P}(X>8)$
   $=\mathrm{P}(X>2)-\mathrm{P}(X>8)$
   $=G(2)-G(8)$ (참)

풀어보기 2

확률변수 X가 취할 수 있는 값은

0, 1, $\sqrt{3}$, 2이므로 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

28) 위키백과사전 http://ko.wikipedia.org

논제

(1) $\mathrm{P}(X=3)$ 은 햄버거 가게에서 한 번에 한 개의 햄버거를 살 때, 세 번 구입하고 각각 서로 다른 종류의 장난감을 1개씩 받게 될 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=3!\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

이다.

또, $\mathrm{P}(X=4)$ 는 처음 세 개의 햄버거를 살 때까지는 세 종류의 장난감 a, b, c 중 어느 두 종류만 받게 되는 경우, 예를 들어 (a, a, b), (b, c, b), (c, c, a), (b, b, a) 등과 같이 두 종류만 받고 마지막 네 번째 햄버거를 구입한 후 받게 되는 장난감이 앞서 받은 두 종류와는 다른 나머지 한 종류의 장난감을 받게 되는 경우이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\times 2\times\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

이다.

(2) $\mathrm{P}(X=n)$ 은 $n-1$ 번째까지 받은 장난감의 종류는 두 종류이고, n 번째에 받은 장난감이 남은 한 종류가 될 확률이다.

n 번째 받은 장난감이 a 일 때, $n-1$ 번째까지 받은 장난감은 b, c 두 종류가 될 경우의 수는 ${}_2\Pi_{n-1}-2$ 이다. 따라서 이 경우의 확률은

$$({}_2\Pi_{n-1}-2)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

같은 방법으로 n 번째 받은 장난감이 b 인 경우와 c 인 경우도 같은 확률을 가지므로

$$\mathrm{P}(X=n)=({}_2\Pi_{n-1}-2)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times 3=\frac{1}{3^{n-1}}(2^{n-1}-2)$$

이다.

(3) 제시문 (가)의 이산확률변수 X 의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$ 의 정의와 논제(2)의 결과 $\mathrm{P}(X=n)$ 을 이용하면

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=3}^{\infty}n\mathrm{P}(X=n)=\sum_{n=3}^{\infty}n\frac{1}{3^{n-1}}(2^{n-1}-2)\cdots\cdots(\text{ㄱ})$$

으로 나타낼 수 있다.

이 때, $-1<\frac{2}{3}<1$, $-1<\frac{1}{3}<1$ 이므로 제시문 (가)의 식①을 이용하여 그 수렴값을 계산할 수 있다. 즉, (ㄱ) 식은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1-\frac{4}{3}\right\}-2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-1-\frac{2}{3}\right\}\\&=\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}-1-\frac{4}{3}\right\}-2\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1-\frac{2}{3}\right\}\\&=\frac{20}{3}-\frac{7}{6}=\frac{11}{2}\end{aligned}$$

가 된다.

따라서 햄버거를 5.5 번 정도 구입하면 한 세트의 장난감을 수집할 것으로 기대된다.

12 아주대학교 예시(일반학부)

✽ [문제 1 (50점)]

제 시 문

(가) 도형의 대칭성에 대해 알아보자. 평면도형의 대칭성은 점대칭과 선대칭, 두 가지로 나눌 수 있다.

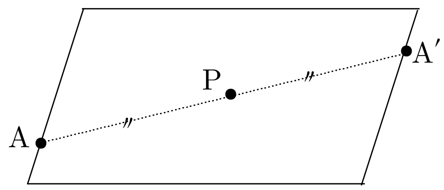
도형 S가 점대칭이라는 것은, 특정한 점 P가 존재하여 이 점 P를 중심으로 도형 S를 180도 회전시키면 회전된 도형이 원래 도형에 겹쳐진다는 것을 뜻한다. 이 때 점 P를 도형 S의 **대칭의 중심**이라 한다. 도형 S를 둘러싸는 원이 존재할 때 S를 **유계**도형이라 하는데, 도형 S가 유계도형이고 점대칭이면 대칭의 중심은 유일하다.

평행사변형은 점대칭도형의 한 예이다. 두 대각선의 교점이 평행사변형의 대칭의 중심이다. 사인함수의 그래프는 점대칭도형의 또 다른 예이다. 사인함수의 그래프는 유계도형이 아니며, 대칭의 중심도 무수히 많다.

다음으로, 도형 S가 선대칭이라는 것은, 특정한 직선 ℓ이 존재하여 도형 S를 직선 ℓ을 따라 접으면 도형의 두 부분이 완전하게 포개진다는 것을 뜻한다. 이 때 직선 ℓ을 **대칭축**이라 하며, 대칭축은 여러 개 있을 수 있다.

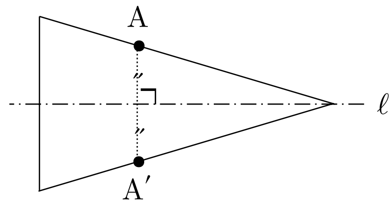
이등변삼각형은 선대칭도형의 예이다. 등변이 아닌 변의 수직이등분선이 이등변삼각형의 대칭축이다. 정사각형도 선대칭이며, 정사각형의 대칭축은 4개나 된다. 일반적으로 정n각형은 대칭축이 n개인 선대칭도형이다.

(나) 도형 S가 점 P에 대해 점대칭이기 위해서는, 도형 S의 임의의 점 A의 대칭의 중심 P에 대한 대칭점 A′이 도형 S에 포함되어 있으면 된다. 이 때 세 점 A, A′, P는 점 P가 선분 AA′의 중점이 된다는 관계를 만족한다.



<그림 Ⅰ-1>

같은 식으로, 도형 S가 직선 ℓ에 대해 선대칭이기 위해서는, 도형 S의 임의의 점 A의 대칭축 ℓ에 대한 대칭점 A′이 도형 S에 포함되어 있으면 된다. 이 때 두 점 A, A′과 직선 ℓ은 직선 ℓ이 선분 AA′의 수직이등분선이 된다는 관계를 만족한다.



<그림 Ⅰ-2>

[문제 1-1] 도형 S가 함수 $y=f(x)$의 그래프일 때 다음에 답하라.

(1) (5점) 도형 S가 좌표가 (p, q)인 점 P에 대하여 점대칭일 조건을 함수 f에 관한 식으로 나타내어라.

(2) (15점) 도형 S가 방정식 $y=mx+k$ (단, $m\neq 0$)로 주어진 직선 ℓ에 대하여 대칭일 조건을 함수 f에 관한 식으로 나타내어라.

[문제 1-2] (10점) 3차 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$의 그래프는 점대칭임을 보여라.

[문제 1-3] 함수 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$의 그래프를 S라 하자.

(1) (10점) S의 두 점근선인 직선 $y=x$와 y-축이 이루는 예각을 이등분하는 직선 ℓ의 방정식을 구하라.

(2) (10점) S가 ℓ에 대해 선대칭임을 보여라.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

평면도형의 대칭성은 점대칭과 선대칭으로 나눌 수 있으며 점대칭도형과 선대칭도형을 정의하고 각각의 예를 들어 설명하고 있다.

2. 제시문 (나)

도형 S 가 점대칭도형이기 위한 조건과 선대칭도형이기 위한 조건을 설명하고 있다.

논제 분석

[문제1] 제시문을 이용하여 도형 S가 점대칭도형과 선대칭도형일 조건을 함수 f에 관한 식으로 나타낼 수 있는가?

(1) 도형 S위의 임의의 점 $\mathrm{A}(x, y)$의 점 $\mathrm{P}(p, q)$에 대한 대칭점 $\mathrm{A}'(s, t)$가 도형 S에 포함되어 있으며 점 P는 선분 AA'의 중점이 됨을 식으로 표현하고 두 식을 연립하여 f에 대한 식으로 표현한다.

(2) 도형 S의 임의의 점 $\mathrm{A}(x, y)$의 대칭축 $\ell : y = mx + k$ 에 대한 대칭점 $\mathrm{A}'(s, t)$가 도형 S에 포함되어 있으며 두 점 A, A'과 직선 ℓ은 직선 ℓ이 선분 AA'의 수직이등분선이 됨을 식으로 표현하고 이를 연립하여 f에 대한 식으로 표현한다.

[문제2] 주어진 삼차함수가 [1-1]의 (1)의 결과를 만족함을 보일 수 있는가?

주어진 삼차함수를 [1-1]의 점대칭도형의 f에 관한 조건식에 대입하여 전개하고 이를 만족하는 실수 p, q가 존재함을 보인다.

[문제3] $y = x$와 y축이 이루는 예각을 이등분하는 직선을 구하고, 주어진 함수 $f(x)$가 [1-1]의 (2)를 만족함을 보일 수 있는가?

(1) S의 두 점근선이 이루는 예각을 구하고 이를 그림으로 나타내어 이등분선 위의 임의의 점에서 x축에 수선의 발을 내리고 삼각형의 성질을 이용하여 기울기를 구한다.

(2) S 위의 임의의 점을 (x, y)라 하고 직선 ℓ에 대한 대칭점을 (s, t)라 할 때, [1-1]의 (2) 과정을 이용하여 (s, t)도 $t = f(s)$를 만족함을 보인다.

배경지식 쌓기

도형의 이동

1. 도형 $f(x,\ y)=0$의 대칭이동

(ⅰ) x축 대칭이동 : $f(x,\ -y)=0$
(ⅱ) y축 대칭이동 : $f(-x,\ y)=0$
(ⅲ) 원점 대칭이동 : $f(-x,\ -y)=0$
(ⅳ) $y=x$ 대칭이동 : $f(y,\ x)=0$
(ⅴ) $y=-x$ 대칭이동 : $f(-y,\ -x)=0$
(ⅵ) $x=a$에 대한 대칭이동 : $f(2a-x,\ y)=0$
(ⅶ) $y=b$에 대한 대칭이동 : $f(x,\ 2b-y)=0$
(ⅷ) 점 (a,b)에 대한 대칭이동 : $f(2a-x,\ 2b-y)=0$

2. 직선 l : $y=ax+b$ 에 대한 대칭이동

점의 대칭이동 : 점 $\mathrm{A}(x,\ y)$의 직선 l에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(x',y')$이라 하면
(ⅰ) 중점 조건 : AA'의 중점이 직선 l 위에 있다.
(ⅱ) 수직 조건 : 두 점 A, A′을 지나는 직선은 직선 l과 수직이다.
즉, ($\overleftrightarrow{\mathrm{AA}'}$의 기울기)×($l$의 기울기) $=-1$

3. 일차변환

좌표평면 위의 각 점을 그 평면 위의 다른 점으로 대응시키는 함수를 변환이라고 하며 특히, 변환 f : $(x,\ y)\rightarrow(x',\ y')$에서 $x',\ y'$이 다음과 같이 상수항이 없는 $x,\ y$에 대한 일차식으로 나타낼 때, 변환 f를 일차변환이라고 한다. 또한 이러한 일차변환을 행렬로 표현하면

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ (a,\ b,\ c,d\text{는상수})$$

4. 여러 가지 일차변환의 행렬표현

(ⅰ) x축에 대한 대칭변환 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ⅱ) y축에 대한 대칭변환 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ⅲ) 원점에 대한 대칭변환 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ⅳ) 직선 $y=x$에 대한 대칭변환 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ⅴ) 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(vi) 닮음의 중심이 원점이고, 닮음비가 k인 닮음환은 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(vii) 원점을 중심으로 각 만큼 회전이동하는 회전변환은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

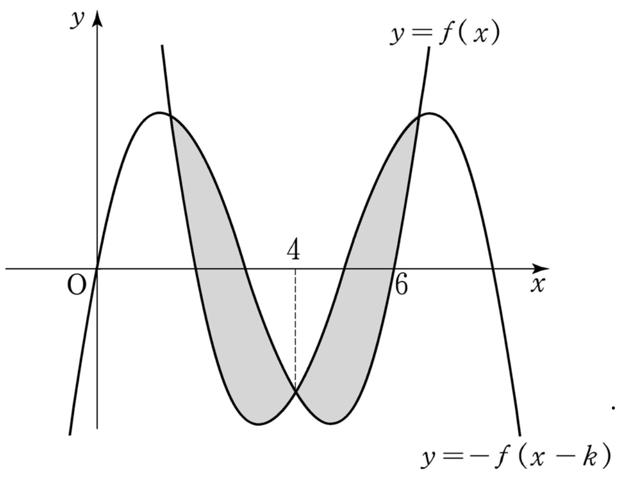
풀어보기

1. 일차변환 $f:(x,\ y)\to(x',\ y')$이 직선 $y=mx$에 대한 대칭변환일 때, 일차변환 f의 행렬을 구하시오.

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f(6)=0$
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)+f(x-k)dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x 좌표의 값이 4일 때, $\int_{0}^{k} f(x)dx$의 값을 구하시오. (2006 평가원)



예시 답안

풀어보기 1

임의의 점 $\mathrm{A}(x,\ y)$의 f에 의한 대칭점 $\mathrm{A}'(x',\ y')$이라 하면 A, A′의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 $y=mx$ 위의 점이다.

따라서, $y+y'=m(x+x')\cdots①$

또한, 선분 AA′은 $y=mx$와 수직이므로 선분 AA′의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

따라서, $m(y'-y)=-(x'-x)\cdots②$

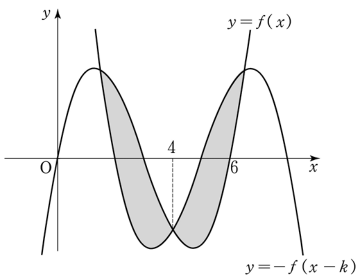
①, ②를 연립하면

$$x'=\frac{1}{m^2+1}\{-(m^2-1)x+2my\},\ y'=\frac{1}{m^2+1}\{2mx+(m^2-1)y\}$$

이다.

따라서, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이고 일차변환 f의 행렬은 $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}$이다.

풀어보기 2



$f(0)=f(6)=0$이므로 $f(x)=x(x-6)(x-a)$로 놓을 수 있다.

또한 (나)의 $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)+f(x-k)dx=0$에 의하여 어두운 부분의 넓이가 같으므로 $k=2$이다.

이때, $y=f(x)$와 $y=-f(x-k)$의 교점의 좌표가 4이므로

$x(x-6)(x-a)=-(x-2)(x-8)(x-2-a)$의 근이 4이다.

따라서, $4(4-6)(4-a)=-(4-2)(4-8)(4-2-a)$이고 이것을 풀면 $a=3$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^k f(x)\,dx &== \int_0^2 x(x-3)(x-6)dx \\ &= \int_0^2 (x^3-9x^2+18x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^2 = 16\end{aligned}$$

논제 29)

[1-1]

(1) 점 (x, y)가 S의 임의의 점이면 등식

$$y=f(x) \ \cdots \ ①$$

가 성립한다.

점 (p, q) 에 대한 (x, y) 의 대칭점을 (s, t) 라 하면, $s=2p-x$, $t=2q-y$ 이다. S 가 (p, q) 에 대해 대칭이면 (s, t) 가 S 에 속하는 점이 되므로 등식 $t=f(s)$가 성립한다. 따라서

$$2q-y=f(2p-x) \ \cdots \ ②$$

가 성립하고, ①과 ②로부터 $2q-f(x)=f(2p-x)$가 성립한다.

(2) S의 임의의 점을 (x, y)라 하고, ℓ에 대한 대칭점을 (s, t)라 하면,

$$\begin{cases} \dfrac{t+y}{2}=m\cdot\dfrac{s+x}{2}+k \\ \dfrac{t-y}{s-x}=-\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

이 성립한다. 이를 s와 t에 대해 풀면,

$$s=\frac{1}{1+m^2}\left((1-m^2)x+2my-2mk\right),$$

$$t=\frac{1}{1+m^2}\left(2mx+(m^2-1)y+2k\right)$$

이다. (x, y)와 (s, t)가 S에 속하는 점이므로 $y=f(x)$이고 $t=f(s)$이다. 따라서 구하는 조건은

$$y=f(x),$$

$$\frac{1}{1+m^2}\left(2mx+(m^2-1)y+2k\right)=f\left(\frac{1}{1+m^2}\left((1-m^2)x+2my-2mk\right)\right)$$

또는

$$\frac{1}{1+m^2}\left(2mx+(m^2-1)f(x)+2k\right)=f\left(\frac{1}{1+m^2}\left((1-m^2)x+2mf(x)-2mk\right)\right)$$

이다.

29) 아주대 예시(일반학부) 답안

[1-2]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 두자. 모든 x 에 대해 $f(2p-x)+f(x)-2q=0$ 이 되는 p 와 q가 존재함을 보이면 된다.

$$f(2p-x)+f(x)-2q=(6ap+2b)x^2-(12ap^2+4bp)x+8ap^3+4bp^2+2cp+2d-2q$$

이므로

$$6ap+2b=0,\ 12ap^2+4bp=0,\ \ 8ap^3+4bp^2+2cp+2d-2q=0$$

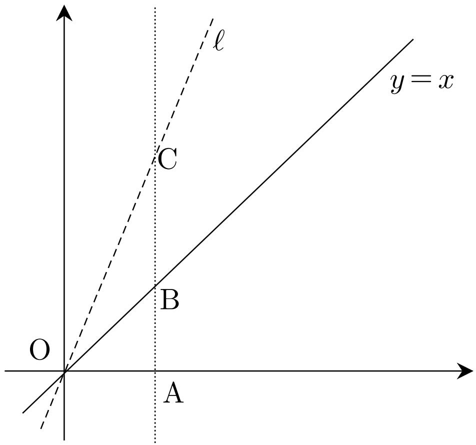
을 동시에 만족하는 p와 q가

$$p=-\frac{b}{3a},\quad q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^2}$$

으로 존재하므로 3차함수의 그래프는 항상 점대칭이다.

[1-3]

(1) x-축 상에 한 점 A를 잡고 A를 지나 x-축에 수직인 직선이 직선 $y=x$, 직선 l과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.



그러면, 원점을 O라 할 때, $\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{BCO}$이고 $\angle\mathrm{ABO}=\frac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{8}$이므로 $\angle\mathrm{BCO}=\frac{\pi}{8}=\angle\mathrm{BOC}$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{OBC}$는 이등변삼각형이고 $\mathrm{OB}=\mathrm{BC}$이다. 이제, $\mathrm{AB}=\mathrm{OA}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{2}\,\mathrm{OA}$이므로, 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}+\sqrt{2}\,\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}}=1+\sqrt{2}$$

이다. 그러므로 l의 방정식은 $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x$이다.

(다른 풀이)

직선이 x축과 이루는 각이 θ일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이므로 직선 l의 기울기는 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$이다.

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 이므로 $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{8}}$ 이고, $\tan\dfrac{\pi}{8} > 0$ 이므로 $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ 이다.

덧셈정리에 의해 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\cdot\tan\dfrac{\pi}{8}} = \sqrt{2}+1$ 이다.

직선 l은 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y=(\sqrt{2}+1)x$ 이다.

(2) S에 속하는 임의의 점을 (x, y)라 하고, 이 점의 ℓ에 대한 대칭점을 (s, t)라 하자. 그러면, $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 이고, 앞 문제의 풀이에 의해

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{1+m^2}\left((1-m^2)x+2my-2mk\right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\left((-2-2\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,x},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{1+m^2}\left(2mx+(m^2-1)y+2k\right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\left(2(1+\sqrt{2})x+(2+2\sqrt{2})\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt{2}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}\,x}
\end{aligned}
$$

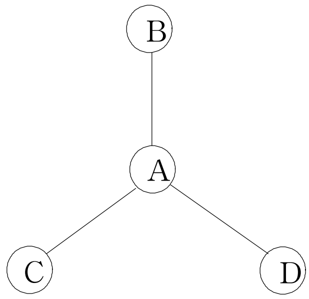
이다. 따라서 $t=f(s)$가 성립하므로 (s, t)는 S에 속한다. 그러므로 S는 l에 대해 대칭이다.

[문제 2 (50점)]

제 시 문

1827년 영국의 식물학자 로버트 브라운은 액체 속의 꽃가루를 현미경으로 관찰하던 중 꽃가루 알갱이가 액체 속에서 끊임없이 불규칙한 운동을 하며 떠다니는 것을 발견하였다. 브라운은 꽃가루의 운동이 꽃가루 내부의 생명에너지에 의해 일어난다고 생각했으나, 물리학자들은 내부 유체의 불규칙한 유동현상(유체분자의 충돌에 의해 일어남)이 꽃가루를 통하여 보여 지는 것이라고 결론지었다. 그리고 이 현상을 발견한 과학자의 이름을 따서 브라운 운동이라 하였다. 또 물리학자들은 온도가 높거나 입자의 알갱이가 작을수록 브라운 운동이 활발해짐을 발견했다. 특히, 아인슈타인은 입자들의 평균 이동거리를 확률적 방법을 응용하여 계산하였다. 브라운 운동은 분자 수준의 모든 자연 현상에서 일어나며, 가장 간단한 예로 투명 용액 속에 붉은 잉크를 한 방울 떨어뜨릴 때 잉크가 확산되어 전체 용액이 오랜 시간 후 엷은 색의 용액으로 바뀌는 현상을 들 수 있다. 현대에는 브라운 운동이 물리적 현상뿐만 아니라, 정보망을 통한 정보의 확산과정, 주식의 가격 변동 등 경제 현상을 설명하는 중요한 수학적 도구로 활용되고 있다. 우리는 간단한 격자 상의 불규칙한 유동현상(이를 랜덤 워크 random walk라 부른다) 실험을 통하여, 이 현상을 이해하고자 한다.

다음의 그림과 같이 4개의 연결된 점 A, B, C, D에 총질량 1그램의 물질이 분포하고 있다.



매초마다 물질은 일정한 규칙에 따라 확산한다. 즉, 만일 $({m_A}^k, {m_B}^k, {m_C}^k, {m_D}^k)$를 k초 후의 각 점에서의 물질의 질량이라 하면 $(k+1)$초 후의 각 점에서의 질량은 점화식

$$ {m_A}^{k+1} = \frac{{m_B}^k + {m_C}^k + {m_D}^k}{3},\ {m_B}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_B}^k}{3}, $$
$$ {m_C}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_C}^k}{3},\ {m_D}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_D}^k}{3} $$

을 만족한다. 예를 들어, 초기에 물질의 분포가 $({m_A}^0, {m_B}^0, {m_C}^0, {m_D}^0) = (1/2, 1/2, 0, 0)$이라면, 1초 후에는 $(1/6, 1/2, 1/6, 1/6)$이고 2초 후에는 $(5/18, 7/18, 1/6, 1/6)$이 된다.

[문제 2-1] (10점) 시간이 갈수록($k\to\infty$) 각 점에서의 질량 분포 $({m_A}^k,\ {m_B}^k,\ {m_C}^k,\ {m_D}^k)$이 수렴한다고 가정할 때, 그 수렴 값 (m_A, m_B, m_C, m_D)을 구하는 과정을 기술하고 그 값을 구하라.

[문제 2-2] (10점) 유한 시간 k초에 수렴 값에 도달할 수 있는지 판단하고 그 이유를 기술하라.

[문제 2-3] 초기에 물질의 분포가 $({m_A}^0, {m_B}^0, {m_C}^0, {m_D}^0)=(1/2, 1/2, 0, 0)$이라 하자.

(1) (20점) 시간 k에서 두 점 사이의 질량 차이를 다음과 같이 정의한다:

$$\beta_k = {m_B}^k - {m_A}^k,\ \ \gamma_k = {m_C}^k - {m_A}^k,\ \ \delta_k = {m_D}^k - {m_A}^k.$$

$k\to\infty$일 때 $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$는 모두 0으로 수렴함을 보여라.

(2) (10점) 각 점에서의 질량 분포 $({m_A}^k, {m_B}^k, {m_C}^k, {m_D}^k)$은 $k\to\infty$일 때 수렴함을 보여라.

제시문 분석

1. 아인슈타인은 입자들의 평균이동 거리를 확률적 방법을 응용하여 계산하였다.
2. 브라운 운동의 예를 들고, 간단한 격자 상의 불규칙한 유동현상 실험으로 설명하고 있다.
3. 1차원 격자상의 불규칙한 유동현상 실험에서 $k+1$초 후의 각 점에서의 질량은 점화식

$${m_A}^{k+1} = \frac{{m_B}^k + {m_C}^k + {m_D}^k}{3},\quad {m_B}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_B}^k}{3},$$

$${m_C}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_C}^k}{3},\qquad {m_D}^{k+1} = \frac{{m_A}^k + 2{m_D}^k}{3}$$

을 만족한다.

논제 분석

[문제 2-1] 수열이 수렴한다는 조건 하에 점화식을 연립하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ 임을 활용하여 $k\to\infty$일 때 각 점에서의 질량 분포 ${m_A}^k, {m_B}^k, {m_C}^k, {m_D}^k$의 수렴값을 m_A, m_B, m_C, m_D이라 두고 제시문의 점화식을 m_A, m_B, m_C, m_D으로 나타내고 $m_A + m_B + m_C + m_D = 1$ 임을 이용하여 수렴값을 구한다.

[문제 2-2] 직접증명이 어렵다는 것을 알고 간접증명법으로 판단할 수 있는가?

귀류법에 의해 유한시간에 수렴한다고 가정하였을 때 모순점이 존재함을 논리적으로 기술한다.

[문제 2-3] 논제의 질량 차이의 정의와 제시문의 점화식을 적절하게 연립하여 β_k에 관한 점화식으로 표현할 수 있는가?

(1) 논제에서 질량 차이의 정의와 제시문의 점화식을 연립하여 $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$에 관한 점화식을 유도하고 이를 연립하여 β_k에 관한 점화식으로 정리한다. 이 점화식으로부터 β_k가 0으로 수렴하도록 논리적 비약 없이 설명할 수 있어야 한다. 모든 식이 $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$에 대해 대칭을 이루므로 γ_k, δ_k도 같은 논의를 할 수 있음을 언급하고 결론을 지으면 된다.

(2) $m_A + m_B + m_C + m_D = 1$과 (1)을 이용하여 ${m_A}^k, {m_B}^k, {m_C}^k, {m_D}^k$의 수렴값을 구한다.

배경지식 쌓기

가. 기본적인 점화식

수열 $\{a_n\}$에서 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 일 때

(1) $a_{n+1} - a_n = d$ (일정) → 공차 d 인 등차수열

(2) $a_{n+1} \div a_n = r$ (일정) → 공비 r 인 등비수열

(3) $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ → 등차수열

(4) $(a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2}$ → 등비수열

(5) $\dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$ → 조화수열

나. 중요한 점화식

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 꼴 :

$a_{n+1}-a_n=f(n)$은 수열 a_n의 계차수열임을 이용하면 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

(2) $a_{n+1}=f(n)\times a_n$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$꼴 :

$f(n)$이 상수이면 공비 $=f(n)$인 등비수열이고 $f(n)$이 변수이면

$a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots\cdots\cdot f(n-1)$을 정리해 본다.

(3) $a_{n+1}=pa_n+q$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$꼴 :

$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$로 변경하면 $a_{n+1}-a_n$이 공비가 p인 등비수열이다.

(4) $ka_{n+2}+la_{n+1}+ma_n=0$꼴 :

$k+l+m=0$일 때, $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{k}{m}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형한다.

(5) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$꼴 :

역수를 취하여 $\frac{1}{a_n}=b_n$이라 두면 (3)의 꼴이 된다.

(6) 거듭제곱 · 거듭제곱근 꼴 :

$a_{n+1}=qa_n^p$꼴이면 양변에 로그를 취한 후 치환한다.

(7) $pa_na_{n+1}=qa_n-ra_{n+1}$꼴 :

각 항의 최소 공배수로 나눈다.

풀어보기

1. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $b_1=2$이고,

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+b_n \cdots ㉠ \\ b_{n+1}=3a_n+2b_n \cdots ㉡ \end{cases}$$

을 만족한다. 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$의 일반항을 구하시오.

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 자연수 n에 대하여

$$a_n = 5n+1$$

$$b_1 = 1,\ b_{n+1} - b_n = n+1$$

을 만족시킨다. 10 이하인 두 자연수 k, l에 대하여 a_k와 b_l의 곱이 홀수가 되는 순서쌍 $(k,\ l)$의 개수를 구하시오. (2008 평가원)

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$ 이고, $a_{n+1} = n+1+\dfrac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ $(n \geq 1)$ 을 만족시킨다. 일반항 a_n 을 구하시오. (2011 대수능)

예시 답안

풀어보기 1

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+b_n \cdots ㉠ \\ b_{n+1}=3a_n+2b_n \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $b_n=a_{n+1}-4a_n \cdots$ ㉢이고 ㉢의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$b_{n+1}=a_{n+2}-4a_{n+1} \cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 ㉡에 대입하면

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3a_n+2(a_{n+1}-4a_n)$이고 이를 정리하면

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$$

$a_{n+1}-a_n=A_n$으로 놓으면

$$A_{n+1}=5A_n$$

수열 $\{A_n\}$는 첫째항이 $A_1=a_2-a_1$, 공비가 5인 등비수열이고, ㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면 $a_2=4a_1+b_1=4+2=6$

$$\therefore A_1=a_2-a_1=6-1=5$$

따라서, $A_n=5 \cdot 5^{n-1}=5^n$이므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}A_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k$$

$$=1+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}=1+\frac{5^n-5}{4}$$

$$=\frac{5^n-1}{4}$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

위의 식을 ㉢에 대입하면 $b_n=\dfrac{5^n+3}{4}$이다.

풀어보기 2

$$a_n=5n+1$$

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=1+\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

a_n은 초항이 6이고 공차가 5인 등차수열이므로 a_1부터 a_{10} 중 홀수인 항은 5개이다.

$b_1=1,\ b_2=1+2,\ b_3=1+2+3,\ \cdots\cdots$이므로 b_n은 홀수 2개와 짝수 2개가 반복되는 수열이다.

따라서 10 이하인 두 자연수 $k,\ l$에 대하여 a_k와 b_l의 곱이 홀수가 되는 순서쌍 $(k,\ l)$의 개수는 $5\times6=30$

풀어보기 3

모든 자연수 n에 대하여

$$a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!$$

이다. $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$이라 하면, $b_1=1$이고

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(n+1)!}\\ &=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}\cdot\frac{a_{n+1}}{n+1}\\ &=b_n\cdot\frac{a_{n+1}}{n+1}\\ &=b_n\left\{1+\frac{(n-1)!}{(n+1)a_1a_2\cdots a_n}\right\}\\ &=b_n+\frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

따라서 $b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2n-1}{n}$

이고, $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}=\dfrac{2n-1}{n}$와 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{2n-3}{n-1}$을 연립하면

$a_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}(n\geqq2)$ 이다.

논제

[2-1]

각각의 점화식에서 $k\to\infty$을 취하면, 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$m_A=\frac{m_B+m_C+m_D}{3},\ m_B=\frac{m_A+2m_B}{3},\ m_C=\frac{m_A+2m_C}{3},\ m_D=\frac{m_A+2m_D}{3}$$

여기에 모든 질량의 합 $m_A+m_B+m_C+m_D=1$인 조건을 덧붙여 풀면,

$$(m_A,\ m_B,\ m_C,\ m_D)=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

임을 알 수 있다.

[2-2]

유한 시간 k초에 수렴 값에 도달한다면,

$$(m_A^{k+1}, m_B^{k+1}, m_C^{k+1}, m_D^{k+1}) = (m_A^k, m_B^k, m_C^k, m_D^k)$$

을 만족해야 한다. 문제의 점화식에 대입하여

$$m_A^k = \frac{m_B^k + m_C^k + m_D^k}{3}, m_B^k = \frac{m_A^k + 2m_B^k}{3}, m_C^k = \frac{m_A^k + 2m_C^k}{3}, m_D^k = \frac{m_A^k + 2m_D^k}{3}$$

을 얻고 $m_A^k + m_B^k + m_C^k + m_D^k = 1$인 조건과 같이 풀면, 해

$$(m_A^k, m_B^k, m_C^k, m_D^k) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

을 구한다. 주어진 점화식에서 k를 $(k-1)$로 치환하면

$$\frac{1}{4} = \frac{m_B^{k-1} + m_C^{k-1} + m_D^{k-1}}{3},\ \frac{1}{4} = \frac{m_A^{k-1} + 2m_B^{k-1}}{3},$$

$$\frac{1}{4} = \frac{m_A^{k-1} + 2m_C^{k-1}}{3},\ \frac{1}{4} = \frac{m_A^{k-1} + 2m_D^{k-1}}{3}$$

을 얻고, 그 해는 $(m_A^{k-1}, m_B^{k-1}, m_C^{k-1}, m_D^{k-1}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$이 된다. 이 과정을 반복하면, $(m_A^0, m_B^0, m_C^0, m_D^0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 얻는다. 결론적으로 초기 분포가 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$일 때 유한 시간에 수렴하고, 그 밖의 경우에는 유한 시간에 수렴하지 않는다.

[2-3]

(1) 문제에 주어진 점화식을 이용하면

$$\beta_{k+1} = \frac{\beta_k - \gamma_k - \delta_k}{3}, \gamma_{k+1} = \frac{-\beta_k + \gamma_k - \delta_k}{3}, \delta_{k+1} = \frac{-\beta_k - \gamma_k + \delta_k}{3}$$

을 유도할 수 있다. 마지막 두 식을 더하면, $\gamma_{k+1} + \delta_{k+1} = -(2/3)\beta_k$을 얻고 첫 번째 식에 대입하여 $\beta_{k+1} = \frac{1}{3}\beta_k + \frac{2}{9}\beta_{k-1}$을 얻게 된다.

이것은 $\beta_{k+1} + \frac{1}{3}\beta_k = \frac{2}{3}(\beta_k + \frac{1}{3}\beta_{k-1})$과 같고, $\beta_{k+1} + \frac{1}{3}\beta_k$이 등비수열임을 뜻하므로

$$\beta_{k+1} + \frac{1}{3}\beta_k = (\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_0)\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3} + 0\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

이다.

수학적 귀납법을 사용하여 모든 $k \geq 1$에 대하여 $|\beta_k| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$을 보이자. $k=1$일 때 성립함은 당연하다. k일 때 성립한다고 가정하면,

$$|\beta_{k+1}|=\left|-\frac{1}{3}\beta_k+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right|\le\frac{1}{3}\left(|\beta_k|+\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)\le\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k+\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

이므로 $k+1$일 때 성립함을 확인할 수 있다. 그러므로 $k\to\infty$일 때, β_k는 0으로 수렴한다. 모든 식은 β_k, γ_k, δ_k에 대하여 대칭이므로, 똑같은 논의에 의하여 γ_k, δ_k도 역시 0으로 수렴한다.

(다른 풀이) 문제에 주어진 점화식을 이용하면

$$\beta_{k+1}=\frac{\beta_k-\gamma_k-\delta_k}{3},\gamma_{k+1}=\frac{-\beta_k+\gamma_k-\delta_k}{3},\delta_{k+1}=\frac{-\beta_k-\gamma_k+\delta_k}{3}$$

을 유도할 수 있다. 마지막 두 식을 더하면, $\gamma_{k+1}+\delta_{k+1}=-(2/3)\beta_k$을 얻고 첫 번째 식에 대입하여

$$\beta_{k+1}=\frac{1}{3}\beta_k+\frac{2}{9}\beta_{k-1}$$

을 얻게 된다. 이것은

$$\beta_{k+1}+\frac{1}{3}\beta_k=\frac{2}{3}\left(\beta_k+\frac{1}{3}\beta_{k-1}\right)$$

과 같고, $\beta_{k+1}+\dfrac{1}{3}\beta_k$이 등비수열임을 뜻하므로

$$\beta_{k+1}+\frac{1}{3}\beta_k=\left(\beta_1+\frac{1}{3}\beta_0\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k=\left(\frac{1}{3}+0\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

이다. $k\to\infty$일 때, β_k가 수렴하지 않으면 $k\to\infty$일 때, β_{k+1}도 수렴하지 않고 $\beta_{k+1}+\dfrac{1}{3}\beta_k$도 수렴할 수 없다. 그러나, $k\to\infty$일 때, $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$은 수렴하므로 모순이다. 그러므로 $k\to\infty$일 때, β_k가 수렴하며 그 수렴값을 β라 하면

$$\lim_{k\to\infty}\left(\beta_{k+1}+\frac{1}{3}\beta_k\right)=\frac{4}{3}\beta=0$$

따라서, β는 0으로 수렴한다.

모든 식은 β_k, γ_k, δ_k에 대하여 대칭이므로, 똑같은 논의에 의하여 γ_k, δ_k도 역시 0으로 수렴한다.

(2) 항상 $m_A+m_B+m_C+m_D=1$이므로, 등식 $1-\beta_k-\gamma_k-\delta_k=4{m_A}^k$을 얻는다. β_k, γ_k, δ_k는 모두 0으로 수렴하므로 $4{m_A}^k$는 1로 수렴한다. 즉, ${m_A}^k$는 1/4로 수렴한다. 이제 ${m_B}^k={m_A}^k+\beta_k$, ${m_C}^k={m_A}^k+\gamma_k$, ${m_D}^k={m_A}^k+\delta_k$이므로 ${m_B}^k$, ${m_C}^k$, ${m_D}^k$는 모두 수렴한다.

13 아주대학교 예시(의학부)

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (문제 1은 자연계 일반과 중복)

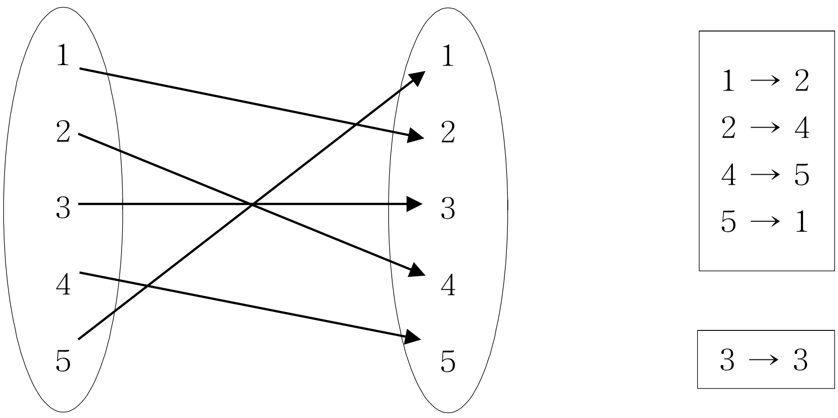
[문제 2] (50점)

제 시 문

자연수 N에 대하여 집합 $\{1, 2, ..., N\}$을 A_N으로 표기하기로 하자. 집합 A_N에서 A_N으로의 일대일대응을 N-**치환**(置換) 또는 간단히 **치환**이라고 한다. 항등함수는 치환의 한 예이다. N-치환 σ를 아래와 같이 나타내기도 한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots\cdots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

<그림 Ⅲ-1>은 5-치환의 예로서 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.



<그림 Ⅲ-1>

두 개의 N-치환 σ_1과 σ_2의 합성 $\sigma_2 \circ \sigma_1$을 N-치환의 **곱**이라 부르고 $\sigma_2\sigma_1$로 쓰기로 한다. 두 N-치환의 곱도 여전히 N-치환이다. 임의의 N-치환 σ의 역함수 σ^{-1}도 N-치환이며 이를 σ의 **역치환**이라 한다. 예를 들면, <그림 Ⅲ-1>이 나타내는 치환의 역치환은 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$이다.

집합 A_N에 속하는 서로 다른 n개의 자연수 $i_1, i_2, ..., i_n$이 존재하여 $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, $\cdots$, $\sigma(i_n) = i_1$을 만족하고 나머지 원소들은 자신에게 대응시키는 치환 σ를 **사이클**이라 하고 $\sigma = (i_1\ i_2 \cdots i_n)$으로 표기하며 n을 σ의 **길이**라 한다. <그림 Ⅲ-1>이 표현하는 치환은 길이가 4인 사이클 $(1\,2\,4\,5)$이다.

치환 중에서 두 원소만 서로 바꾸어 대응시키고 나머지는 자신에게 대응시키는 것을 **호환**(互換)이라고 한다. 즉, $1 \le i < j \le N$인 자연수 i와 j에 대하여, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$이고 $k \ne i, j$이면 $\sigma(k) = k$인 치환 σ를 호환이라 부르고, $(i\ j)$

또는 $(j\,i)$로 나타내기로 한다. 호환은 길이가 2인 사이클이다. 연속한 두 자연수로 구성된 호환을 **인접호환**이라고 한다. 예를 들어, $(2\,4)$는 호환이지만 인접호환은 아니다. 한편, $(4\,5)$는 인접호환이다.

일반적으로 치환에 대하여 아래 정리가 성립한다.

정리 1. 모든 치환은 호환들의 곱으로 나타낼 수 있다.

치환 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}$에서 1은 3으로, 3은 5로, 5는 1로 대응되고, 2와 4는 서로에게 대응된다. 따라서 σ를 $\sigma=(135)(24)$와 같이 사이클들의 곱으로 표현할 수 있다. 한편, $(1\,3\,5)=(1\,5)(1\,3)$이므로 $\sigma=(1\,5)(1\,3)(2\,4)$와 같이 호환의 곱으로 표시된다.

세 개의 호환의 곱에 관한 다음의 정리는 쉽게 증명될 수 있다.

정리 2. 서로 다른 세 자연수 i, j, k에 대하여

$$(i\,j)(j\,k)(i\,j)=(i\,k)$$

이 성립한다.

[논제 1-1] 길이가 6인 사이클 $\sigma=(1\,2\,3\,4\,5\,6)$을 호환의 곱으로 표현하라. (5점)

[논제 1-2] 역치환 σ^{-1}을 호환의 곱으로 표현하라. (5점)

[논제 2] 다음과 같이 정의된 치환

$$\sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\1\,3\,5\,6\,2\,7\,4\end{pmatrix}$$

을 사이클들의 곱으로 표현하라. 그리고 σ를 인접 호환의 곱으로 표시하라. (10점)

[논제 3] 집합 A_N의 모든 원소를 자신에게 대응시키는 항등치환을 ϵ이라 하자. 즉,

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots N-1\,N \\ 1\,2\,3 \cdots N-1\,N \end{pmatrix}$$

만일 ϵ을 m개의 호환들의 곱으로 표시할 수 있다면 $(m-2)$개의 호환들의 곱으로 표시할 수 있음을 보여라. 그 결과로 ϵ을 호환들의 곱으로 표시할 때, 그 호환들의 개수는 항상 짝수임을 유도하라. (20점)

[논제 4] 집합 A_N의 임의의 치환 σ는 짝수 개의 호환들의 곱으로 표시되면서 동시에 홀수 개의 호환들의 곱으로 표시될 수 없음을 보여라. (힌트 : 논제 3을 이용하라.) (10점)

제시문 분석

치환에 대하여 정의하고 그와 관련된 개념을 설명하고 있다. 특히, 논제의 해결에 필요한 호환과 관련된 정리를 제시하고 있다.

논제 분석

[논제 1-1] 제시문의 정리 1의 내용을 이해하여 사이클을 호환의 곱으로 표현할 수 있는가?

제시문에서 정리 1을 근거로 주어진 예를 이해하고 이를 적용하여 $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$을 호환의 곱으로 표현하여야 한다.

[논제 1-2] 역치환의 개념을 이해하였는가?

σ의 역함수인 역치환의 개념을 이해하고 역치환을 구한 후 논제1-1과 같은 방법으로 호환의 곱으로 표시할 수 있다.

[논제 2] 치환을 사이클과 인접 호환의 곱으로 표현할 수 있는가?

제시문에서 주어진 사이클과 인접 호환에 대한 개념을 이해하여, 주어진 치환을 사이클로 표현한다. 그리고 정리 2를 이용하여 인접 호환의 곱으로 표시할 수 있다.

[논제 3] 항등치환이 항상 짝수개의 호환의 곱으로 표시됨을 설명할 수 있는가?

먼저 논제의 첫 번째 주장에 대한 증명이 선행되어야 할 것이다. 가정에 의해 항등치환을 $\epsilon = t_1 t_2 \cdots t_m$으로 두어 호환 $t_2, ..., t_m$에 나타나는 임의의 수 x를 선택한 뒤 x가 나타나는 마지막 호환을 $t_k = (xa)$라 할 때 $t_{k-1} = (xa)$인 경우와 $t_{k-1} \neq (xa)$인 경우로 나누어 생각 할 수 있다.

논제의 첫 번째 주장이 증명되고 나면 이를 이용하여 항등치환이 항상 짝수 개의 호환으로 표시됨을 귀류법을 통해 보일 수 있다.

[논제 4] 역치환과 논제 3의 결과를 이용하여 모순을 이끌어 낼 수 있는가?

임의의 치환이 짝수 개의 호환의 곱으로 표시되면서 홀수 개의 호환의 곱으로 표시될 수 있다고 가정하여 치환을 $\sigma = t_1 t_2 \cdots t_{2m} = s_1 s_2 \cdots s_{2n+1}$이라 할 때 역치환에 의해 $\epsilon = \sigma\sigma^{-1} = s_1 s_2 \cdots s_{2n+1} t_{2m} t_{2m-1} \cdots t_1$이 되고 이는 논제 3에 모순임을 보이면 된다.

배경지식 쌓기

1. 함수

(1) 일대일함수 : 함수 $f: X \to Y$의 정의역의 임의의 원소 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

이 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

(2) 일대일대응 : 일대일 함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수.

(3) 항등함수 : 정의역의 각 원소가 자기 자신으로 대응되는 함수. 즉,

$$f: X \to X,\ f(x) = x \ \ (x \in X)$$

(4) 합성함수

두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$가 주어졌을 때, X의 각 원소 x에 대하여 $z = g(f(x))$가 되도록 하는 X에서 Z로의 함수를 f와 g의 합성함수라고 하고 기호로 $g \circ f$와 같이 나타낸다.

$$g \circ f: X \to Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(5) 역함수

일대일대응인 함수 $f: X \to Y$ 에 대하여 Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$가 되는 x를 대응시키는 함수. 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다.

$$f^{-1}: Y \to X,\ x = f^{-1}(y)$$

2. 치환

(1) 치환 : 집합 X에서 X 자신으로의 일대일대응 $\sigma: X \to X$.

치환 σ가 서로 다른 r개의 문자 $i_{1,} i_2, \cdots, i_{r-1}, i_r$를

$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{r-1} \to i_r \to i_1$와 같이 순환적으로 변환시키고 나머지 문자는 고정시키는 치환일 때, 치환 σ를 길이 **r인 순환치환(cycle) 또는 r항 순환치환(r-cycle)** 이라고 한다.

이때, σ를 $(i_1\, i_2 \cdots\, i_{r-1}\, i_r)$으로 나타낸다, 특히 2항 순환치환 $(i\, j)$를 **호환** (transpositon)이라고 한다.[30)]

(2) 정리(역치환)

$A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$이라 하고 $\sigma = (i_1\, i_2 \cdots\, i_r)$이라 하자.

그러면 σ^{-1}는 순환치환이고 $\sigma^{-1} = (i_r\, i_{r-1} \cdots\, i_1)$이다. 특히 호환 $\sigma = (i\, j)$에 대하여 $\sigma^{-1} = \sigma$이다.

<증명>

$k = 1, 2, \cdots, r-1$에 대하여 $\sigma(i_k) = i_{k+1}$이므로 $\sigma^{-1}(i_{k+1}) = i_k$이다.

또 $\sigma(i_r) = i_1$이므로 $\sigma^{-1}(i_1) = i_r$이다. 한편 $i \in A - \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$이면 $\sigma(i) = i$이므로 $\sigma^{-1} = (i_r, i_{r-1}, \cdots, i_2, i_1)$이다.

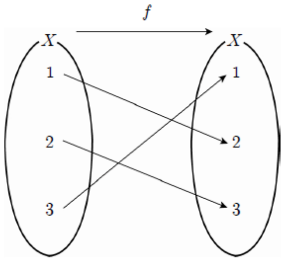
(3) 임의의 치환은 호환의 곱으로 표시할 수 있다. 그리고 치환 σ를 호환의 곱으로 분해하는 방법은 여러 가지가 있다. 즉 같은 치환도 여러 가지 방법으로 호환의 곱으로 표시할 수 있다.

예를 들면 $(1\,2)(1\,7) = (1\,2)(1\,7)(2\,3)(3\,2) = (4\,5)(1\,2)(5\,4)(1\,6)(6\,1)(7\,1)$와 같이 나타낼 수 있다.

30) 현대대수학 제6판 (김응태, 박승안 저)

풀어보기

1. 집합 $X=\{1,2,3\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$가 그림과 같이 주어져 있다.



$f^1(x)=f(x), f^{n+1}(x)=f(f^n(x))\,(n=1,2,3,\cdots)$이라 할 때, $f^{2010}(2)+f^{2011}(3)$의 값을 구하시오.

2. 다음 치환을 사이클의 곱으로 표시하고, 다시 호환의 곱으로 표시하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,3\,4 \end{pmatrix}$

3. $\sigma=(1\,3)(2\,4\,5)$, $\tau=(1\,2\,5\,3\,4)$일 때 $\tau^{-1}\sigma\tau$를 구하시오.

읽기 자료

치환(permutation)

치환에 관한 최초의 연구 기록 중 하나는 18세기 이전의 어느 때에 이름 모를 유태인이 쓴 『Sefer Yetsirah(창조에 관한 책)』이다. 그는 얼마나 많은 방법으로 히브리 알파벳 문자를 배열할 수 있는지에 관심이 있었다. 어떤 면에서 그 질문은 수수께끼 같은 것이었다. 유태인들은 그 문자들이 마력을 가지고 있기 때문에 적절히 배열하면 자연의 힘을 정복할 수 있다고 믿었다. 『Sefer Yetsirah』의 실제적 내용은 매우 빈약해서 두 문자가 2개의 단어를 만들고 세 문자가 6개의 단어를, 네 문자가 24개의 단어를, 다섯 문자가 120개의 단어를, 여섯 문자가 720개의 단어를, 일곱 문자가 5,040개의 단어를 만든다고 쓰여 있다. 재미있게도 알파벳 문자를 배열하는 것을 세는 이 생각은 8세기와 9세기의 이슬람 수학에도 나타난다. 13세기까지 이슬람 문화와 히브리 문화 모두에게 치환에 대한 추상적인 생각은 뿌리를 내려서 현 모로코의 마라케쉬 태생의 수학자 Abu-l-'Abbas ibn-Banna(1256~1321)와 프랑스의 율법학자이자 철학자, 수학자인 Levi ben Gerson이 계산 조합에 대한 다양한 결과를 증명하고 n개의 원소를 가진 어떤 집합의 치환의 수가 $n!$임을 정확하게 증명할 수 있었다.

하지만 Levi와 그의 스승들은 주어진 유한집합을 단순히 배열하기 위한 치환에 관심이 있었다. 다항 방정식의 해에 관한 연구 덕분에 18세기 후반에 Lagrange와 몇몇은 치환을 주어진 방정식의 해들의 집합인 유한집합에서 자기 자신으로 대응하는 함수로 생각하게 되었다. 또한, Augustin-Louis Cauchy(1789~1857)는 치환이론의 기본 정리들을 상세히 발전시켰다.

-「현대 대수학 (JOHN B.FRALEIGH)」중에서

<코시(Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)>

예시 답안

풀어보기 1

$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1$이므로

$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$이다. 같은 방법으로 $f^3(2)=2, f^3(3)=3$이므로 $f^3(x)=x$이다. 그러므로 $f^3=I$ (I는 항등함수)이므로

$f^{2010}(2)=(f^3)^{670}(2)=I(2)=2,\ f^{2011}(3)=f((f^3)^{670}(3))=f(I(3))=f(3)=1$이다.

따라서 $f^{2010}(2)+f^{2011}(3)=2+1=3$

풀어보기 2

(1) $(1\ 2)(3\ 4)$　　　　(2) $(1\ 2)(3\ 5\ 4)$

풀어보기 3

$\tau^{-1}=(4\ 3\ 5\ 2\ 1)$이므로 $\tau^{-1}\sigma\tau=(4\ 3\ 5\ 2\ 1)(1\ 3)(2\ 4\ 5)(1\ 2\ 5\ 3\ 4)=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$.

논제 1 [31]

1-1. $\sigma=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)=(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$

1-2. $\sigma^{-1}=(1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 6)$

논제 2

다음과 같이 정의된 치환

$$\sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\1\,3\,5\,6\,2\,7\,4\end{pmatrix}$$

를 사이클들의 곱으로 표현하면

$$\sigma=(235)(467)=(25)(23)(47)(46)$$

을 얻는다. 그런데 정리 2를 이용하여

$$(25)=(23)(35)(23)=(23)(34)(45)(34)(23)$$

$$(47)=(45)(57)(45)=(45)(56)(67)(56)(45)$$

$$(46)=(45)(56)(45)$$

31) 아주대(의학부) 예시답안

을 얻는다. 이것을 대입하면

$$\sigma=(23)(34)(45)(34)(23)(23)(45)(56)(67)(56)(45)(45)(56)(45)$$

임을 알 수 있다.

논제 3

항등치환이 m개의 호환 $t_1, t_2, ..., t_m$들의 곱으로 표시된다고 하자. 즉,

$$\epsilon=t_1 t_2 \cdots t_m.$$

호환 $t_2, ..., t_m$에 나타나는 임의의 수 x를 선택한다. x가 나타나는 마지막 호환을 $t_k=(xa)$라 하자. 즉, $t_{k+1}, ..., t_m$에는 x가 나타나지 않는다. 만약 $t_{k-1}=(xa)$이라면, t_{k-1}과 t_k는 서로 상쇄되어 ϵ은 $(m-2)$개의 호환의 곱으로 표시된다.

이제 $t_{k-1} \neq (xa)$이라 가정하면 다음 3가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) $t_{k-1}=(xb)$이고 $b \neq x, a$인 경우: $t_{k-1}t_k=(xb)(xa)=(xa)(ab)$이므로 x가 $(k-1)$번째 호환에 마지막으로 나타나게 할 수 있다.

(2) $t_{k-1}=(ca)$이고 $c \neq x, a$인 경우: $t_{k-1}t_k=(ca)(xa)=(xc)(ca)$이므로 x가 $(k-1)$번째 호환에 마지막으로 나타나게 할 수 있다.

(3) $t_{k-1}=(bc)$이고 $b \neq x, a$, $c \neq x, a$인 경우: $t_{k-1}t_k=(bc)(xa)=(xa)(bc)$이므로 x가 $(k-1)$번째 호환에 마지막으로 나타나게 할 수 있다.

따라서 (1), (2), (3)의 경우 위의 과정을 반복하면 x가 첫 번째 호환에 마지막으로 나타나게 할 수 있는데, 이것은 ϵ에 의해 x가 다른 수로 대응되므로 항등치환임에 모순이다. 이것으로 문제의 첫 번째 주장이 증명되었다.

만일 ϵ이 홀수 개의 호환들의 곱으로 표시되었다면, 앞에서 증명한 사실에 따라 ϵ은 하나의 호환이 되므로 모순이다.

논제 4

치환 σ가 홀수 개의 호환의 곱으로 그리고 짝수 개의 호환의 곱으로 표시될 수 있다고 가정한다. 이제 $\sigma=t_1 t_2 \cdots t_{2m}=s_1 s_2 \cdots s_{2n+1}$ (모든 t_i, s_j는 호환)으로 쓰자. 그러면

$$\epsilon=\sigma\sigma^{-1}=s_1 s_2 \cdots s_{2n+1} t_{2m} t_{2m-1} \cdots t_1$$

이 성립하여 ϵ이 홀수 개의 호환의 곱으로 표현되어 [논제 3]의 사실에 위배된다.

14 연세대학교 예시

✽ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

제 시 문

실수의 집합과 무한한 직선 위의 점들의 집합은 일대일대응이라 배웠다. 실수 0에 대응되는 임의의 기준점 o와 그 우측에 실수 1이 대응되는 다른 어떤 점 e를 정하고 선분 $\overline{oe}$의 길이를 단위거리로 하면 임의의 양의 실수 a는 기준점 o의 우측에 있고 거리가 a인 점에 대응되고, 임의의 음의 실수 a는 기준점 o의 좌측에 있고 거리가 $-a$인 점에 대응한 무한한 한 직선을 실선이라 부르자. 그러면 실수 간의 덧셈과 곱셈에 해당되는 연산을 실선 위의 점들 간에도 정의할 수 있을 것이다.

(가) R은 실수 0에 대응되는 기준점이 o이고 실수 1에 대응되는 점이 e인 실선이다.

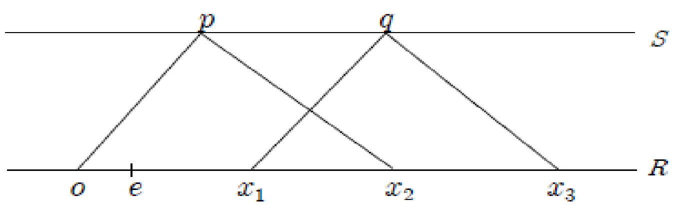
S는 실선 R과 같은 평면에 놓여 있고, R과 일치하지 않으며 평행인 보조 직선이다.

x_1과 x_2는 실선 R위의 임의의 두 점이다.

p는 S위의 임의의 한 점이다.

q는 선분 $\overline{op}$와 평행이며 점 x_1을 지나는 직선과 S의 교점이다.

x_3는 선분 $\overline{px_2}$와 평행이며 q를 지나는 직선과 실선 R의 교점이다.



* 위 그림은 x_1과 x_2가 모두 기준점 o 우측에 있는 예제임.

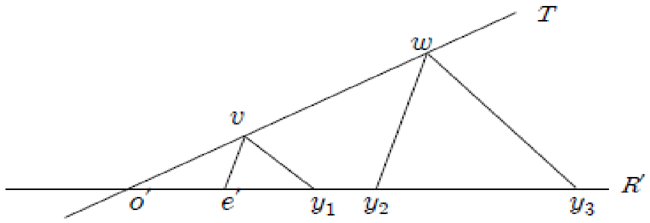
(나) R'은 실수 0에 대응되는 기준점이 o'이고 실수 1에 대응되는 점이 e'인 실선이다.

T는 실선 R'과 같은 평면에 놓여 있고, R'과 일치하지 않으며 점 o'을 지나는 임의의 보조 직선이다.

y_1과 y_2는 실선 R'위의 임의의 두 점이다.

v는 o'에 일치하지 않는 T위의 임의의 한 점이다.

w는 선분 $\overline{ve'}$과 평행이고 점 y_2을 지나는 직선과 T의 교점이다.
y_3는 선분 $\overline{vy_1}$와 평행이고 점 w를 지나는 직선과 실선 R'의 교점이다.



* 위 그림은 y_1과 y_2가 모두 기준점 o' 우측에 있는 예제임.

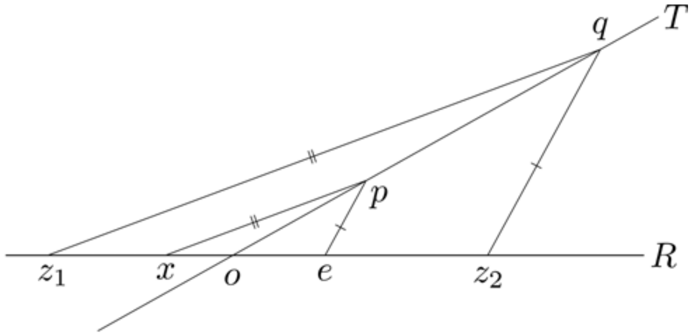
[1-1]

(1) 임의의 두 실수 a_1과 a_2가 각각 실선 R상의 두 점인 x_1과 x_2에 대응된다면, 점 x_3로 대응하는 실수 a_3를 찾고 그 이유를 설명하시오. 그리고 실수 a_3에 대응하는 점 x_3를 찾는 다른 방법을 그림으로 예를 들어 설명하시오. (7점)

(2) 임의의 두 실수 b_1과 b_2가 각각 실선 R'상의 두 점인 y_1과 y_2에 대응된다면, 점 y_3로 대응하는 실수 b_3를 찾고 그 이유를 설명하시오. 그리고 실수 b_3에 대응하는 점 y_3를 찾는 다른 방법을 그림으로 예를 들어 설명하시오. (10점)

[1-2] 함수 f는 실수의 집합을 정의역과 공역으로 가지고 미분가능하며 증가하며 $f'(0)=1$이다. 정의역과 공역을 각각 예제에 정의한 실선 R과 R'에 일대일 대응을 시키면, 이 함수는 실선 R상의 점 o를 실선 R'상의 점 e'로 보내고, (가)에서 정의된 실선 R상의 점 x_1, x_2, x_3를 각각 (나)에서 정의된 실선 R'상의 점 y_1, y_2, y_3로 보낸다. 적분 $\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt$ 값에 해당되는 점을 실선 R'상에 작도하시오. (20점)

[1-3] 제1항 c_1과 제2항 c_2가 각각 0이 아닌 어떤 실수이며, 점화식 $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$를 만족하는 어떤 수열이 있다. 그리고 위 수열은 어떤 자연수 $k > 4$에서 처음으로 $c_k = 0$을 만족한다고 가정하자. 실수 c_1과 c_2를 각각 한 실선 위의 두 점 z_1과 z_2에 대응한 아래의 그림에서 점 p를 지나고 선분 $\overline{qz_1}$과 평행한 직선과 실선의 교점 x에 대응되는 실수가 정수가 아님을 설명하시오. (23점)



제시문 분석

1. 제시문 (가)

평행선을 이용하여 두 실수 x_1과 x_2의 합 $x_1 + x_2$를 작도하는 방법을 설명하고 있다.

2. 제시문 (나)

삼각형의 닮음 조건을 이용하여 두 실수 y_1과 y_2의 곱 $y_1 y_2$를 작도할 수 있음을 설명하고 있다.

논제 분석

[논제 1, 2] 평행사변형의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 두 실수의 합과 곱을 찾을 수 있는가?

'평행사변형의 두 대변의 길이는 같다.'는 성질을 이용하여 x_3로 대응하는 실수 a_3의 의미를 설명할 수 있다. 같은 방법으로 삼각형의 닮음을 이용하여 실수 b_3에 대응하는 점 y_3의 의미를 찾을 수 있다. 다른 작도 방법은 여러 가지가 나올 수 있다.

[논제 3] 제시문의 내용을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

논제 1을 활용하여 함수 $f(x)$는 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족함을 알 수 있고, '이 함수는 실선 R상의 점 o를 실선 R'상의 점 e'로 보내고…' 라는 의미는 $f(0)=1$을 의미하므로 이런 성질을 만족하는 함수는 지수함수의 꼴이다.

배경지식 쌓기

1. 유클리드 작도

작도에서 자와 컴퍼스(유클리드적 도구)만 사용하는 근거는 무엇일까?

자와 컴퍼스만으로 작도를 하는 것은 유클리드의 원론의 다섯 가지 공준 중에서 작도와 관련된 다음 세 공준에서 그 근거를 찾아볼 수 있다.

> [공준 1] 한 점에서 또 다른 한 점으로 직선을 그릴 수 있다.
> [공준 2] 유한 직선은 무한히 연장시킬 수 있다.
> [공준 3] 임의의 점을 중심으로 임의의 반지름으로 원을 작도할 수 있다.

[공준 1]과 [공준 2]에서는 직선을 작도할 수 있다는 것을 의미하고, [공준 3]은 한 점을 중심으로 하고, 다른 한 점을 지나는 원을 그릴 수 있다는 것을 의미한다. 즉, 유클리드 원론에서 작도 문제의 해결에 사용하는 도구는 직선을 그을 수 있는 도구인 '자'와 원을 작도할 수 있는 '컴퍼스'만을 사용한다. 이때, [공준 1]과 [공준 2]에 길이에 대한 언급이 없기 때문에 사용한 자에는 눈금이 표시되지 않은, 즉 직선만을 그을 수 있는 자이다.

2. 작도 가능한 수

단위 길이가 1인 선분이 주어졌을 때, 길이가 a인 선분이 자와 컴퍼스만으로 작도 가능하다면 a를 작도 가능한 수라고 한다. 작도 가능한 수 a와 b가 주어질 때, 두 수 a, b에 대한 합 $a+b$, 차 $a-b\,(a>b)$, 곱 ab, 몫 $\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0)$, 제곱근 $\sqrt{a}$는 모두 작도가 가능하다. 즉, 작도 가능한 수의 사칙연산은 작도 가능하다. 예를 들어 황금비인 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$는 작도 가능한 수이다.

3. 피보나치 수열

$c_n+c_{n+1}=c_{n+2}$를 만족하면서 $c_n=0\,(n>2)$이 되는 항의 앞뒤를 살펴보자.

$\cdots$	$2p$	$-p$	p	0	p	p	$2p$	$3p$	$\cdots$
$\cdots$	c_{n-3}	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	c_{n+3}	c_{n+4}	$\cdots$

$p \neq 0$ 이면 $c_n = 0$ 이 되는 항은 하나밖에 없다. 이 경우 정수 값을 가지는 경우는 $\frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} = 1$, $\frac{c_n}{c_{n+1}} = 0$, $\frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} = -1$, $\frac{c_{n-3}}{c_{n-2}} = -2$ 의 4 가지이다. 즉, $\frac{c_{n-4}}{c_{n-3}}$ 는 정수가 아닌 유리수이다. (참조: 풀어보기 3)

풀어보기

1. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f가 모든 실수 x에 대해

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

을 만족할 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

2. 작도가능한 수 a, b에 대하여 $a+b$, $a-b(a>b)$, ab, $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ 및 $\sqrt{a}$ 를 작도하시오.

3. 피보나치수열의 이웃한 두 항은 서로소임을 증명하시오.

읽기 자료

3대 작도 문제32)

인류에게 가장 친숙한 도형은 직선과 원이다. 어느 집에나 직선을 그리는 자와, 원을 그리는 컴퍼스는 있을 것이다. 일부라도 반듯한 물건만 있으면 눈금은 없지만 자 대용으로 쓸 수 있고, 팽팽한 실에 연필을 매달면 남부럽지 않은(?) 컴퍼스를 얻을 수 있다. 이처럼 간단한 도구이므로 고대 사람들도 사용한 것은 자연스러운 일이다. 자와 컴퍼스는 단순한 도구이지만, 멋들어진 제도 기구의 힘을 빌지 않아도 상당히 많은 작도를 할 수 있다. 예를 들어 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형과 같은 정다각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있다. 눈금이 없는 자와 컴퍼스 두 개만으로 작도하는 것을 ‘기하학적 작도’나 ‘유클리드 작도’ 혹은 ‘플라톤 작도’ 등으로 부른다.

자와 컴퍼스만 갖고도 많은 작도를 할 수 있지만, 아무리 해도 작도가 안 되는 것이 나오기 시작했다. 예를 들어 정7각형은 도무지 두 도구만으로는 작도할 수 없었다. 자와 컴퍼스만으로 작도하는 문제 중 가장 유명한 것은 고대 그리스에서 전해져 왔다는 ‘삼대 작도 문제’다. 삼대 작도 문제란 자와 컴퍼스만으로 다음을 작도할 수 있느냐는 문제를 말한다.

1. 주어진 정육면체보다 부피가 두 배인 정육면체
2. 임의의 각을 삼등분한 각
3. 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형

물론 자와 컴퍼스 이외의 도구를 이용할 수 있다면 세 가지 모두 작도할 수 있다. 문제는 눈금 없는 자와 컴퍼스 두 개만으로 제한한다는 점이다. 무슨 일이나 그렇지만, 제한 조건이 까다로울수록 할 수 있는 일은 많지 않다. 단 두 개의 도구만으로 세상의 모든 것을 다 작도하려는 것은 만용에 가까운데, 그렇지 않았다면 원칙적으로 자와 컴퍼스 이외의 제도 기구는 불필요했을 것이다.

2000년이 넘는 세월 동안 많은 사람이 삼대 작도 문제를 시도했지만 실패했다. 하지만 ‘최선을 다했지만 안 되더라’는 것만으로는 불가능하다는 결론을 내릴 수는 없다. 작도하지 못하는 것으로 보았던 정17각형도 사실은 작도 할 수 있다는 것이 밝혀진다. 이런 이유 때문에, 어떻게 해도 안 된다는 것을 ‘증명’하기 전까지는 불가능하다는 말을 함부로 할 수 없다. 짐작할 수 있듯이 불가능성을 증명하는 것은 쉽지 않은 경우가 많다. 삼대 작도 문제도 19세기에 와서야 기본 작도만으로는 작도가 ‘불가능’하다는 것이 증명되었다.

32) 출처; 네이버 캐스트, 오늘의 과학

예시 답안

풀어보기 1

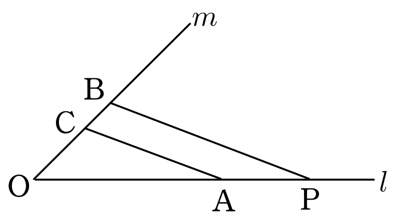
x에 $1-x$를 대입하여 정리하면 $(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$ 이 되고, 주어진 식에서 $f(1-x)=2x-x^4-x^2 f(x)$이므로 이 식을 위에 대입하여 정리하면

$$\therefore f(x)=1-x^2$$

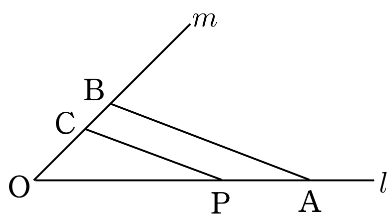
풀어보기 2

$a+b$, $a-b(a>b)$의 작도는 생략한다. 아래 그림에서

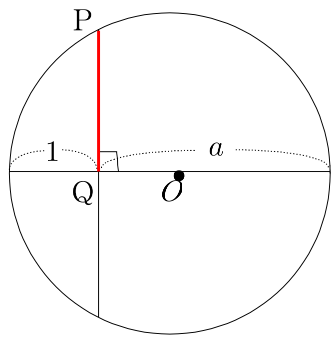
$\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=b$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$라 하면



$\overline{OP}=ab$



$\overline{OP}=\dfrac{a}{b}$



세 번째 그림에서 원과 비례를 이용하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a}$ 임이 명백하다.

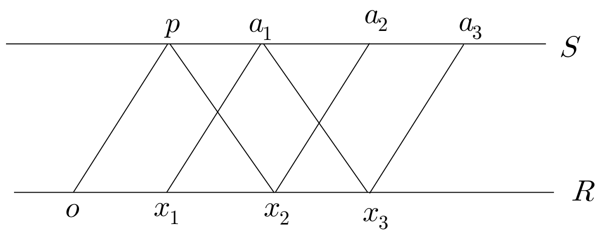
풀어보기 3

먼저 이웃하는 두 수가 최대공약수 $d\,(d>1)$를 가진다고 가정하자.

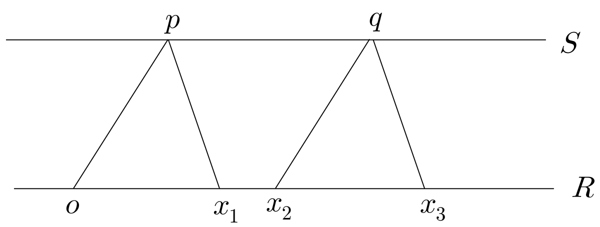
즉, $\gcd(a_{n+1}, a_n)=d$가 된다. 그런데 최대공약수의 성질에서 $\gcd(a_{n+1}-a_n, a_n)=d$ 이고 이것은 $\gcd(a_{n-1}, a_n)=d$를 의미한다. 이와 같은 방법을 계속 적용하면 a_{n-2}, a_{n-3}, $a_{n-4}\cdots$도 최대공약수 d를 가지게 되어 결국은 $a_1=1$에 이르게 되어 최대공약수가 1보다 크다는 사실에 모순이 된다.

논제 1-1

(1) o를 지나고 $\overline{x_1a_1}$에 평행한 직선과 S와 교점을 p라 하자. a_1을 지나면서 $\overline{px_2}$에 평행한 직선이 R과 만나는 점이 x_1과 x_2의 합 x_3이므로 x_3를 지나며 $\overline{x_2a_2}$에 평행한 직선이 S와 만나는 점이 a_3가 된다.

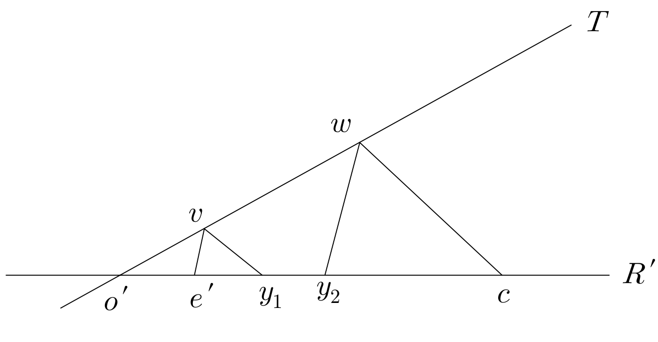


다른 방법은 다음그림을 생각할 수 있다.



단, 위 그림에서 $\overline{op}//\overline{x_2q}$, $\overline{px_1}//\overline{x_3q}$ 이다.

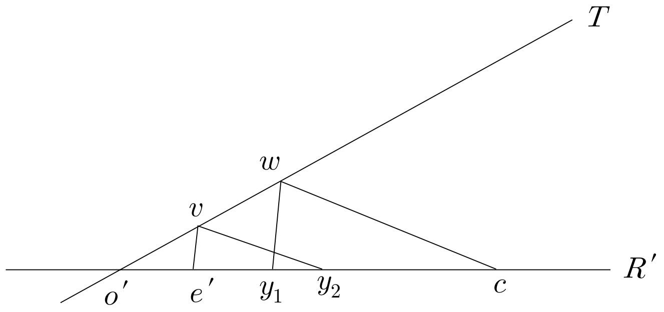
(2) 단위길이 e'에 대응되는 점을 v라 하자. y_2을 지나면서 $\overline{e'v}$에 평행한 직선이 T과 만나는 점을 w, w를 지나며 $\overline{vy_1}$ 이 직선 R'와 만나는 점을 c라 하면 이 점 c가 $y_3=y_1y_2$를 나타내는 점이다.



왜냐하면 삼각형의 닮음에 의하여 $v:\omega=e':y_2=y_1:c$ 이므로 $ce'=y_1y_2$ 이다. 즉 $c=y_1y_2$ 이다.

다른 방법은 다음 그림을 생각할 수 있다.

단, 아래 그림에서 $\overline{e'v}//\overline{y_1w}$, $\overline{vy_2}//\overline{wc}$ 이다.



논제 1-2

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$ 이고, $x_1+x_2=x_3$, $y_1y_2=y_3$ 이므로

$$f(x_1+x_2)=f(x_3)=y_3=y_1y_2=f(x_1)f(x_2)$$

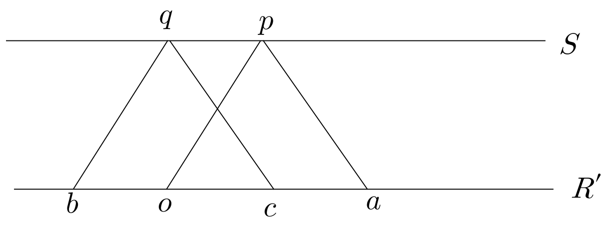
가 된다. 또한, $f(x)$는 미분가능하고 $f'(0)=1$ 이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)f'(0)=f(x)$$

이다. 따라서, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$ 이고 양변을 x 에 대하여 적분하면 $\ln|f(x)|=x+C$ 이므로 $f(x)=e^{x+C}$ 가 된다. 그런데 논제에서 $f(0)=1$ 이라 하였으므로 $C=0$ 즉, $f(x)=e^x$ 이다.

$f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$라 하면 $\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}f(t)\,dt=\int_{a_1}^{a_2}e^t\,dt=e^{a_2}-e^{a_1}=b_2-b_1$

아래 그림에서처럼 R'와 평행인 보조직선 S를 그어 실수 0에 대응되는 점을 p라 하고, e^{a_2}, $-e^{a_1}$ 에 대응되는 점을 각각 a와 b라 하자. b를 지나고 $\overline{op}$ 에 평행한 직선이 S와 만나는 점을 q, q를 지나고 $\overline{pa}$에 평행한 직선이 R'와 만나는 점을 c라 하면 이 c점이 $e^{a_2}-e^{a_1}$을 나타내는 점이다.



(다른 풀이)

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$ 이고, $x_1+x_2=x_3$, $y_1y_2=y_3$ 이므로

$$f(x_1+x_2)=f(x_3)=y_3=y_1y_2=f(x_1)f(x_2)$$

가 된다. 또한, $f(x)$는 미분가능하고 $f'(0)=1$ 이므로

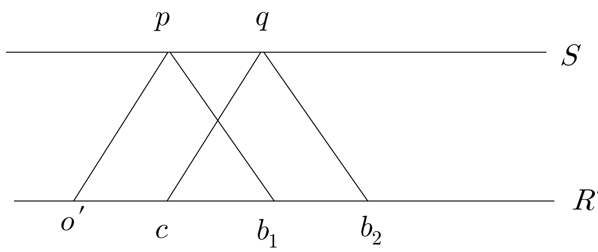
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)f'(0)=f(x)$$

이다.

(i) $a_1<a_2$ 일 때, $f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$ 라 두면 f는 증가함수이므로 $b_1<b_2$ 이다. 따라서

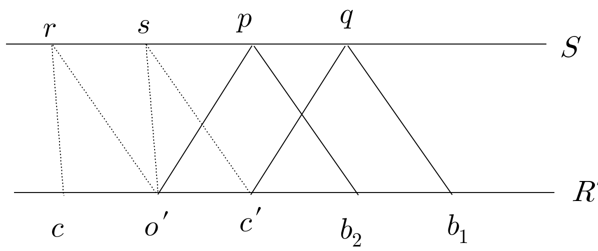
$$\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt=\int_{a_1}^{a_2} f'(t)\,dt=f(a_2)-f(a_1)=b_2-b_1$$

이다. 아래 그림에서처럼 R'과 평행인 보조직선 S를 그어 기준점 o'에 대응되는 점을 p라 하고, b_2를 지나고 $\overline{pb_1}$ 에 평행한 직선이 S와 만나는 점을 q, q를 지나고 $\overline{o'p}$에 평행한 직선이 R'와 만나는 점을 c라 두자.



제시문 (가)에 의해 $c+b_1=b_2$ 이다. 그러므로 $c=b_2-b_1$ 이다.

(ii) $a_1>a_2$ 이면 $b_1>b_2$ 이고, 이때 $c'=b_1-b_2$ 라 두면 아래 그림과 같다.



$\overline{c's}//\overline{o'r}$,$\overline{o's}//\overline{cr}$ 이 되게 c를 작도하면 $c=-c'=-(b_1-b_2)=b_2-b_1$ 이다.

논제 1-3

제시문 (나)와 논제의 그림을 참조하면 $xc_2=c_1$ 이므로 $c_2=\dfrac{c_1}{x}$ 이다. 논제에서 $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$를 만족한다고 하였으므로

$$c_2=\frac{c_1}{x}$$

$$c_3=c_1+c_2=\left(1+\frac{1}{x}\right)c_1$$

$$c_4 = c_2 + c_3 = \left(1 + \frac{2}{x}\right)c_1$$

$$c_5 = c_3 + c_4 = \left(2 + \frac{3}{x}\right)c_1$$

$$c_6 = c_4 + c_5 = \left(3 + \frac{5}{x}\right)c_1$$

$$\vdots$$

여기서 $k > 4$에서 처음으로 $c_k = 0$를 만족하려면 $c_1 \neq 0$ 이므로 $k > 4$일 때 위 식의 괄호안의 값이 0 이 되어야 한다. 즉, $a_n + \frac{a_{n+1}}{x} = 0 \quad (n \geq 3) \cdots ①$ 이 되어야 한다. (단, $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$, $a_1 = a_2 = 1$) 그러면 $x = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq 3)$이 되는데, 피보나치수열의 인접한 두 항은 서로소이므로 $x = -\frac{a_{n+1}}{a_n}$는 정수가 아닌 유리수이다.

(다른풀이 1)

논제의 그림에 의해 $x < 0, c_1 < 0$ 이고, 삼각형의 닮음에 의해

$(-x) : e = (-c_1) : c_2$, 즉 $c_2 x = c_1$ 이고, x 에 대응되는 실수는 $\frac{c_1}{c_2}$ 가 된다.

(배경지식 3)에 의해 $n > 4$ 에서 처음으로 0 이 나오면 $\frac{c_1}{c_2}$ 는 정수가 아닌 유리수이다.

(다른풀이 2)

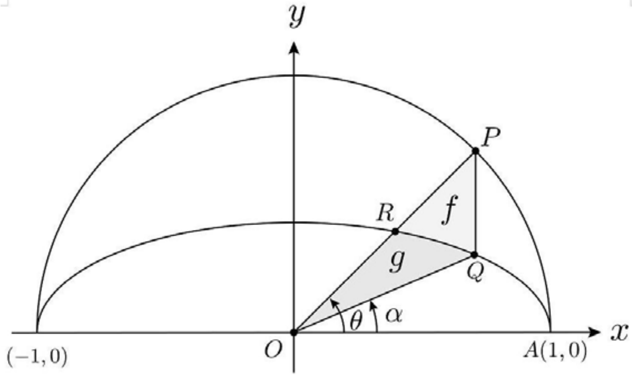
①에서 $a_{n+1} + a_n x = 0$ 이고 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 이므로 $x = -1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}$ 이다. 그런데 $0 < \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$ 이므로 $-2 < x < -1$ 이 되고 x 는 정수가 아니다.

15 연세대학교 수시

✽ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

제 시 문

(가) 단위원 $x^2+y^2=1$위를 점 $\mathrm{A}(1,0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 $(x(t),y(t))$라고 하자. 타원 $x^2+k^2y^2=1$(단, $k>1$인 실수)은 두 점 $(1,0)$, $(-1,0)$에서 단위원에 접한다. 점 P에서 x축에 내린 수선이 타원과 처음 만나는 점을 Q라고 하자.



(나) 점 P와 원점 O를 이은 선분이 타원과 만나는 점을 R이라 하자. 선분 OA와 선분 OP가 이루는 각을 θ, 선분 OA와 선분 OQ가 이루는 각을 α라고 하자. 선분 PQ, 선분 PR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 PQR의 넓이를 f, 선분 OQ, 선분 OR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 OQR의 넓이를 g라고 하자.

[논제 1-1] 점 $\mathrm{P}(x(t),y(t))$가 단위원 위의 점 $\mathrm{A}(1,0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 시각 t에 따라 일정한 속도로 돌고 있다. 선분 OA, 선분 OQ와 타원의 호 AQ로 둘러싸인 도형 OAQ의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $S(t)$의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{dS}{dt}$가 상수임을 논리적으로 설명하시오.

[논제 1-2] 각 α의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\alpha}{dt}$가 각 θ의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\theta}{dt}$와 같아지는 θ가 구간 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$에서 적어도 하나는 존재함을 논하고, 또한 이 때 α와 θ 사이의 관계식을 구하시오. $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$를 구하시오.

[논제 1-3] 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g}$를 구하시오.

제시문 분석

1. 제시문 (가)

좌표평면에서 $y \ge 0$인 영역에서 단위원 $x^2+y^2=1$과 타원 $x^2+k^2x^2=1$(단, $k>1$인 실수)이 두 점 $(1, 0)$, $(-1, 0)$에서 접하는 상황을 제시하고 있다.

2. 제시문 (나)

원점 O에서 원 위의 한 점 P, P에서 x축에 내린 수선과 타원이 만나는 점 Q, 선분 OP와 타원이 만나는 점을 R이라 할 때 나타나는 삼각형 모양의 도형 OPQ를 타원이 나누는 두 도형의 넓이 f, g에 대한 설명을 제시하고 있다.

논제 분석

[논제 1-1]

평면도형과 함수의 관계를 도형의 형태 변화와 미적분의 응용으로 찾아내는 문제이다. 기본적인 도형에 대한 수학적 추론을 통하여 함수들에 대한 이해를 묻는 문제이다. 고등학교 교육과정을 고려한다면 원과 타원의 관계를 일차변환을 이용하여 접근하거나 카발리에리의 원리를 이용하면 되는 논제이다.

[논제 1-2]

도형의 성질을 이용하여 함수에 대한 이해를 묻는 문제이다. 교과 과정에서 다루는 함수들에 대한 정확한 이해와 수학적 논증을 제시할 수 있는 능력을 측정하고자 한다. 구체적으로 말하면 논제 해결 과정에서 찾을 수 있는 연속 함수 $f(\theta)$에 대하여 중간값의 정리를 이용해

(i) $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}$인 곳이 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 안에 적어도 하나 존재함을 보이는 존재성 증명,

(ii) θ와 α 사이의 관계식을 구하는 과정,

iii) 극한값 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$를 구하는 과정

을 요구하는 논제로서 논제가 요구하는 내용을 논리적, 체계적으로 서술해야 한다.

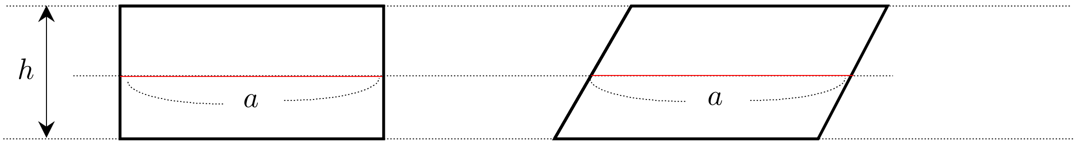
[논제 1-3]

극한에 대한 개념과 평면 도형에 대한 이해를 묻는 문제이다. 평면도형의 성질을 함수로 표현 할 수 있는 능력과 함수의 극한에 대한 이해를 측정하고자 한다. 논제 해결 과정에서 도형의 넓이 f, g의 상호관계를 깊이 이해하고 연관성을 논리적으로 파악하여 극한값을 구할 수 있어야 한다.

배경지식 쌓기

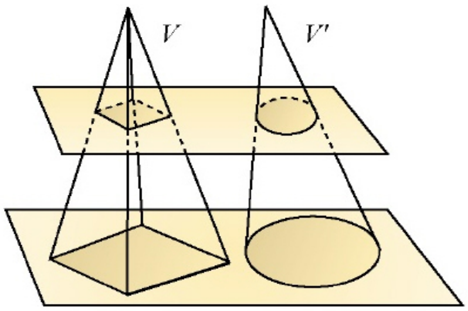
1. 카발리에리의 원리

(1) 두 개의 평면도형이 한 쌍의 평행선 사이에 끼어 있고 그 평행선들과 평행인 임의의 선으로 두 평면 도형을 잘랐을 때 생기는 두 선분의 길이가 항상 일정한 비를 가지면 두 평면도형의 넓이도 또한 그 비를 갖는다.



(두 도형은 넓이가 같다.)

(2) 두 개의 공간 도형이 한 쌍의 평행면 사이에 끼어 있고 그 평행면들과 평행인 임의의 면으로 그 두 공간 도형을 잘랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 공간 도형의 부피도 또한 그 비를 갖는다.



위 그림은 "밑면과 높이가 같은 두 개의 각뿔은 같은 부피를 갖는다."라는 말이다.

2. 일차변환

(1) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $k>1$ 인 경우: x 축의 방향으로 확대
$0<k<1$ 인 경우: x 축의 방향으로 축소

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $k>1$ 인 경우: y 축의 방향으로 확대
$0<k<1$ 인 경우: y 축의 방향으로 축소

3. 치환적분

구간 $[a,b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분 가능한 함수 $x=g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 구간 $[\alpha,\beta]$ 에서 연속이고 $a=g(\alpha), b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

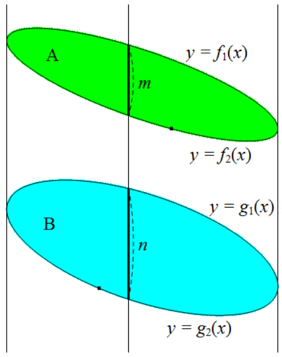
4. 중간값의 정리

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(t)$ 가 $f(a)<f(b)$ 를 만족할 때, 임의의 실수 $c \in (f(a), f(b))$ 를 택하면 $f(\alpha)=c$ 인 점 $\alpha \in (a, b)$ 가 존재한다.

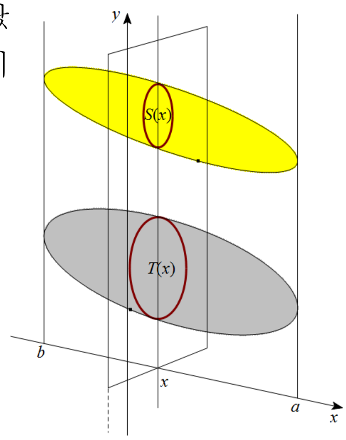
풀어보기

1. 현재의 적분법을 이용하여 다음의 카발리에리의 원리가 성립함을 설명하시오.

(1) 한 평면 위의 두 도형이 그림과 같이 y축에 평행한 임의의 직선을 잘라내는 선분의 길이가 언제나 $m:n$ 이면 이들의 넓이의 비는 $m:n$ 이다.



(2) 두 입체도형을 일정한 평면에 평행한 도형으로 잘랐을 때, 두 단면의 면적의 비가 언제나 $m:n$ 이면 이들의 도형의 부피의 비는 $m:n$ 이다.



2. 카발리에리의 원리를 이용하여 원 $x^2+y^2=a^2$ 과 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 사이의 넓이 관계에 대해서 논술하시오.

3. 1보다 큰 실수 a에 대하여 $f(a)=\displaystyle\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$라 할 때, $f(a^4)$과 같은 것은? (2007 대수능)

① $4f(a)$ ② $8f(a)$ ③ $12f(a)$ ④ $16f(a)$ ⑤ $20f(a)$

4. 실수전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k 라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (2010 대수능)

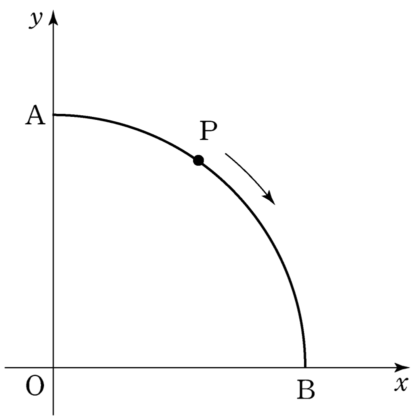
<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$ 이고 $g(0)=g(1)$ 이면 $k=0$ 이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$ 이고 $g(x)=\sin\pi x$ 이면 $k=0$ 이다

5. 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $90°$이고 반지름의 길이가 10인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 2의 일정한 속력으로 움직일 때, $\angle AOP=30°$가 되는 순간 점P의 y 좌표의 시간(초)에 대한 변화율은? (2007 평가원)



읽기 자료

여러 가지 변환[33)]

점이나 선 또는 도형과 같은 기하학적인 도형은 일차변환, 대칭변환 등과 같은 여러 가지 기하학적 변환에 의해서 다시 기하학적 도형으로 옮겨진다. 여기서는 일정한 방향으로 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 비추었을 때 처음 도형과 스크린에 생긴 도형의 관계를 알아본다.

1. 닮음 변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생기는 도형으로 처음 평면에 있는 도형과 크기는 다르지만 모양은 같다. 이 경우 두 도형을 닮음인 도형이라 하고 이러한 변환을 닮음변환이라고 한다. 닮음변환에서는 각의 크기는 불변이지만 변의 길이는 일정한 비율로 새로 만들어진다. 축도나 확대도를 만드는 것은 하나의 도형에 닮음변환을 행하는 것이다.

2. 사영변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로의 변환을 사영변환이라고 한다. 이 경우 정삼각형은 일반 삼각형으로 확대된다.

3. 합동변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 두 도형은 크기와 모양이 똑같다. 이와 같은 변환을 합동변환이라고 한다.

4. 아핀(Affine)변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 도형과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 모눈은 일정한 비율로 확대되어 평행사변형이 되고 처음의 직각삼각형은 일반 삼각형이 된다. 이와 같은 변환을 아핀변환이라고 한다.

5. 위상변환[34)]

한 점에서 발사되거나 또는 평행인 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 성질이 다른 면(곡면 등)에 비추었을 때 생긴 도형을 생각해 보자. 이 경우 생긴 도형과 처음 도형은 모양과 크기가 모두 처음 도형과 다르다.

---

33) 고등학교 수학과 문제해결을 위한 이론과 실제 (2000) 부산광역시 교육청
34) 일반적으로 어떤 도형을 늘이거나 줄이거나 구부리는 것은 가능하나 그 연결 상태는 변하지 않도록 하는 변환을 위상변환이라고 한다.

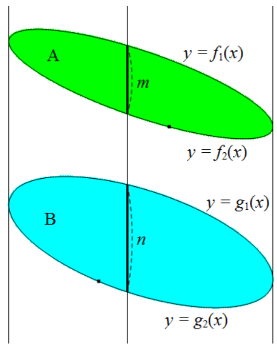
구 분	합동변환	닮음변환	아핀변환	사영변환	위상변환
점의 위치 관계	○	○	○	○	○
선분 → 선분	○ (길이도 같다)	○ (길이는 변함)	○	○	×
선분의 비	○	○	○ (같은 직선에 있을 때만)	×	×
각의 크기	○	○	○	×	×
평행 관계	○	○	○	×	×

(○ : 유지한다. × : 유지하지 않는다.)

예시 답안

풀어보기 1

(1) 두 도형의 넓이를 A, B라고 한다. (오른쪽 그림).



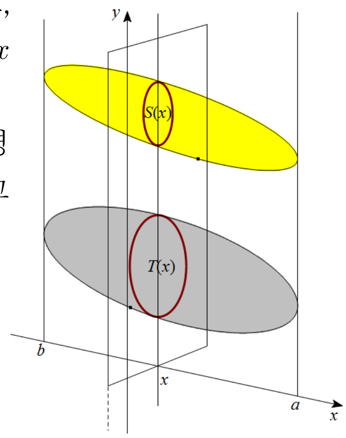
이 때,

$$f_1(x)-f_2(x) : g_1(x)-g_2(x) = m : n$$

$$\therefore\ f_1(x)-f_2(x) = \frac{m}{n}\{g_1(x)-g_2(x)\}$$

$$\therefore A = \int_a^b \{f_1(x)-f_2(x)\}dx = \frac{m}{n}\int_a^b \{g_1(x)-g_2(x)\}dx$$

(2) 일정한 평면에 수직인 한 직선을 x축이라 한다. 또, 일정한 평면에 평행이면서 입체를 끼고 있는 두 평면이 x축과 만나는 점의 좌표를 각각 $a, b(a<b)$ 라고 한다.



이제, x축 상의 좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면이 두 입체를 자른 단면의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라고 하면

$$S(x) : T(x) = m : n \quad \text{즉, } nS(x) = mT(x)$$

따라서,

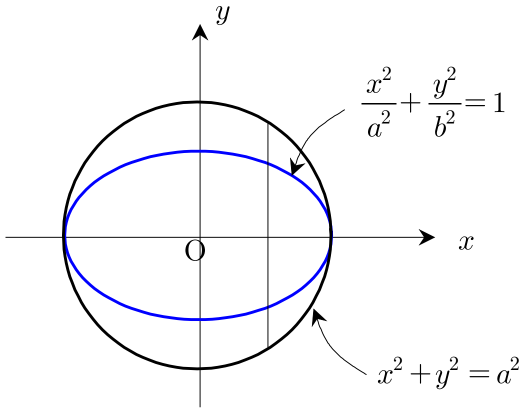
$$n\int_a^b S(x)\,dx = m\int_a^b T(x)\,dx$$

즉, $\int_a^b S(x)\,dx : \int_a^b T(x)\,dx = m : n$

풀어보기 2

원과 타원의 방정식을 y에 대해서 풀면 각각 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 이다. 그러므로 타원과 원에 대응하는 x축에 수직인 현들의 길이의 비는 $\frac{b}{a}$가 된다. 따라서 카발리에리의 원리에 의하여 타원과 원의 넓이도 같은 비를 가진다.

즉, (타원의 넓이)$=\frac{b}{a}\times$(원의 넓이)$=\pi ab$ 이다.



풀어보기 3

$\sqrt{\ln x}=t$ 로 놓으면 $\ln x=t^2$ 에서 $\frac{1}{x}dx=2tdt$ 또한 $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=\sqrt{\ln a}$ 이므로

$$f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_0^{\sqrt{\ln a}} 2t^2 dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}=\frac{2}{3}\ln a\sqrt{\ln a}$$

그러므로 $f(a^4)=\frac{2}{3}\ln a^4\sqrt{\ln a^4}=8\cdot\frac{2}{3}\ln a\sqrt{\ln a}=8f(a)$

풀어보기 4

ㄱ. $1-x=t$ 라 놓고 치환한다. (참)

ㄴ. 문제의 식에서 ㄱ의 식을 빼면

$$2k=\int_0^1\{f(x)g(1-x)-g(x)f(1-x)\}'\,dx=[f(x)g(1-x)-g(x)f(1-x)]_0^1$$
$$=2f(1)g(0)-2g(1)g(0)=0$$

이므로 $k=0$ 이다. (참)

ㄷ. $f(0)=0, g(0)=0$ 이므로 ㄴ 에 의하여 $k=0$

풀어보기 5

$\angle \mathrm{AOP} = \frac{t}{5}$, $\angle \mathrm{BOP} = \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{5}$

점 $\mathrm{P}(10\cos\theta, 10\sin\theta)$ 이므로 $y = 10\sin\theta = 10\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{5}) = 10\cos\frac{t}{5}$

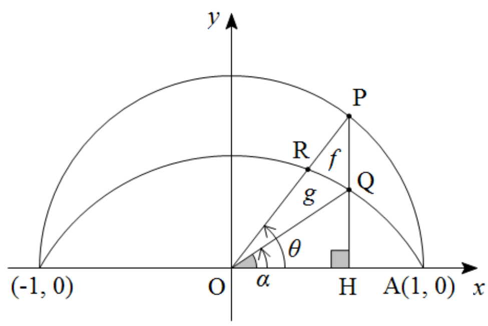
$\therefore \frac{dy}{dt} = -2\sin\frac{t}{5}$

$\angle \mathrm{AOP} = 30^\circ$, $\angle \mathrm{BOP} = \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $\because \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{5} = \frac{\pi}{3}$ $\therefore t = \frac{5}{6}\pi$

$\because \frac{dy}{dt} = -2\sin\frac{\pi}{6} = -1$

논제 1-1

<그림 1>과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 타원 $x^2+k^2y^2=1$에 대해 원 위의 점 P가 시각 t에 대해 반시계 방향으로 원 위를 움직이므로 원점 O에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하자. 원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선이 타원과 1사분면에서 만나는 점을 Q, 그 수선의 발을 H, 선분 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 하자.



<그림 1>

이 때, 선분 OP, 선분 OA와 원의 호 PA로 둘러싸인 도형 POA의 넓이를 $S_1(t)$라 하자. 그러면 선분 OP는 일차변환 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$에 의해 선분 OQ로 이동되므로 도형 POA는 일차변환 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$에 의해 선분 OA, 선분 OQ와 타원의 호 AQ로 둘러싸인 도형 QOA으로 이동된다.

논제에서 주어진 도형 QOA의 넓이를 $S(t)$라 두면 $S(t)=\frac{1}{k}S_1(t)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\theta$인관계가 성립한다.

따라서 $\frac{d}{dt}S(t)=\frac{1}{2k}\cdot\frac{d\theta}{dt}$이고

문제의 조건에서 $\frac{d\theta}{dt}$가 일정하다고 하였으므로 $\frac{d}{dt}S(t)$는 일정하다.

[다른 풀이 1]

도형 POA의 넓이를 $S_1(t)$라 하면, $\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{k}\overline{\mathrm{PH}}$ 이므로 삼각형 QOH 의 넓이는 삼각형 POH 의 넓이의 $\frac{1}{k}$ 이고, 카발리에리의 원리에 의해 도형 QOA 의 넓이는 도형 POA 의 넓이의 $\frac{1}{k}$ 이다. 따라서

$$S(t)=\frac{1}{k}S_1(t)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\theta$$

이다. 양변을 t 에 대해 미분하면 $\frac{d}{dt}S(t)=\frac{1}{2k}\cdot\frac{d\theta}{dt}$이고 $\frac{d\theta}{dt}$가 일정하므로 $\frac{d}{dt}S(t)$는 일정하다.

[다른 풀이 2]

$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 $\mathrm{Q}\left(\cos\theta, \frac{1}{k}\sin\theta\right)$이다. 따라서 구하려는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2k}+\frac{1}{k}\int_{\cos\theta}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이다. 여기서 $x=\cos\beta$라 두면 $\sqrt{1-x^2}=\sin\beta$ 이고 $dx=-\sin\beta d\beta$ 이다. 또 $x=\cos\theta$일 때, $\beta=\theta$이고 $x=1$일 때 $\beta=0$이므로

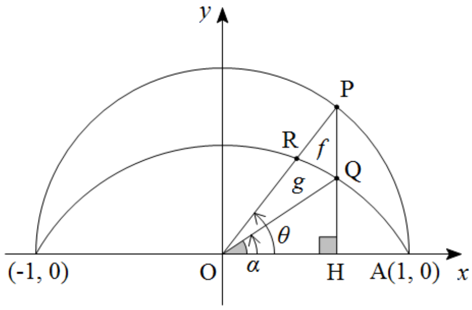
$$\begin{aligned} S(\theta)&=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2k}-\frac{1}{k}\int_{\theta}^{0}\sin^2\beta d\beta=\frac{\sin2\theta}{4k}+\frac{1}{k}\int_{0}^{\theta}\frac{1-\cos2\beta}{2}d\beta \\ &=\frac{\sin2\theta}{4k}+\frac{1}{k}\left[\frac{\beta}{2}-\frac{\sin2\beta}{4}\right]_0^{\theta}=\frac{\theta}{2k} \end{aligned}$$

이다. 그런데 속도가 일정하므로 $\theta=\lambda t$ (λ는 상수) 이고 $S(t)=\frac{\lambda t}{2k}$ 이다.

따라서 $\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\lambda}{2k}$ (일정)

논제 1-2

(i) <그림 1>에서 $\tan\alpha=\dfrac{\overline{QH}}{\overline{OH}}$, $\tan\theta=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$이고 $\overline{QH}=\dfrac{1}{k}\overline{PH}$이므로 $\tan\alpha=\dfrac{1}{k}\tan\theta$ 이다. 이 식의 양 변을 t에 대해 미분하면



<그림 1>

$\sec^2\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{k}\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}$를 얻는다.

여기서 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{d\alpha}{dt}$이면 $\sec^2\alpha=\dfrac{1}{k}\sec^2\theta$이다.

$f(\theta)=\dfrac{\sec^2\alpha}{\sec^2\theta}=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{k^2}\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{k^2+\tan^2\theta}{k^2+k^2\tan^2\theta}$라 하면 이는 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$에서 연속이고 $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{k^2}$이며 $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k}<1$이다. 따라서 중간값 정리에 의하여 $f(\theta)=\dfrac{1}{k}$인 θ가 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다. 이때 $\dfrac{k^2+\tan^2\theta}{k^2+k^2\tan^2\theta}=\dfrac{1}{k}$에서 $\tan\theta=\sqrt{k}$를 얻는다. 그러면 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$이므로 $\tan\theta\cdot\tan\alpha=1$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$$(\text{ii})\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\frac{\pi}{2}-\alpha}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\overline{OQ}=\frac{1}{k}$$

[다른 풀이]

(i) $\triangle$OQH 에서 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\theta}{k\cos\theta}=\dfrac{\tan\theta}{k}$ 이므로 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan\theta}{k}\right)$이다. 양변을 t에 관해 미분하면

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\frac{1}{k}\sec^2\theta}{1+\frac{1}{k^2}\tan^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

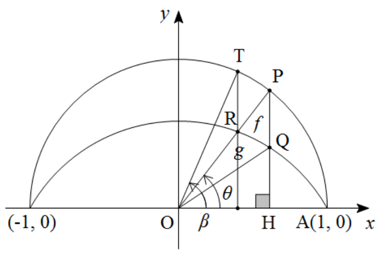
이다. 여기서 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}$ 이면 $1+\frac{1}{k^2}\tan^2\theta=\frac{1}{k}\sec^2\theta$ 이고

이것을 정리하면 $\left(\frac{1}{k}-1\right)\tan^2\theta=1-k$ 이므로 $\tan^2\theta=k$, 즉 $\tan\theta=\sqrt{k}$ 이다. 이것을 $k\tan\alpha=\tan\theta$ 에 대입하면 $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 가 되므로 θ와 α 사이의 관계는 $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$ 이다.

논제 1-3

아래 <그림 2>와 같이 선분 OP가 타원과 만나는 점을 R, 점 R에서 x축에 그은 수선이 원과 만나는 점을 T, $\angle TOA=\beta$라 하면, [논제 1-2]에 의하여

$\tan\theta=\frac{1}{k}\tan\beta$이다.



<그림 2>

$f+g$는 삼각형 OPQ의 넓이이므로 $\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$이다.

$\overline{OT}$ 은 일차변환 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{k}\end{pmatrix}$에 의해 $\overline{OR}$ 로 이동되고 $\overline{OP}$ 은 일차변환 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{k}\end{pmatrix}$에 의해 $\overline{OQ}$ 로 이동된다. 그러므로 부채꼴 OTP는 일차변환 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{k}\end{pmatrix}$에 의해 도형 g 로 이동된다. g는 부채꼴 OTP의 넓이의 $\frac{1}{k}$이므로

$$g=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\beta-\theta)\cdots ㉠$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f+g}{g}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(k-1)\sin\theta\cdot\cos\theta}{\beta-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(k-1)\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin(\beta-\theta)}\cdot\frac{\sin(\beta-\theta)}{\beta-\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sin\beta\cos\theta - \cos\beta\sin\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\sin\theta}{\sin\beta - \cos\beta\tan\theta}$$

이다. 이 식에 $\tan\theta = \frac{1}{k}\tan\beta$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\sin\theta}{\sin\beta - \cos\beta\tan\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\sin\theta}{\sin\beta - \frac{1}{k}\sin\beta} = \frac{k-1}{1-\frac{1}{k}} = k$$

그러므로 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = k-1$이다.

[㉠의 다른 풀이]

g는 (도형 AOB의 넓이)－(도형 AOQ의 넓이)를 계산하면 된다. 부채꼴 $\mathrm{AOR} = \frac{1}{2}\beta$ 이므로 (논제1)에 의해 도형 $\mathrm{AOB} = \frac{1}{2k}\beta$ 이고, 마찬가지로 부채꼴 $\mathrm{AOP} = \frac{1}{2}\theta$ 이므로 도형 $\mathrm{AOQ} = \frac{1}{2k}\theta$ 이다. 그러므로 $g = \frac{1}{2k}(\beta - \theta)$ 이다.

MEMO

16 인하대학교 모의

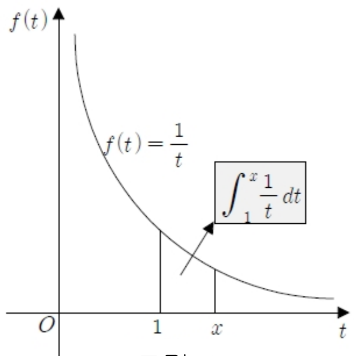
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 양의 실수 x 에 대하여 자연로그함수 $\ln x$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \ (x > 0)$$

$x > 1$ 일 때 $\ln x$ 는 <그림 1>과 같이 구간 $[1, x]$ 에서 함수 $f(t) = \frac{1}{t}$ 의 그래프와 t-축 사이의 영역의 넓이를 뜻한다. 한편, $0 < x < 1$ 이면 $\ln x = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ 는 구간 $[x, 1]$ 에서 함수 $f(t) = \frac{1}{t}$ 의 그래프와 t-축 사이의 영역의 넓이에 마이너스(-) 부호를 붙인 값과 같다. 이로부터 $x > 1$ 이면 $\ln x > 0$ 이고, $0 < x < 1$ 이면 $\ln x < 0$ 임을 알 수 있다. 또, $\ln 1 = 0$ 임은 당연하다.



<그림 1>

(나) 함수의 그래프 아래의 넓이와 미분의 관계를 함수 $f(t) = 5 - t^2$ 의 예를 통해 알아보자. <그림 2>와 같이 임의의 수 $x\,(> a)$ 에 대해, a 에서 x 까지 $f(t)$ 의 그래프 아래의 넓이를 $S(x)$ 라 하자. 이때 x 의 증분 $\Delta x\,(> 0)$ 에 대한 $S(x)$ 의 증분을 ΔS 라 하면 $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ 이다. 그런데 <그림 2>에서 구간 $[x, x + \Delta x]$ 사이의 빗금 친 부분은 밑변의 길이가 Δx, 높이가 $f(x)$ 인 직사각형에 포함되고, 높이가 $f(x + \Delta x)$ 인 직사각형을 포함하므로 부등식

$$(5 - (x + \Delta x)^2)\Delta x < \Delta S < (5 - x^2)\Delta x$$

이 성립한다. 이 부등식의 각 항을 Δx 로 나누면

$$(5 - (x + \Delta x)^2) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (5 - x^2)$$

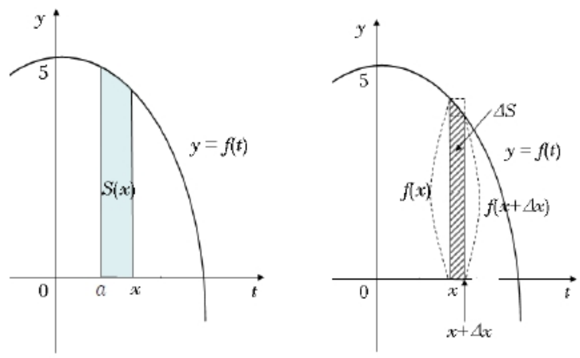
이고, 극한 $\lim_{\Delta x \to 0}(5-(x+\Delta x)^2)=5-x^2$ 으로부터

$$\frac{d}{dx}S(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=5-x^2=f(x)$$

이 된다. 즉

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

이다.



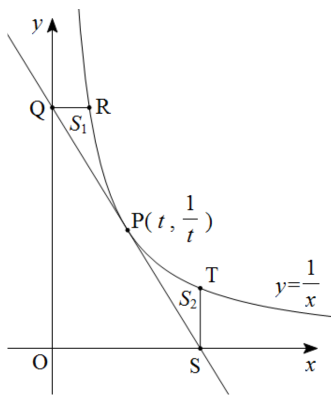
<그림 2> 정적분과 미분의 관계

[문제 1] 제시문 (가)에서 정의한 자연로그함수 $\ln x$ $(x>0)$ 에 대하여 $x \neq 1$ 일 때, 미분공식

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

을 제시문 (나)에서 설명한 방법을 사용하여 유도하고, 정적분 $\int_1^2 \frac{1}{x^2+3x}dx$ 의 값을 구하시오.

[문제 2] 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{t}\right)$ 에서 접선이 x-축, y-축과 만나는 점을 각각 S, Q 라 하고, 점 S 에서 x-축에 수직인 직선과 점 Q 에서 y-축에 수직인 직선이 함수 $y=\frac{1}{x}$ 과 만나는 점을 각각 T, R 이라 하자. 그리고 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ 을 잇는 선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1 이라 하고, $\mathrm{P}, \mathrm{S}, \mathrm{T}$ 를 잇는 선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1=S_2$ 임을 보이시오.



제시문 분석

1. 제시문 (가)

x 의 구간에 따라 자연로그함수 $\ln x$ 를 정적분으로 정의하고 있다.

2. 제시문 (나)

예를 이용하여 정적분과 미분의 관계, 즉 미적분학의 기본정리를 증명하고 있다.

논제 분석

[문제 1] (나)의 증명을 이용하여 자연로그의 미분을 증명하고, 그 결과를 이용하여 분수함수의 정적분을 계산할 수 있는가?

(나)의 설명처럼 $x>1$ 과 $0<x<1$ 의 구간으로 나누어 ΔS 의 범위를 구하고, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x}$ 을 계산하여 자연로그함수 $\ln x$ 의 도함수가 $\dfrac{1}{x}$ 임을 증명한다. 또한 그 결과를 활용하면 분모가 일차식이고 분자가 상수인 분수함수의 정적분은 자연로그함수의 꼴이 됨을 알 수 있다.

[문제 2] S_1 과 S_2 를 정적분을 이용하여 계산할 수 있는가?

$\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하고 S_1 과 S_2 를 적당한 영역으로 나누어 정적분과 다각형의 넓이 공식을 이용하면 S_1 과 S_2 의 넓이를 계산할 수 있다.

배경지식 쌓기

1. 부분분수

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

2. 접선의 방정식

$y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식

$$y=f'(x)(x-a)+f(a)$$

3. 함수의 극한의 대소관계

$f(x)<g(x)<h(x)$ 이고, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\alpha$ 이면 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha$ 이다.

풀어보기

1.[35] 다음 함수를 미분하시오.

$$y = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$$

2. 다음 정적분의 값을 구하시오.

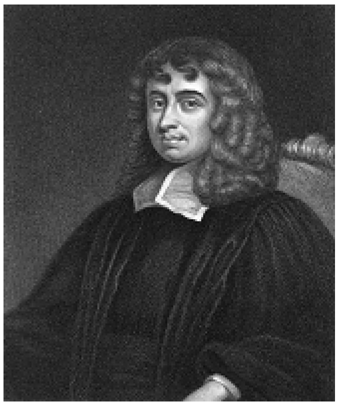
$$\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx$$

3.[36] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $xf(x) = 2x + \int_1^x f(t)dt$ 를 만족시킬 때, $f(e)$ 의 값을 구하시오.

35) 양승갑 외 8명. 미분과 적분, (주)금성출판사, 2002
36) 황병준 외 8명. 쎈 적분과통계,. 좋은책 신사고, 2010

읽기 자료

미분적분학의 기본정리[37)]


<그림 4> Isaac Barrow

미적분학의 기본정리는 적절하게 붙여진 명칭이다. 왜냐하면 그것은 미분적분학의 두 분야, 미분학과 적분학 사이에 연관성을 보여주기 때문이다. 미분학은 접선의 문제에서 시작되었고 반면에 적분학은 별로 관련이 없는 듯한 문제인 면적문제로부터 시작되었다. 케임브리지대학교의 뉴턴의 스승인 배로(Isaac Barrow, 1630~1677) 교수는 이 두 문제들 사이에 실제로 밀접한 관계가 있음을 발견하였다. 실제로 그는 미분법과 적분법이 서로 역과정임을 밝혔다. 미분적분학의 기본정리는 도함수와 적분사이에 명백한 역관계가 있음을 보여주고 있다. 뉴턴과 라이프니츠는 이러한 관계를 발전시키고 그것을 이용하여 미분적분학을 체계적인 수학적 방법으로 발전시켰다. 그들은 합의 극한으로 면적과 적분을 계산하지 않고, 미분적분학의 기본정리를 이용하여 면적과 적분을 매우 쉽게 계산할 수 있음을 알았다.

1. 미분적분학의 기본정리 1

만일 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이면,

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt\,,\ a\le x\le b$$

에 의하여 정의된 함수 g는 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간(a,b)에서 미분 가능하며, $g'(x)=f(x)$이다.

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$로 표기할 수 있으며, 만일 먼저 f를 **적분한 다음에 그 결과를 미분**하면 본래의 함수 f를 다시 얻는다는 사실을 의미한다.

2. 미분적분학의 기본정리 2

만일 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 F는 f의 임의의 역도함수, 즉 $F'=f$이다.

37) James Stewart, 미분적분학, 청문각, 2009

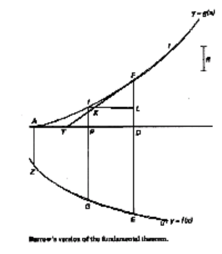
$F'(x) = f(x)$ 이므로 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ 로 표현될 수 있다. 이것은 한 함수 F를 택하여 먼저 그것을 **미분한 다음에 그 결과를 적분**한다면 본래의 함수 F, 그러나 $F(b) - F(a)$ 의 형태를 얻게 된다는 사실을 의미한다. 이는 $a \le x \le b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)$ 의 모든 값들이 관련되는 복잡한 과정(리만합의 극한)에 의하여 정의되는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 단지 두 점 a 와 b 에서 $F(x)$ 의 값을 구하면 계산된다는 사실은 매우 놀라운 일이다.

프랑스의 수학자 로베르발이 1635년 처음으로 사인함수와 코사인함수의 곡선 아래 영역의 면적을 계산하였을 때, 이 문제는 아주 정교한 기술을 요하는 매우 도전적인 문제였다. 1635년에는 극한을 계산하는 방법이 발견되지 않았기 때문에 로베르발에게는 이 계산이 매우 힘든 일이었다. 그러나 1660년대와 1670년대에 배로에 의하여 미적분학의 기본정리가 발견되고 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 탐구되면서 이는 매우 쉬운 문제가 되었다. 기본정리의 두 부분들은 미분법과 적분법이 역과정임을 의미한다. 기본정리의 두 부분들 중에서 하나는 다른 부분이 행하였던 과정을 반대로 행하는 것이다.

미분적분학의 기본정리는 미분적분학에서 가장 중요한 정리이며, 실제로 그것은 인간의 위대한 업적 중의 하나이다. 이 정리가 발견되기 전인 에우독소스와 아르키메데스의 시대로부터 갈릴레오와 페르마의 시대까지는 면적, 부피, 곡선의 길이를 구하는 문제들은 너무 힘들어서 천재들만이 도전할 수 있는 매우 어려운 문제였다. 그러나 지금은 뉴턴과 라이프니츠가 창안해 냈던 기본정리를 체계적으로 잘 배울 수 있기에 우리 모두 이런 어려운 문제도 쉽게 해결할 수 있다.


Archimedes


Newwton


Barrow's diagram

<그림 5>

그림 출처 <그림 4> http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Barrow
<그림 5> http://www.math.tamu.edu/~dallen/hollywood/calculus/calculus.htm

예시 답안

풀어보기 1

주어진 식의 양쪽에 절댓값을 취하면 $|y|=\left|\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}\right|$

양쪽에 자연로그를 취하면 $\ln|y|=\ln\left|\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}\right|=\ln|x|+\ln|x+1|-2\ln|x-1|$

이 식의 양쪽을 x 에 관하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{-3x-1}{x(x+1)(x-1)}$$

그러므로 $y'=y\cdot\dfrac{-3x-1}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{-3x-1}{(x-1)^3}$ 이다.

풀어보기 2

$$\int_1^3\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=[\ln x-\ln(x+1)]_1^3=\ln\frac{3}{2}$$

풀어보기 3

$xf(x)=2x+\displaystyle\int_1^x f(t)dt\cdots$ ㉠ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2+f(x)$ 이므로 $f'(x)=\dfrac{2}{x}$ 이다.

따라서 $f(x)=\displaystyle\int\frac{2}{x}dx=2\ln|x|+C\cdots$ ㉡ 이다. ㉠과 ㉡에서 $f(1)=C=2$ 이므로 $f(x)=2\ln|x|+2$ 이다. 그러므로 $f(e)=2+2=4$ 이다.

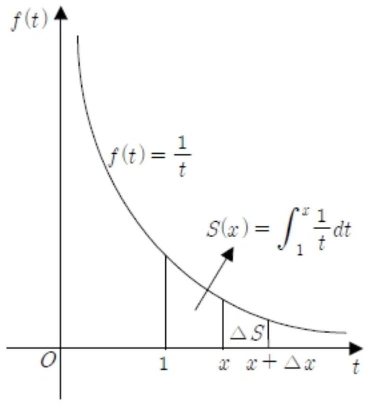
문 제 1 [38)]

먼저 $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$ 임을 보이자.

(ⅰ) $x>1$ 일 때, 그림과 같이 구간 $[1,x]$ 에서 함수 $f(t)=\dfrac{1}{t}$ 의 그래프와 t-축 사

38) 인하대 모의논술 해설

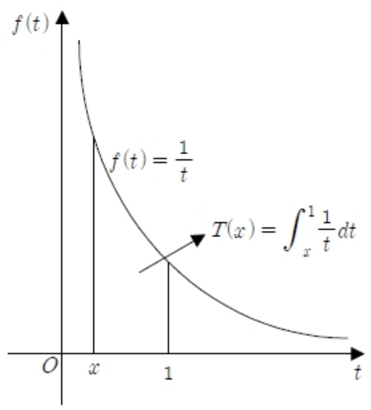
이의 넓이를 $S(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ 라 하자. x의 증분 $\Delta x(>0)$에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라 하면 아래 그림에서 $\frac{1}{x+\Delta x}\Delta x<\frac{\Delta S}{\Delta x}<\frac{1}{x}$ 이고, 극한 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x+\Delta x}=\frac{1}{x}$ 로부터 $\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}dt=\frac{1}{x}$ 이다.

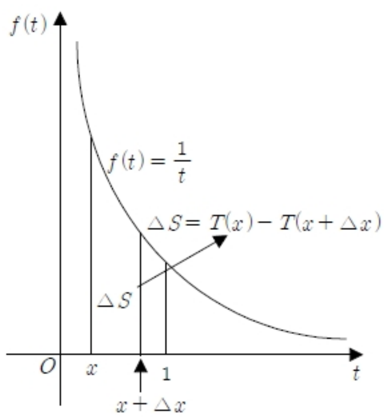


(ii) $0<x<1$ 일 때, 아래 왼쪽 그림과 같이 구간 $[x,1]$에서 함수 $f(t)=\frac{1}{t}$ 의 그래프와 t-축 사이의 영역의 넓이를 $T(x)=\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ 라 하고 $S(x)=-T(x)$로 놓자. x의 증분 $\Delta x(>0)$에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라 하면 아래 오른쪽 그림에서 $\frac{1}{x+\Delta x}\Delta x<\Delta S<\frac{1}{x}\Delta x$ 가 성립한다. 이 부등식의 각 항을 Δx로 나누면 $\frac{1}{x+\Delta x}<\frac{\Delta S}{\Delta x}<\frac{1}{x}$ 이고, 극한 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x+\Delta x}=\frac{1}{x}$ 으로부터

$$\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}(-T(x))=\frac{d}{dx}\left(-\int_x^1 \frac{1}{t}dt\right)=\frac{1}{x}$$

이다. 따라서 (i),(ii)로부터 $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$ 이다.





이제 $\int_1^2 \frac{1}{x^2+3x}dx$ 를 계산해 보자. 피적분함수 $\frac{1}{x^2+3x}$ 의 분모가 인수분해되는 경우에는 $\frac{1}{x^2+3x}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right\}$ 와 같이 부분 분수로 분해하고 미분공식

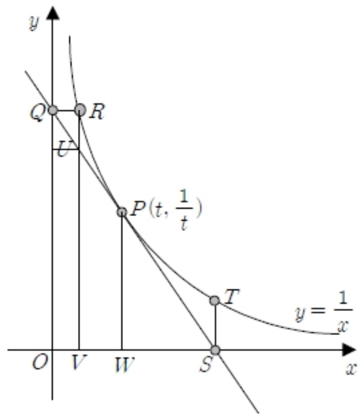
$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}\ ,\ \frac{d}{dx}\ln(x+3)=\frac{1}{x+3}$$

을 이용하면, 다음의 결과를 얻는다.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+3x}dx=\frac{1}{3}\int_1^2\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right\}dx=\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)\right]_1^2=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$$

문 제 2

함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 도함수는 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$ 이므로, 점 $\mathrm{P}\left(t,\frac{1}{t}\right)$ 에서 접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}\cdots$① 이다. 아래 그림과 같이 접선 ①의 x-절편 S 와 y-절편 Q 는 $\mathrm{S}(2t,0), \mathrm{Q}\left(0,\frac{2}{t}\right)$ 이다. 또한 등식 $\frac{2}{t}=\frac{1}{x}$ 로부터 점 R 의 x-좌표는 $x=\frac{t}{2}$ 이므로 $\mathrm{R}\left(\frac{t}{2},\frac{2}{t}\right)$ 이다.



R 에서 x-축에 내린 수선이 접선 ①과 만나는 점을 U , x-축과 만나는 점을 V 라 하면 접선 ①에 $x=\frac{t}{2}$ 를 대입하여 $\mathrm{U}\left(\frac{t}{2},\frac{3}{2t}\right)$ 을 얻는다. P 에서 x-축에 내린 수선이 x-축과 만나는 점을 W 라 하고 오른쪽 그림으로부터 Q,R,P 를 잇는 직선으로 둘러싸인 넓이 S_1 과 P,S,T 를 잇는 직선으로 둘러싸인 넓이 S_2 를 구해 보면 다음과 같다.

$$S_1=\triangle\mathrm{QRU}+\int_{t/2}^{t}\frac{1}{x}dx-(\text{등변사다리PUVW})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{t}{2}\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t}\right)+[\ln x]_{t/2}^{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2t}+\frac{1}{t}\right)\frac{t}{2}=\frac{t}{4}\frac{1}{2t}+\ln t-\ln\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{t}{4}\frac{5}{2t}$$

$$=\frac{1}{8}+\ln 2-\frac{5}{8}=\ln 2-\frac{1}{2}$$

이고,

$$S_2=\int_t^{2t}\frac{1}{x}dx-\triangle\mathrm{PWS}=[\ln x]_t^{2t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t}t=\ln 2t-\ln t-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}$$

이다.

따라서 $S_1=S_2$ 이다.

MEMO

17 인하대학교 수시

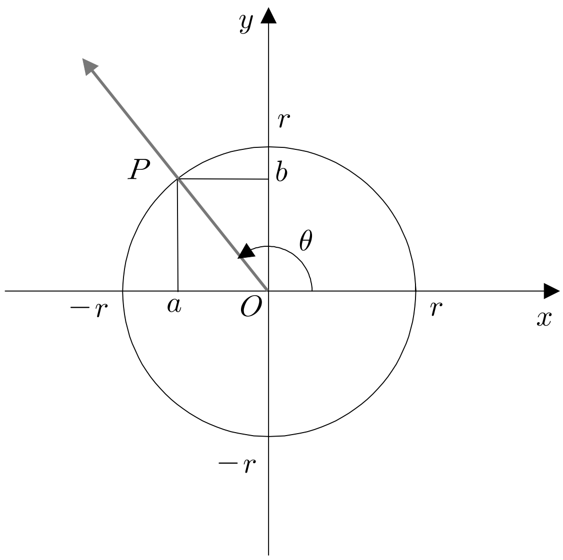
✻ 제시문을 읽고 주어진 논제에 대한 답안을 작성하시오.

제 시 문

(가) 좌표평면 위에서 점 O를 중심으로 하고 반지름이 r인 원을 생각하자. x축의 양의 부분을 시초선으로 할 때, 라디안으로 표시된 일반각 θ를 나타내는 선이 원과 만나는 점을 P라고 하자. 이때,

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a},\ \frac{r}{b},\ \frac{r}{a},\ \frac{a}{b}\quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

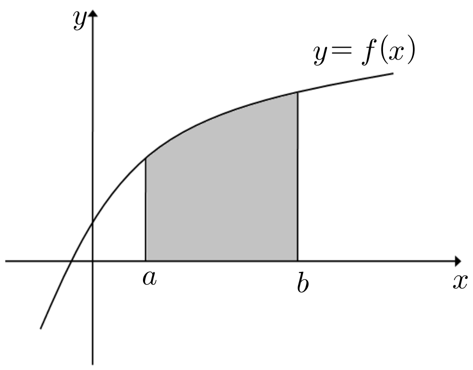
의 값은 θ에 따라 하나씩 결정된다.

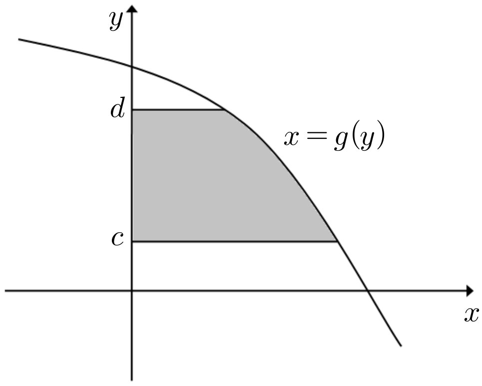


따라서 일반각 θ와 이들 값의 대응 관계는 함수가 되고, 이들 함수를 통틀어 일반각 θ에 대한 삼각함수라고 하며, 다음과 같이 정의된다.

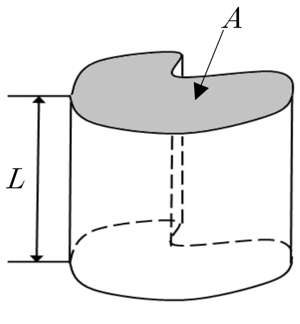
$$\sin\theta=\frac{b}{r},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \tan\theta=\frac{b}{a},\ \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{r}{b},\ \sec\theta=\frac{r}{a},\ \cot\theta=\frac{a}{b}$$

(나) 적분은 직선과 곡선, 혹은 곡선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는데 사용된다. 아래 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$와 x-축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이는 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$와 같게 된다. 마찬가지로 곡선 $x=g(y)$ $(c\leq y\leq d)$와 y-축, 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 영역의 넓이는 정적분 $\int_c^d g(y)\,dy$와 같게 된다.



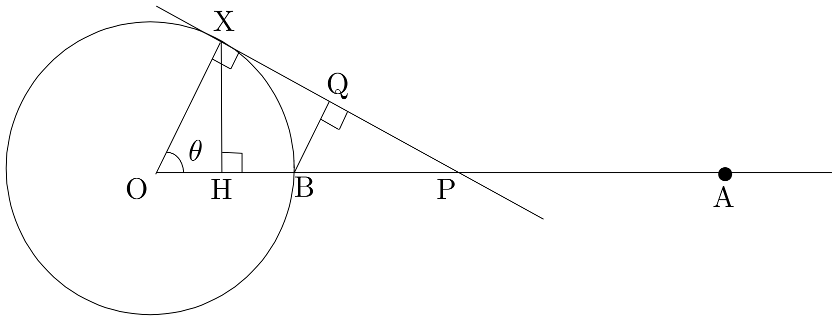


이에 대한 간단한 응용으로 단면의 넓이가 A 이고 길이가 L 인 기둥의 부피는 $\int_0^L A\,dx = AL$ 이 된다.



부피는 $A \times L$

[논제 1] 아래 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름이 1 인 원과 이 원의 중심을 지나는 직선 OA 가 만나는 점을 B 라 하자. 원 위의 점 X 에서 원에 접하는 직선이 직선 OA 와 만나는 점을 P , 점 X 에서 직선 OA 에 그은 수선의 발을 H 라 하고 점 B 에서 직선 XP 에 그은 수선의 발을 Q 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 각 $\angle XOP$ 는 $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 이다.)

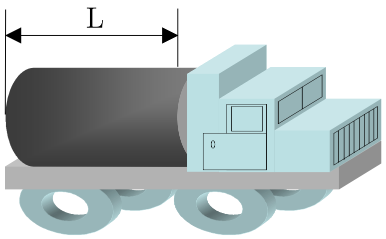


[1-1] 선분 HP , 선분 BQ 의 길이를 θ 의 함수로 표현하시오.

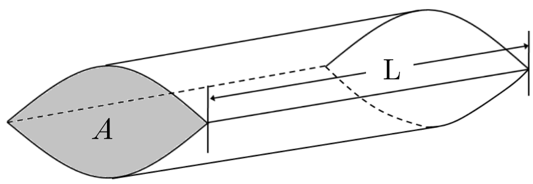
[1-2] 선분 HP 의 길이가 선분 BQ 의 길이의 3배가 되는 θ 의 값을 구하시오.

[논제 2] 제시문 (나)에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

아래 그림과 같이 단면이 포물선 $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2 + 2aA_0^2$ $(a > 0,\ -A_0 \le x \le A_0)$ 으로 둘러싸인 영역이고 길이가 L(m) 인 탱크가 장착된 유조차가 있다고 하자. 그리고 빈 탱크에 매초 $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ (m^3/sec) 의 속력으로 기름이 탱크 안으로 주입된다고 하자.

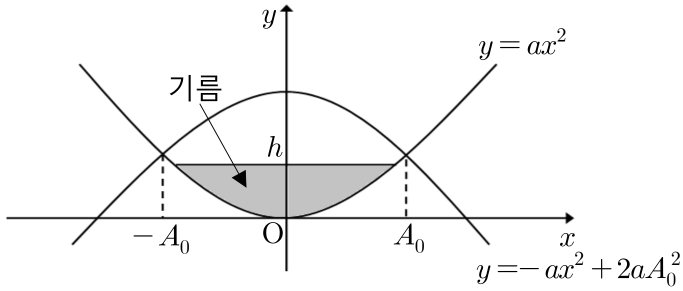


<그림 1>



유조차 탱크의 모습

<그림 2>



<그림 3>

[2-1] s 초 동안에 주입된 기름은 몇 m^3 인가?

[2-2] 탱크의 모양은 [그림 2]와 같다. s 초 동안에 기름을 주입했더니 <그림 3>과 같이 탱크의 반이 채워지지 않았다고 하자. 탱크에 채워진 기름의 높이 h 는 몇 m 인가?

[2-3] 탱크의 높이는 $2aA_0^2$ (m)이다. 이 높이의 $\frac{2}{3}$ 까지 채우려면 기름이 몇 m^3 필요한가?

제시문 분석

1. 제시문 (가)

고등학교 '수학 10-(나)'에 있는 삼각함수의 정의를 설명하였다.

2. 제시문 (나)

고등학교 '미분과 적분' 교과서에 실린 정적분을 사용하여 곡선 아래 영역의 넓이를 구하는 방법을 소개하고, 적분의 응용으로 원기둥의 부피는 밑면의 넓이와 높이의 곱이 된다는 사실을 소개하고 있다.

논제 분석

[논제 1]

원과 삼각형이 만든 기하학적 관계 속에서, 두 선분을 특정 각의 함수로 표현하는 문제와 두 선분이 특정한 관계식을 만족할 때 각의 크기를 구하는 문제로, 삼각함수의 정의를 정확하게 이해하고 논제에서 요구한 계산을 올바르게 수행할 수 있는지를 평가하는 논제이다.

[논제 2]

단면이 수평선에 대해서 서로 대칭인 두 개의 포물선으로 둘러싸인 영역으로 된 유조차의 기름탱크를 소재로 단위시간에 기름탱크에 주입되는 기름의 양을 분수 함수로 주고 일정한 시간 동안 주입된 기름의 양을 구하는 문제와 탱크 속에서 기름이 채워진 높이를 구하는 문제, 탱크 높이의 $\frac{2}{3}$ 만큼 채우기 위한 기름의 양을 구하는 문제 (두 개의 곡선으로 이루어진 영역의 넓이를 구하는 문제)로 이루어져 있다. 이는 적분의 개념 및 응용을 정확하게 이해하고 기본적인 적분 관련 계산을 올바르게 수행할 수 있는지를 평가하는 논제이다.

배경지식 쌓기

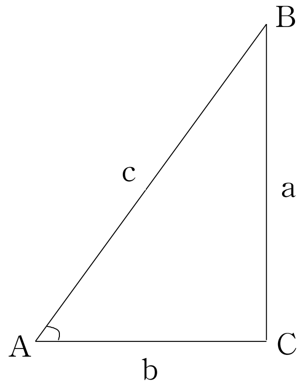
1. 삼각함수의 정의

직각삼각형에서 삼각함수의 정의는 다음과 같다.

$\sin A = \dfrac{a}{c}$

$\cos B = \dfrac{b}{c}$

$\tan C = \dfrac{a}{b}$



2. 귀류법

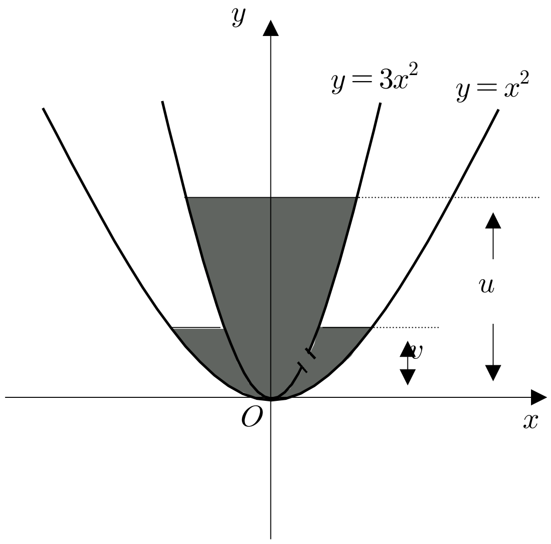
어떤 명제가 참임을 증명하려 할 때 그 명제의 결론을 부정함으로써 가정(假定) 또는 공리(公理) 등이 모순됨을 보여 간접적으로 그 결론이 성립한다는 것을 증명하는 방법이다.

3. 중간값의 정리

닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f(t)$가 $f(a) < f(b)$를 만족할 때, 임의의 실수 $c \in (f(a), f(b))$를 택하면 $f(\alpha) = c$인 점 $\alpha \in (a, b)$가 적어도 하나 존재한다.

풀어보기

1. 곡선 $y=3x^2(0 \le y \le 10)$을 y축 둘레로 회전시킨 회전체 A와 곡선 $y=x^2(0 \le y \le 10)$을 y축 둘레로 회전시킨 회전체 B가 있다. 처음에는 물이 A의 안쪽에만 차 있다가 원점 O 부근의 작은 구멍을 통하여 A의 바깥쪽과 B의 안쪽으로 둘러싸인 부분으로 흘러 나가기 시작한다. A의 안쪽 수면의 높이를 u, A의 바깥쪽 수면의 높이를 v라 할 때, v가 u의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$의 값은? [39]



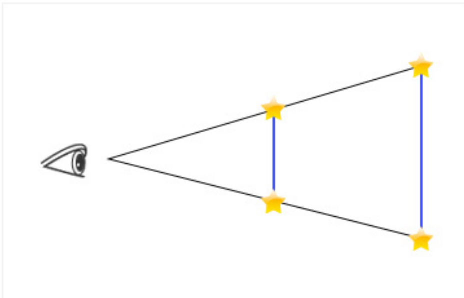
39) 2004 대수능

읽기 자료

삼각함수[40)]

삼각비를 처음으로 연구한 사람들은 고대 그리스의 천문학자들이었다. 물론 이 시대에는 수학자와 천문학자가 구별되지 않았으므로, 천문현상을 연구한 수학자라 부르는 게 더 적절할지도 모르겠다. 천문학자들은 별을 관측하는 것이 기본적인 연구 방법이었고, 따라서 두 별 사이의 거리를 정확히 구하는 것이 대단히 중요하였다. 지금과 같은 우주 시대에는 두 별 사이의 실제 거리를 구하는 것도 가능하지만, 실용적인 목적을 위해서는 모든 별들이 하나의 구면에 놓여 있다고 생각하고 두 별 사이의 거리를 구하는 것이 더 중요하다.

실제로 밤하늘을 보며 두 별 사이의 거리를 잰다고 생각해 보자. 팔을 쭉 뻗어 30cm자를 들고 두 별 사이의 거리를 재면 충분하다고 생각하기 쉽지만, 이 방법은 사람마다 팔의 길이가 다르므로 정확한 거리를 구하는 것과는 거리가 멀다. 극단적으로 생각하면, 눈앞에 자를 놓고 두 별 사이의 거리를 잴 때와 팔을 쭉 뻗어 잴 때를 비교하면 되겠다.



두 별 사이의 거리를 결정하기는 어렵지만 두 별 사이의 각도는 일정하다.

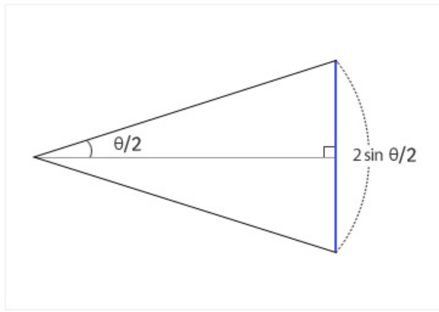
고대 (천문현상을 연구한) 수학자들은 직접 거리를 구하는 것이 잘 되지 않으므로, 대신에 두 별 사이의 각도를 재는 방법을 사용하였다. 이것은 팔의 길이에 상관없이 누구나 별 사이의 거리를 짐작할 수 있는 방법이었다. 모든 별이 하나의 구면에 있다고 생각하였으므로, 이제 별까지 이르는 거리만 알면 두 별 사이의 거리는 자동으로 결정된다. 만약 별까지 이르는 거리가 기존에 생각하던 것보다 두 배로 멀어진다면, 두 별 사이의 거리도 두 배로 멀어진다. 결국 두 별이 멀고 가까운 정도를 재는 데 중요한 것은 거리가 아니라 각도이며, 그에 따라 별에 이르는 거리와 두 별 사이 거리를 결정하는 비례상수 또한 중요하다. 각도마다 이 비례상수를 구하려는 시도가 바로 삼각함수의 시작이었다.

처음 삼각함수를 생각할 때는 두 별 사이의 각과 두 별 사이의 거리를 비교하였으므로, 지금 우리가 사용하는 삼각함수와는 약간의 차이가 있다. 관측 지점부터 별까지의 거리를 1, 두 별 사이의 각을 θ라 하면, 두 별 사이의 거리는 $2\sin(\theta/2)$가 된다.

우리에게는 피타고라스 정리라는 막강한 도구가 있기 때문에 중심각이 θ인 부채꼴의 현의 길이를 구하는 것보다 한 각이 $\theta/2$인 직각삼각형을 이용하는 쪽이 훨씬 편리하다. 이런 이유로 인도 수학자들은 직각삼각형에서 주어진 각의 맞은편 변의

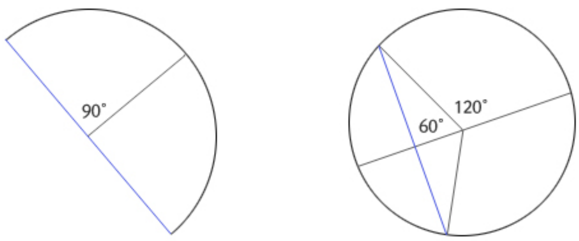
40) 네이버 캐스트 수학산책

길이를 ‘현의 절반’이라는 뜻에서 jya-ardha, 줄여서 jya라 불렀다. 이 용어는 이후 아라비아 수학자들이 소리를 흉내내어 jiba로 옮기게 되는데, 이것이 다시 유럽으로 전해지면서 약간의 사고가 생겼다. 아랍어는 모음이 세 개뿐이어서 아랍 문자에는 모음을 따로 표기하지 않는 경우가 많다. 그 바람에 jiba의 모음을 없앤 jb를 본 유럽인들은 이 단어가 jaib인 것으로 착각하였다. 원래의 jiba는 특별한 뜻이 없는 단어였지만, jaib는 만(灣, bay)를 뜻하는 단어여서, 여기에 해당하는 라틴어 sinus로 번역되었다. 우리가 사인(sine)이라 부르는 것은 이 라틴어를 다시 영어식으로 바꾼 것이다.



θ보다 θ/2를 사용하는 쪽이 편하다.

사인값을 직각삼각형의 빗변과 높이의 비로 정의하는 것이 중학교에서 배우는 삼각비인데, 고등학교 수학에서는 이것을 둔각까지 확장하여 정의한다. 이것은 삼각함수의 원래 목적을 생각하면 자연스럽게 생각할 수 있다. 예를 들어 sin90°를 구하려면, 반지름이 1이고 중심각이 180°인 부채꼴을 만들어 그 현의 길이를 재면 된다. 즉, 두 별 사이의 각이 180°일 때 두 별 사이의 거리를 구하는 것이다. 이 경우에는 현의 길이가 곧 지름의 길이가 되므로, $2\sin(180/2)^\circ = 2$가 되어, $\sin 90^\circ = 1$로 정의하면 자연스럽다.



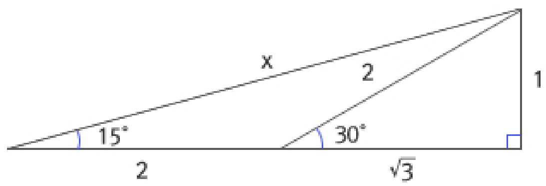
직각에 대한 사인값(왼쪽), 둔각에 대한 사인값(오른쪽)

같은 식으로 sin120°를 구하여 보자. 이 경우 두 별 사이의 각이 240°일 때 두 별 사이의 거리를 구하는 것은, 뒤돌아서서 보면 두 별 사이의 각이 120°일 때를 생각하는 것과 같다. 따라서 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$가 된다. 이와 같이 생각하면 둔각에 대한 사인값을 자연스럽게 정할 수 있다.

이와 같은 착상으로 둔각에 대한 코사인, 탄젠트 등의 값을 확장할 수 있고, 심지어 180°를 넘는 각에 대해서도 삼각함수의 값을 정할 수 있다. 이런 과정은 원래의 성질이 잘 유지되게 하면서 특정한 경우로부터 일반적인 경우로 확장하는 수학적 사고방식을 잘 보여준다.

고대의 수학자들은 삼각함수의 정확한 값을 계산하기 위하여 엄청나게 많은 노력을 기울였다. 특정한 값의 사인값이나 코사인값을 구하려면 피타고라스 정리, 닮음비 등등 수많은 정리와 공식을 수많은 종이 위에 써야만 했다. 예를 들어, 15°, 라디안으로는 $\pi/12$인 각에 대한 사인값을 구하여 보자. 다음 그림을 이용하면

$\sin(\pi/12)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4=0.25881904510\cdots$임을 계산할 수 있다.



sin 15° 구하기.

한 각의 크기가 15°인 삼각형의 빗변의 길이를 x라 하면, 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$x^2=(2+\sqrt{3})^2+1^2=8+4\sqrt{3}$$

따라서 x의 값을 구하면 다음과 같다.

$$x=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

이제 분모를 유리화하면, 다음과 같다.

$$\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0.25881904510\cdots$$

그러나 이런 방식은 대단히 복잡할 뿐만 아니라, 임의의 각에 대한 사인값을 계산하기 어려워, 지금은 테일러 급수(Taylor series)를 이용하여 근삿값을 구한다. 테일러 급수란 어떤 함수를 다항식의 형태로 근사하는 것으로, 삼각함수는 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots$$

단, $|x|<\frac{\pi}{2}$

테일러 급수를 이용하여 위에서 구한 sin 15°를 다시 구해 보면 다음과 같은 값을 얻는다.

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^7+\cdots\approx 0.25881904508\cdots$$

겨우 네 개의 항만 구하여도 소수점 아래 아홉 번째 자리까지 맞았고, 항을 더 많이 계산할수록 근삿값도 점점 정밀해진다. 전자계산기가 삼각함수값을 구하는 것도 이런 원리이다.

적분의 응용

미분은 변화율 혹은 접선을 구하자는 목적으로 출발했지만 이내 그 한계를 벗어났듯, 적분 역시 단순히 넓이를 구하던 한계를 벗어나 다양하게 응용된다. 2차원 개념인 넓이에 대응하는 1차원 및 3차원 개념으로 길이와 부피가 있다. 따라서 곡선의 길이나 입체의 부피를 계산할 때 적분이 등장할 것임을 짐작할 수 있을 것이다.

적분한다는 것은 어떤 의미에서는 평균을 구하는 것이다. 따라서 확률과 통계를 활용할 때 적분이 등장하는 건 필수다. 과학, 공학, 경제학 등에서 알고 싶은 대상을 기술할 때, 미분을 포함한 방정식, 즉, ‘미분 방정식’의 형태로 서술할 수 있는 경우가 많다. 따라서 이런 방정식을 풀거나 이해하려고 할 때, 미분의 역에 해당하는 적분을 모르고서는 제대로 이해할 수가 없다.

예시 답안

풀어보기 1

처음 물의 양을 $m\pi$라 하면

$$m\pi=\pi\int_0^u \frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v ydy-\pi\int_0^v \frac{1}{3}ydy \qquad \therefore \frac{1}{6}u^2+\frac{1}{3}v^2=m \;\cdots\cdots\; ㉠$$

$$=\pi\int_0^u \frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v \frac{2}{3}ydy$$

$$=\frac{\pi}{6}u^2+\frac{\pi}{3}v^2$$

㉠의 양변을 u에 대하여 미분하면,

$$\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}v\cdot\frac{dv}{du}=0,\ \frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{v}$$

따라서 v가 u의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$의 값은

$$\frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{\frac{1}{2}u}=-1\left(\because v=\frac{1}{2}u\right)$$ 이다.

논제 1

[1-1] $\triangle$OPX 에 제시문 (가)의 삼각함수의 정의를 적용하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta,\quad \overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$$

또한 $\triangle$OPX $\backsim$ $\triangle$BPQ 이므로 비례식

$$\overline{\mathrm{OX}}:\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{BP}} \quad \text{즉} \quad 1:\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{\cos\theta}:\frac{1}{\cos\theta}-1$$

으로부터

$$\overline{\mathrm{BQ}}=\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=1-\cos\theta$$

<다른풀이>

점 B 에서 선분 OX 에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면 $\overline{\mathrm{OH'}}=\cos\theta$ 이므로

$$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{XH'}}=\overline{\mathrm{OX}}-\overline{\mathrm{OH'}}=1-\cos\theta$$

[1-2] 문제의 조건 $\overline{\mathrm{HP}}=3\overline{\mathrm{BQ}}$ 으로부터 등식

$$\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=3(1-\cos\theta)$$

을 얻고 이를 정리하면

$$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$$

을 얻는다. $0^\circ<\theta<90^\circ$ 이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ$ 이다.

논제 2

[2-1] s 초 동안에 주입된 기름은 다음과 같다.

$$\int_0^s \frac{t}{1+t^2}\,dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^s=\frac{1}{2}\ln(1+s^2)$$

[2-2] s 초 동안에 기름을 주입했더니 <그림 3>과 같이 탱크의 반이 채워지지 않았고, s 초 동안에 유입된 기름의 높이를 h 라 하자. 제시문 (나)에 의해 s 초 동안에 유입된 기름은 $\left(2\int_0^h\sqrt{\frac{y}{a}}\,dy\right)\times L$ 으로 주어진다. [2-1]의 결과를 이용하면

$$2L\int_0^h\sqrt{\frac{y}{a}}\,dy=\frac{1}{2}\ln(1+s^2)$$

이 성립한다. 좌변을 적분하면

$$2L\int_0^h\sqrt{\frac{y}{a}}\,dy=\frac{2L}{\sqrt{a}}\int_0^h y^{\frac{1}{2}}\,dy=\frac{4L}{3\sqrt{a}}h^{\frac{3}{2}}$$

가 된다. 따라서 $\frac{4L}{3\sqrt{a}}h^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\ln(1+s^2)$ 이므로

$$h=\left(\frac{3\sqrt{a}}{8L}\ln(1+s^2)\right)^{\frac{2}{3}}$$

이 된다.

[2-3] 높이가 $2aA_0^2$ 이므로 이 높이의 $\frac{2}{3}$ 는 $\frac{4aA_0^2}{3}$ 이 된다. 두 곡선이 $y=aA_0^2$ 에 대해서 대칭이므로 구하는 부피는 전체 탱크의 부피에서 높이가 $\frac{2aA_0^2}{3}$ 까지의 부피를 빼면 된다. 우선 전체 탱크의 부피를 V_0 라고 하면

$$V_0=4L\int_0^{aA_0^2}\sqrt{\frac{y}{a}}\,dy=\frac{8L}{3\sqrt{a}}(aA_0^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}aLA_0^3$$

이 된다. 높이가 $\dfrac{2aA_0^2}{3}$ 까지의 탱크의 부피 V_1 은

$$V_1 = 2L\int_0^{\frac{2aA_0^2}{3}} \sqrt{\frac{y}{a}}\, dy = \frac{4L}{3\sqrt{a}}\left(\frac{2aA_0^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} aLA_0^3$$

이 된다. 따라서 구하려는 부피는

$$\begin{aligned} V_0 - V_1 &= \frac{8aLA_0^3}{3} - \frac{8\sqrt{2}\, aLA_0^3}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{8aLA_0^3}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{8aLA_0^3}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{9}\right) \\ &= \frac{8(9-\sqrt{6})}{27} aLA_0^3 \end{aligned}$$

이 된다.

<다른풀이>

높이가 $2aA_0^2$ 이므로 이 높이의 $\dfrac{2}{3}$ 는 $\dfrac{4aA_0^2}{3}$ 이 된다. 구하려는 부피 V는

$$V = 2L\left(\int_0^{aA_0^2} \sqrt{\frac{y}{a}}\, dy + \int_{aA_0^2}^{\frac{4aA_0^2}{3}} \sqrt{2A_0^2 - \frac{y}{a}}\, dy\right)$$

이 된다. 첫 번째 적분을 계산하면

$$\int_0^{aA_0^2} \sqrt{\frac{y}{a}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2}{3}(aA_0^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{a}} a\sqrt{a}\, A_0^3 = \frac{2aA_0^3}{3}$$

이 된다. 다음으로 두 번째 적분을 계산해 보자. $z = 2A_0^2 - \dfrac{y}{a}$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \int_{aA_0^2}^{\frac{4aA_0^2}{3}} \sqrt{2A_0^2 - \frac{y}{a}}\, dy &= \int_{A_0^2}^{\frac{2A_0^2}{3}} \sqrt{z}\,(-a)\, dz = a\int_{\frac{2A_0^2}{3}}^{A_0^2} \sqrt{z}\, dz \\ &= \frac{2a}{3}\left(A_0^3 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} A_0^3\right) = \frac{2aA_0^3}{3}\left(1 - \frac{2\sqrt{6}}{9}\right) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 구하는 적분 값 V는

$$\begin{aligned} V &= 2L \times \frac{2aA_0^3}{3} \times \left(1 + 1 - \frac{2\sqrt{6}}{9}\right) = \frac{8aLA_0^3}{27}(9 - \sqrt{6}) \\ &= \frac{8(9-\sqrt{6})}{27} aLA_0^3 \end{aligned}$$

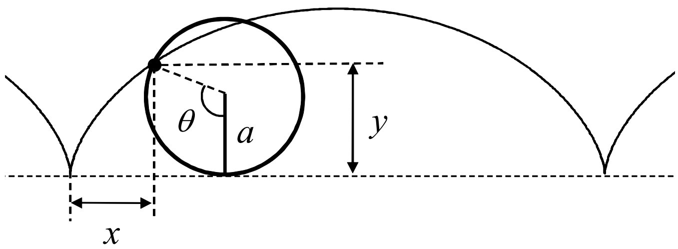
이 된다.

18 중앙대학교 모의

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

(가) 사이클로이드(cycloid)는 놀라움을 간직한 신비의 곡선으로, 파스칼이 사이클로이드를 연구하며 고통스러운 치통을 잊었다는 일화가 있을 만큼 이 곡선의 아름다움에 매료된 사람이 많았다. 사이클로이드는 바퀴라는 의미의 그리스어에서 나온 말로 아래 그림과 같이 굴러가는 바퀴 상의 한 점의 궤적을 나타낸다.

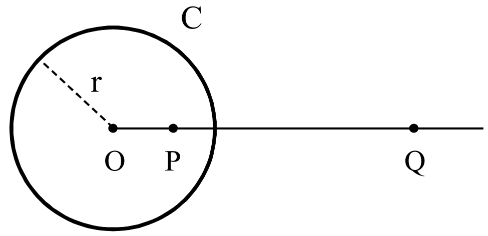


$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

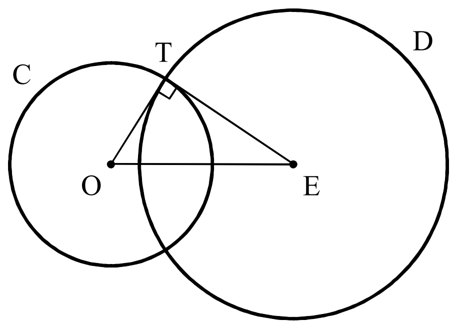
1696년 베르누이는 유럽의 물리학자들에게 '브라키스토크론(brachistochrone: 그리스어로 '가장 짧다'는 의미의 'brakistos'와 '시간'을 의미하는 'kronos'를 합친 말) 문제'라는 것을 낸 적이 있었다. 이는 위아래로 비스듬하게 떨어진 두 지점 사이에서 어떤 경로를 따라 내려가는 것이 가장 빨리 내려갈 수 있는지를 찾는 것이었다. 단순하게 생각하면 직선 경로가 최단 거리이기 때문에 가장 빠를 것 같지만 실제로는 사이클로이드를 뒤집은 형태의 곡선을 따라 내려가는 것이 가장 빠르다. 독수리는 먹이를 향해 낙하할 때 이 곡선 형태에 가깝게 낙하한다. 땅 위에 있는 먹이를 잡을 때 직선이 아닌, 최단시간이 소요되는 곡선을 그리며 목표물로 향하는 것이다. 또한 우리나라 전통 가옥의 기와 역시 사이클로이드를 뒤집은 곡선의 모양을 하고 있어 빗물로 인한 목조건물의 부식을 막는 데 도움이 된다.

(나) 다음 그림에서 C는 중심이 O이고 반지름이 r인 원이다. 임의의 점 P에 대하여, 원 C에 대한 P의 역점(inverse) Q는, 반직선 $\overrightarrow{OP}$ 위의 점으로 선분 $\overline{OP}$의 길이와 선분 $\overline{OQ}$의 길이의 곱이 r^2과 같은 점이다. 이때 P는 O가 아닌 점이다.

예를 들어, 점 P가 원 C 위에 있다면 P의 역점인 Q는 점 P와 같은 점이 된다. 그리고 점 P가 원 C의 내부에 있다면 점 Q는 원 C의 외부에 있게 된다. 반대로 점 P가 원 C의 외부에 있다면 점 Q는 원 C의 내부에 있게 된다.

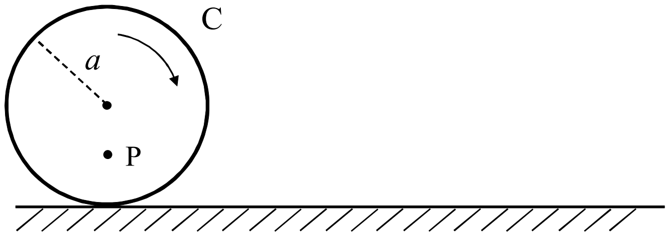


한편, 두 원 C, D가 직교한다는 것은, 아래 그림과 같이 두 원의 교점에서 두 원에 접하는 직선들이 서로 직교한다는 뜻이다. 즉, 점 O가 원 C의 중심, 점 E가 원 D의 중심, 점 T가 두 원의 교점이라고 할 때, 두 원이 직교하면 두 직선 $\overleftrightarrow{OT}$ 와 $\overleftrightarrow{ET}$ 는 서로 직교한다.



[논제 1] 제시문 (나)의 그림과 같이, 직교하는 두 원 C, D의 중심이 각각 점 O와 점 E라고 하자. 두 점 O와 E를 잇는 직선과 원 D와의 교점을 P, Q라고 할 때, Q가 원 C에 대한 P의 역점인 것을 논리적으로 설명하시오.

[논제 2] 아래 그림과 같이 반지름이 a 인 원형 바퀴 C가 있고, 그 중심에서 거리가 $\frac{a}{2}$ 인 곳에 한 점 P가 있다. 평면에서 바퀴가 굴러가는 경우, 원 C에 대한 점 P의 역점의 궤적을 그려 보고, 제시문 (가), (나)를 참조하여 그 궤적의 식을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.



제시문 분석

1. 제시문 (가)

(가)에서는 사이클로이드(cycloid)의 정의와 성질, 매개변수(θ)를 이용한 방정식이 나와 있다. [논제 2]를 해결하기 위해서는 실제로 제시문 (가)에 나타나 있는 매개변수 방정식 표현을 이해하고 식을 유도할 수 있어야 한다.

2. 제시문 (나)

(나)에서는 ‘역점’이라는 새로운 기하학적인 용어에 대한 정의와 두 원의 수직조건에 대해 정의하고 있다. 새로운 용어에 대한 이해를 바탕으로 [논제 1], [논제 2]의 풀이가 가능하도록 제시되어 있다.

논제 분석

[논제 1]

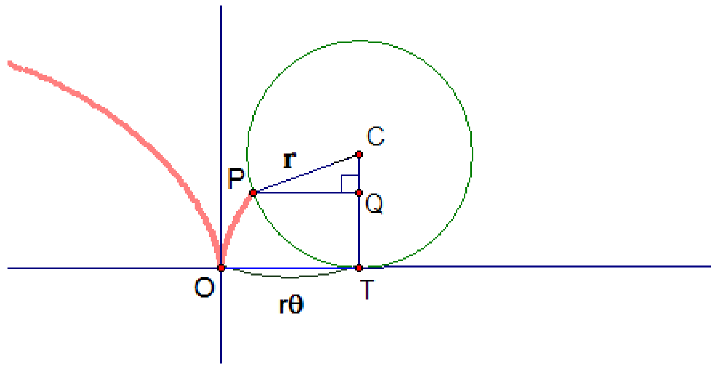
직교하는 두 원에서 점 Q 가 점 P 의 역점임을 보이기 위해 $r^2 = \overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}$ 라는 식을 보여야 함을 설명한 후, 원의 반지름간의 관계를 이용해 논리적으로 증명하면 된다. 이를 기술할 때, 증명에 필요한 등식도 언급하도록 한다.

[논제 2]

[논제 1]에서 이해한 기하학적 개념을 바탕으로 제시문 (가)의 사이클로이드를 따라 움직이는 점의 궤적을 구하는 문제이다. 이 문제를 해결하기 위해선 역점의 궤적을 논리적으로 추론할 뿐 아니라, 제시문 (가)에서 얻은 x, y 의 식을 이해하고 응용할 수 있어야 한다.

배경지식 쌓기

사이클로이드(cycloid)의 매개변수 방정식



그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원위의 한 점 P가 이 원이 수직선 위를 구를 때 점P가 그리는 자취를 사이클로이드(Cycloid)라고 하고 식은 다음과 같은 매개변수 방정식으로 유도할 수 있다.

매개변수로서 원의 회전각을 θ (P가 원점에 있을 때 $\theta=0$)를 취하자. 원이 θ 라디안만큼 회전했다고 가정하자. 원이 직선과 붙어 있기 때문에, 그림에서 보듯이 원점으로부터 굴러간 거리는

$$\overline{OT}=\widehat{PT}\text{의 길이}=r\theta$$

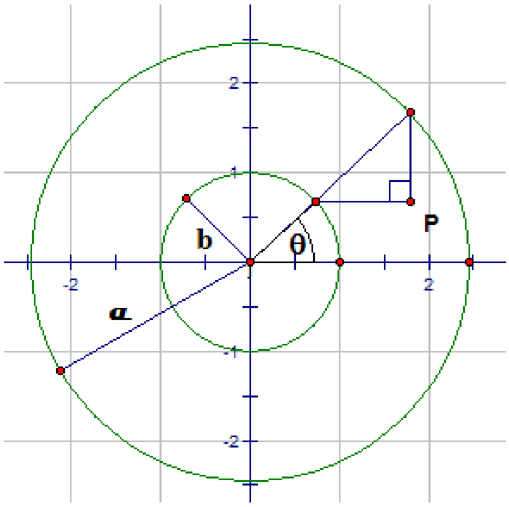
이고, 원의 중심은 $C(r\theta, r)$이다. P의 좌표를 (x, y)로 놓으면 그림으로부터 다음의 사실을 알 수 있다.

$$x=\overline{OT}-\overline{PQ}=r\theta-rsin\theta=r(\theta-\sin\theta)$$
$$y=\overline{TC}-\overline{QC}=r-rcos\theta=r(1-\cos\theta)\quad,\theta\in R$$

※ (주) : $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 일 때, 위의 방정식을 유도해 보자.

풀어보기

1. a, b가 고정된 수일 때, 그림에서 점 P의 모든 가능한 위치들로 구성된 곡선의 매개변수방정식을 구하시오. 이 때 각 θ를 매개변수로 사용하시오. 그리고 매개변수를 없애고 그 곡선이 무엇인지를 확인하시오.[41]



2. 좌표평면 위에 놓인 곡선 위의 점의 좌표 $(x,\ y)$가 다음과 같이 나타날 때, 이 곡선의 길이를 구하시오.[42]

$$x=\ln t,\ \ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{e}\le t\le e\right)$$

41) James Stewart,. Calculus 6th Edition,. 청문각
42) 최용준, 적분과 통계, (주)천재교육

읽기 자료

사이클로이드(cycloid) 곡선의 성질[43)]

1. 곡선의 길이

(i) $y=f(x), (a \le x \le b)$ 꼴로 주어진 곡선 C의 길이 L은 f'이 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{이다.}$$

(ii) 곡선 C가 매개변수방정식 $x=f(t),\ y=g(t)\ (a \le t \le b)$이고 f', g'이 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이며 t가 a에서 b로 증가할 때, C가 꼭 한 번 가로지른다면, C의 길이는

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다.

위의 식을 이용하여 사이클로이드의 한 개의 반원형의 호의 길이를 구해보면

$$\begin{aligned} L&=\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta=r\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2r\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=2r(2+2)=8r \end{aligned}$$

사이클로이드의 한 호의 길이는 사이클로이드를 만드는 원의 반지름의 8 배임을 보여준다. 이 사실은 후에 런던에 있는 성 바울 성당의 설계자인 Christopher Wren 경에 의하여 1658년에 처음으로 증명되었다.

2. 곡선과 x축 사이의 면적

곡선이 매개변수방정식 $x=f(t),\ y=g(t)\ (a \le t \le b)$로 주어지고 t가 a에서 b로 증가할 때, C가 꼭 한 번 가로 지른다면 정적분에 대한 치환법을 이용하여 다음과 같이 면적을 계산할 수 있다.

$$\text{면적 } A=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \ \left(\text{또는} \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right)$$

위의 적분식을 이용하여 사이클로이드의 한 반원형 밑의 넓이를 구하면

---

43) James Stewart, 미분적분학. 2009. 청문각. 한국과학기술연구정보원 (http://www.ndsl.kr/)

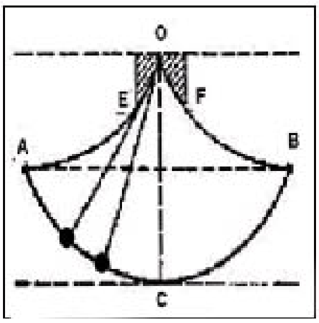
$$A=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)r(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=r^2\int_0^{2\pi}\left\{1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right\}d\theta=3\pi r^2$$

사이클로이드의 한 호 아래 부분의 넓이는 사이클로이드를 만드는 회전원의 넓이의 3 배임을 말해주고 있다. 갈릴레오는 이 결과를 추측하였으며, 프랑스수학자 로베르발과 이탈리아 수학자 토리첼리에 의하여 이 사실이 최초로 증명되었다.

3. 출발점이 어디든 정점에 도달하는 시간이 같다 – '등시곡선(tautochrone)'

1583년 성당에서 예배를 드리던 갈릴레이가 천정에 매달린 진자의 주기가 진폭에 상관없이 일정하다는 '진자의 등시성'을 발견했다는 이야기는 너무나 유명하다. 하지만 정확하게 이야기 한다면 등시성(isochronism)은 진자의 진폭이 매우 작을 경우에만 성립한다. 일반적으로 진폭이 커지면 주기도 증가하기 때문에 진자의 등시성은 성립하지 않는데, 정밀한 시계가 없었던 당시에는 이러한 사실을 알아내기 어려웠을 것이다.

그런데 네덜란드의 물리학자 호이겐스는 1673년 『진자시계(Horologium Oscilatorium)』라는 명저를 통해 진자가 호가 아니라 사이클로이드를 따라 움직일 경우에 진자의 궤도가 등시곡선(tautochrone)이 된다는 것을 증명하고, 이러한 성질을 이용해 진자시계를 만들었다. 그의 진자시계는 두 개의 사이클로이드 벽면(<그림 1>에서 E 와 F) 사이에서 진자가 움직이도록 만든 것인데, 이렇게 하면 진자의 움직임도 사이클로이드가 된다.



<그림 1>

등시곡선은 정점에 도달하기 위해서 곡선 상의 어떤 점에서 출발하더라도 도달하는 데 걸리는 시간이 같게 되는 성질을 갖는다. 즉, <그림 1>[44]에서 보면 A 에서 B 사이의 곡선은 사이클로이드인데 가장 아래 지점인 C 까지 진자가 내려오는 데 걸리는 시간은 이 사이의 어떤 지점에서 출발하더라도 같다. 따라서 등시곡선을 따라 움직이는 사이클로이드 진자는 진폭에 상관없이 일정한 주기를 갖게 되는 것이다.

44) 출처 : 한국과학기술연구정보원 (http://www.ndsl.kr/)

역학적 에너지 보존의 법칙을 이용하여 등시성을 다음과 같이 증명할 수 있다.

각 매개변수 방정식의 도함수를 구해 보면

$\dfrac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$, $\dfrac{dy}{d\theta} = asin\theta$ 이고

$(dx)^2 + (dy)^2 = \{a^2[(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+\sin^2\theta]\}(d\theta)^2 = 2a^2(1-\cos\theta)(d\theta)^2$ 이다.

역학적 에너지 보존의 법칙에 의하여

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\,d\theta$$

즉, $dt = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\,d\theta$

$\therefore\ t = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\pi$

만약, 최대 정점의 높이에서 출발하지 않고 경로위의 한 점(x_0, y_0)에서 출발한다면(즉, 원이 회전한 각의 양$(0 \le \theta \le \pi)$이 $\theta_0\,(\theta_0 \ne 0)$인 점에서 출발)

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y-y_0)}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2g(y-y_0)}} = \frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{2ga(\cos\theta_0-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,d\theta$$

즉, $dt = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,d\theta$

$$t = \int_0^{\pi}\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,d\theta$$

여기서, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \;\Rightarrow\; \cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta) - 1$ 이므로

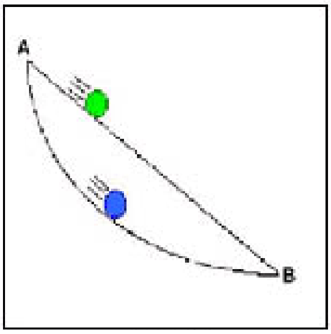
$$t = \int_0^{\pi}\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{\sqrt{\cos^2(\frac{1}{2}\theta_0)-\cos^2(\frac{1}{2}\theta)}}\,d\theta \cdots (*)$$

$u=\dfrac{\cos(\frac{1}{2}\theta)}{\cos(\frac{1}{2}\theta_0)}$ 라 두면 $du=-\dfrac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{2\cos(\frac{1}{2}\theta_0)}d\theta$ 이므로

(*) 식은 $t=-2\sqrt{\dfrac{a}{g}}\displaystyle\int_1^0\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=2\sqrt{\dfrac{a}{g}}\,[\sin^{-1}u]_0^1=\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ 가 된다.

4. 최속 강하거리를 찾아주는 '사이클로이드'

1696년 쟝 베르누이는 유럽의 물리학자들에게 '브라키스토크론(brachistochrone, 그리스어의 가장 짧음을 의미하는 'brakistos'와 시간을 의미하는 'kronos'를 합친 말로 보통 '최속강하선'이라고 불린다) 문제'라는 것을 낸 적이 있었다. 이는 위아래로 떨어진 두 지점 사이에서 어떤 경로를 따라 내려가는 것이 가장 빨리 내려갈 수 있는지를 찾는 것이었다. 흔히 생각하면 직선 경로가 최단 거리이기 때문에 가장 빠를 것 같지만 실상은 사이클로이드 곡선을 따라 내려가는 것이 가장 빠르다. 사이클로이드 위에서는 각 지점에서 중력가속도가 줄어드는 정도가 직선보다 작기 때문에 가속도에 의해 속도가 점점 빨라져서 도착 지점까지의 시간이 직선이나 다른 어떤 궤적 보다 빠른 것이다. 즉 풀장의 미끄럼틀도 놀이터에 있는 것과 같은 직선 형태로 만드는 것보다 사이클로이드 형태로 만들게 되면 더 빨리 내려오기 때문에 더 큰 스릴을 맛볼 수 있는 것이다. <그림 2>[45]에서 보면 A에서 동시에 출발한 두 공 중 사이클로이드 위를 구르는 공이 직선 위를 구르는 공보다 더 먼 거리를 이동함에도 불구하고 B지점에 먼저 도착하게 된다.



<그림 2>

이 문제를 최초로 풀어낸 것은 베르누이 형제였으며, 이후 뉴턴과 라이프니츠, 로피탈이 풀이에 성공했다고 한다. 전해지는 바에 의하면 당시 많은 물리학자들이 몇 달 동안 이 문제를 풀기 위해 고민했으나 뉴턴은 단 하루만에 풀어 버렸다고 한다.

45) 출처 : 한국과학기술연구정보원 (http://www.ndsl.kr/)

예시 답안

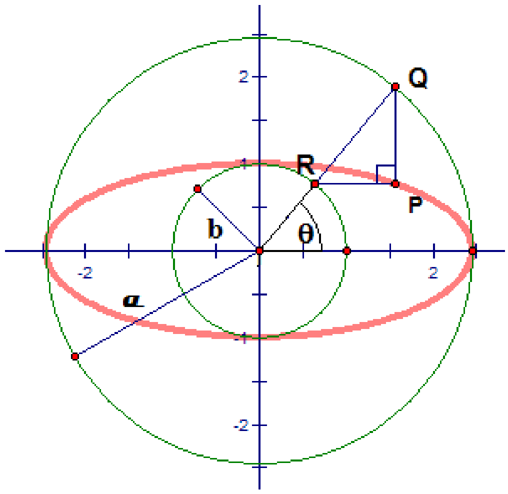
풀어보기 1

그림에서 점 P의 x좌표는 $a\cos\theta$ 이고,
y좌표는 $b\sin\theta$ 이므로 점 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ 이다.

즉, $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ 이므로 이 식을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에 대입하여 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이고, $a\neq b$ 이므로 아래 그림과 같이 자취는 타원이 된다.



풀어보기 2

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)$ 이므로 구하는 곡선의 길이 l은

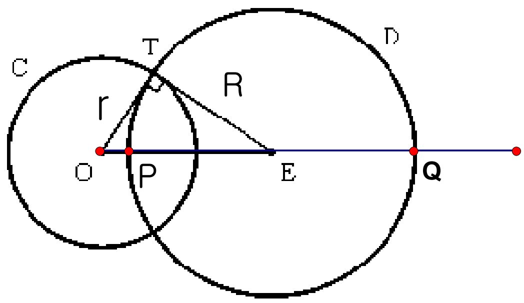
$$l=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right\}^2}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right\}^2}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

논제 1 46)

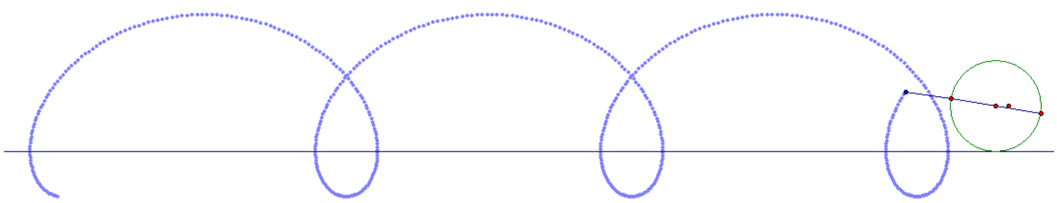


제시문 (나)에 역점의 정의에 따라 점 Q가 원 C에 대한 P의 역점임을 보이려면 $\overline{OP} \bullet \overline{OQ} = r^2$ 임을 보이면 된다.
$\overline{PE} = \overline{EQ} = \overline{TE}$ 이므로

$$r^2 = (\overline{OT})^2 = (\overline{OE})^2 - (\overline{TE})^2 = (\overline{OE} + \overline{TE})(\overline{OE} - \overline{TE}) = \overline{OQ} \bullet \overline{OP}$$

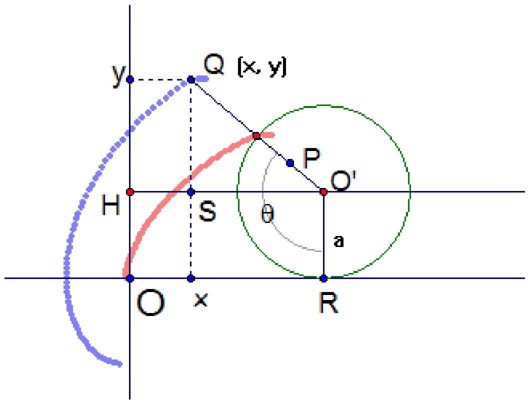
논제 2

(i) 역점의 자취의 그래프



(ii) 역점의 자취의 방정식

아래 그림과 같이 점 P에 대한 역점은 중심으로부터 거리가 $2a$(지름의 길이) 떨어진 점 Q가 된다.



46) 중앙대 모의논술 해설 참조

그림에서 구하고자 하는 점 Q의 좌표를 (x, y)라 두고, $\angle QO'H = \alpha$ 라 두면 $\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = -(\dfrac{\pi}{2} - \theta)$ 이다. 또한, $\overline{O'Q} = 2a$, $\overline{OR} = a\theta$ 이므로

$$\overline{O'S} = 2a\cos\alpha = 2a\cos\left\{-(\frac{\pi}{2} - \theta)\right\} = 2a\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2a\sin\theta$$
$$\overline{QS} = 2a\sin\alpha = 2a\sin\left\{-(\frac{\pi}{2} - \theta)\right\} = -2a\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = -2a\cos\theta$$

이고

$$x = \overline{OR} - \overline{O'S} = a\theta - 2a\sin\theta, \quad y = \overline{QS} + \overline{O'R} = -2a\cos\theta + a$$ 이다.

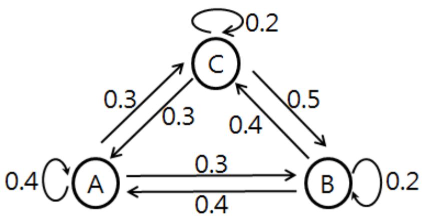
MEMO

19 한국외국어대학교 수시

✽ 다음에 주어진 내용과 조건 M을 이용하여 [문제]에 답하시오.

제 시 문

아래의 [문제]와 관련해서 유사한 상황을 다음과 같이 설정해 보자. 이동통신 회사 A, B, C의 고객 이동 현황에 관한 추세를 월 단위로 분석하여 <그림 1>에 제시한 것과 같은 확률에 의해 가입자가 변하고 있음을 파악하였다. 이러한 그림을 상태전이도라고 하는데 화살표는 고객이 가입사를 옮기는 방향, 이에 대응하는 숫자는 이렇게 전이할 조건부확률을 나타낸다. 예를 들어, A, B 사이의 0.3은 어느 달의 가입 상태가 A사일 때 다음 달의 가입 상태가 B사로 바뀔 조건부확률이다. <그림 1>의 관계를 행렬로 나타내면 오른쪽의 P와 같고, 이를 전이확률행렬이라 부른다. 여기서, A, B, C는 전이 관계를 파악하기 위해 편의상 표기한 것이다. 이러한 전이 관계에서 다음의 상자 안에 주어진 **<u>조건 M</u>**을 만족한다고 하자.



<그림 1> 상태전이도

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$

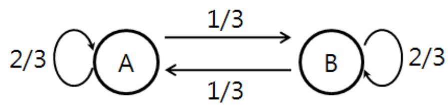
또는

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

<u>조건 M</u>

1. 현재 시점을 n이라 할 때, 다음 시점인 $n+1$에서의 상태는 과거 시점과는 독립이고 오직 현재 상태에만 의존함.
2. n번째 시점에서 상태가 i일 때, $n+1$ 시점의 상태 j로 이동할 확률은 어느 달을 기준 시점으로 하거나 같음.
   (위 예에서 i, j는 각각 가입사 중 하나를 나타냄)
3. 현재 시점에서 n 시점 후의 상태로 전이 관계를 나타내는 n-단계 전이확률 행렬을 $P^{(n)}$이라 하면, 다음이 성립함.
   $$P^{(n)} = P \times P \times \cdots \times P = P^n$$
4. 지정된 상태에서 한 시점 또는 n 시점 후에 제자리에 머무는 것을 포함하여 다른 상태로 이동할 확률의 합은 1임. 즉, 전이확률행렬 또는 n-단계 전이확률행렬의 각 행에 있는 확률의 합은 1임.

[문제 1] 어떤 회사에서 매주 금요일에 직원들의 출근 수단을 자가용(A)과 대중교통(B) 이용만을 대상으로 조사한 결과 아래의 상태전이도와 같은 관계로 매주 변하고 있음을 확인하였고, 여기서 전이 관계는 위에 주어진 **조건 M**을 적용할 수 있다고 가정한다. 논리적인 근거를 제시하거나 **조건 M**에서 필요한 부분을 이용하여 다음 물음에 답하시오.



(1) 금주에 자가용으로 출근한 사람이 2주 후에 자가용으로 출근할 확률을 구하시오. 한편, 금주 금요일 조사결과 직원의 60%가 자가용으로 출근했다고 한다. 2주 후 금요일에 자가용으로 출근할 직원의 비율을 예측하시오. 단, 결과는 기약분수로 나타내면 됨.

(2) 위의 상태전이도에 대응되는 전이확률행렬을 P라 할 때, n-단계 전이확률행렬의 극한값 $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$을 유도하시오.

(3) 주어진 전이확률행렬을 $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$라 하고, n-단계 전이확률행렬을 $P^{(n)}=\begin{pmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{pmatrix}$이라고 할 때, 다음 관계식이 모든 자연수 n에 대해 성립함을 수학적 귀납법으로 설명하시오.

$$p_{00}=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^n}{a+b}$$

제시문 분석

1. 전이확률행렬과 조건M에 대해 소개하고 있다.

조건부 확률과 전이확률행렬에 대한 설명이 주어져 있고, '상태전이도'를 행렬로 표시하는 방법을 소개하고 있다. 또한 조건M을 제시하여 전이확률 행렬의 각 성분에 대한 설명과 n-단계 전이확률행렬에 대해 이해를 돕고 있다.

논제 분석

[문제 1-1] 전이확률행렬 P를 나타내고 P^2을 이용하여 2주 후 자가용으로 출근할 확률을 계산할 수 있는가?

먼저 금주에 자가용으로 출근한 사람이 2주 후 자가용으로 출근할 확률을 구한다. 그리고 금주 조사결과 직원의 60%가 자가용으로 출근했을 때 2주 후 자가용으로 출근할 직원의 비율을 계산한다. 뒤의 문제는 금주 자가용으로 출근한 사람이 2주 후 자가용으로 출근하는 경우와 금주 대중교통을 이용했지만 2주 후 자가용으로 출근하는 경우를 모두 고려해야 한다.

[문제 1-2] P^n을 계산하고 $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}$을 구할 수 있는가?

행렬의 거듭제곱을 구하는 문제로 성분의 행 또는 열의 합이 1인 경우, 즉 $a_n + b_n = 1$의 꼴은 P^n의 각 성분을 점화식을 이용하여 일반항을 구할 수 있다. $a_{n+1} = pa_n + q\,(p \neq 0, p \neq 1, q \neq 0)$, $|p| < 1$의 꼴은 일반항을 구하지 않고 극한값을 바로 계산할 수도 있다.

[문제 1-3] 수학적 귀납법

행렬P의 각 행의 각 성분의 합이 1일 때, P^n의 1행 1열의 성분의 일반항을 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

배경지식 쌓기

1. 행렬의 거듭제곱

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

2. 점화식

$a_{n+1} = pa_n + q(p \neq 0, p \neq 1,\ q \neq 0)$의 유형은 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형가능하며, 이때, $\{a_n - \alpha\}$는 첫 항이 $a_1 - \alpha$, 공비가 p 이고, 일반항은

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$

이다. 그러므로 $a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$이다.

(1) $|p| < 1$ 의 경우 $\lim_{n\to\infty} p^n = \lim_{n\to\infty} p^{n-1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{(a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha\} = \alpha$$

(2) $|p| > 1$ 의 경우는 발산한다.

3. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제$p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다는 것을 증명하라면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 은 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

풀어보기

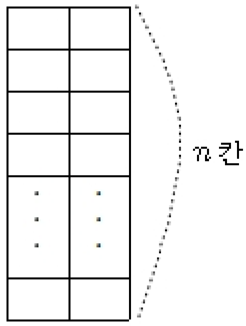
1. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 가

$$a_{ij} = i - j\ (i = 1, 2,\ j = 1, 2)$$

이다. 행렬 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2010}$ 의 $(2, 1)$ 의 성분을 구하시오. (2011 대수능)

2. $1L$ 의 물을 두 그릇 A, B에 나누어 부었다. 그 다음에 그릇 A의 물의 $\frac{1}{4}$을 퍼내어 그릇 B에 붓고, 다시 그릇 B의 물의 $\frac{1}{4}$을 퍼내어 그릇 A에 부었다. 이러한 작업을 한없이 계속할 때, 그릇 A에 들어 있는 물의 양을 구하시오.

3.[47] 오른쪽 그림과 같이 가로로 2칸, 세로로 n칸인 표의 각 칸에 위에서부터 차례로 ○표 또는 ×표를 그려 넣는 작업을 할 때, ×표는 가로로도, 세로로도 연속하여 그릴 수 없다고 한다. 세로로 n번째 줄의 칸까지 ○표 또는 ×표를 그려 넣을 수 있는 방법의 수 a_n을 점화식으로 표현하시오.



4. 어떤 회사에서 새로 추진하려는 사업에 대하여 전체 사원을 대상으로 세 차례에 걸쳐 찬반 의견을 조사하였다. 1차 조사 결과 찬성이 60 %, 반대가 40 %였다. 아래 표는 사업 설명회 이후 2차 조사 결과 1차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율과 사원 토론회 이후 3차 조사 결과 2차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율을 각각 나타낸 것이다.

변화 / 조사	직전 조사에서 찬성한 사원 중 반대로 의견을 바꾼 비율	직전 조사에서 반대한 사원 중 찬성으로 의견을 바꾼 비율
2차 조사 결과	20 %	30 %
3차 조사 결과	10 %	40 %

$A=(0.6\ \ 0.4)$, $B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$일 때, 3차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율을 나타내는 것은? (단, 기권한 사원은 없다.)

(2009 전국연합)

① ABC의 $(1, 1)$ 성분 ② ABC의 $(1, 2)$ 성분 ③ ACB의 $(1, 1)$ 성분
④ ACB의 $(1, 2)$ 성분 ⑤ AB^2 의 $(1, 1)$ 성분

47) 이성기 외1명 (2010) 수능아우라. 수리영역 수학Ⅰ. 1000제

읽기 자료

마르코프 연쇄

1. 마르코프[48)]

A. A. Марков (1886).

마르코프(Andre A. Markov, 1856~1922)는 러시아의 수학자로 확률과정이론, 특히 마르코프 연쇄라는 이론을 발전시켰다. 그의 연구는 상호종속적 사건들의 확률연구에 기초하여 발전했고 생물학과 사회과학에 널리 응용되었다. 그는 1886년부터 상트페테르부르크대학교에서 학생들을 가르쳤으며 1896년 러시아 과학 아카데미 회원이 되었다. 초기에는 정수론과 해석학 연구에 주력했는데 주로 연속분수, 적분의 극한, 근사치 이론, 급수의 수렴에 관계된 것이었다. 1900년 이후에는 주로 확률론에 연구를 집중시켰다. 그는 중심극한정리를 증명했는데, 이 정리는 많은 임의의 독립변수들의 합은 근사적으로 정규분포 또는 가우스 분포에 가까워진다는 것이다. 그뒤 연쇄 사건이라는 중요개념을 도입해서 상호 종속변수들의 연구로 전환했다. 그는 독립사건에 관한 몇몇의 고전적 결과를 일정한 형태의 연쇄로 확장했다.

2. 마르코프 연쇄[49)]

마르코프 연쇄(Markov chain)는 마르코프 성질을 가진 이산 시간 확률 과정이다. 러시아 수학자인 안드레이 마르코프의 이름에서 왔다.

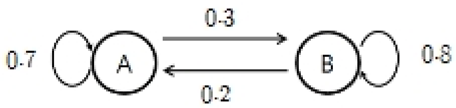
마르코프 연쇄는 시간에 따른 시스템 상태의 변화를 나타낸다. 매 시간마다 시스템은 상태를 바꾸거나 같은 상태를 유지한다. 상태의 변화를 **전이**라 한다. **마르코프 성질**은 과거와 현재 상태가 주어졌을 때의 미래 상태의 조건부 확률 분포가 과거 상태와는 독립적으로 현재 상태에 의해서만 결정된다는 걸 뜻한다.

48) 브리태니커 마르코프
49) 위키백과 마르코프 연쇄

3. 마르코프 연쇄의 활용[50)]

시장조사팀이 치약에 대한 소비자의 선호도를 알아보기 위하여 통제된 조사를 하려고 한다. 소비자 샘플은 200 명으로 구성하고 소비자 각자는 몇 개월의 기간 동안 두 제품의 치약을 사용한다. 조사 결과에 근거하여 조사팀은 치약의 선호도에 대하여 다음과 같은 통계를 얻었다.

어떤 달에 A브랜드를 사용한 사람의 70% 는 다음 달에도 같은 제품을 사용했으나 30% 는 B브랜드로 바꾸었다. 반면, B브랜드를 사용한 사람의 80% 는 다음 달에도 같은 제품을 사용했으나 20% 는 A브랜드로 바꾸었다. 이것은 백분율을 소수로 바꾸면 아래 그림과 같이 요약되며 확률과 동일하게 다룬다.



조사가 시작되었을 때, 120 명이 A브랜드를 사용하고 80 명이 B브랜드를 사용하고 있었다고 가정하자. 한 달 후, 각각의 브랜드를 사용하고 있는 사람은 몇 명이 되겠는가?

위 상황을 행렬의 곱으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

이 행렬을 P 라하고 $\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$, $\mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ 라 하자. 이때 x_1 의 각 성분이 A브랜드와 B브랜드의 한 달 후의 사용자 수이다. 이러한 표기법을 계속하여 x_k 를 k 개월 후에 각각의 치약을 사용하는 사용자 수라고 하면 다음 식을 만족한다.

$$\mathrm{x}_{\mathrm{k}+1} = P\mathrm{x}_\mathrm{k},\ \mathrm{k} = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{k} = P^\mathrm{k}\mathrm{x}_0,\ \mathrm{k} = 1, 2, \cdots$$

이때 P 를 추이행렬(transition matrix)이라 하고, x_0 와 P 를 알고 있으면 반복 계산하여 임의의 x_k 를 항상 구할 수 있다는 것을 의미한다. 또한 $(P^k)_{ij}$ 는 k 개의 추이에서 상태 j 에서 상태 i 로 변한 확률이 된다.

50) 선형대수학 (2010) David Poole 지음. 강혜정외 22명 옮김. 경문사

예시 답안

풀어보기 1

$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 이므로 $A^2=-E, A^3=-A, A^4=E$ 이다.

따라서 $A+A^2+A^3+A^4=O$ 이다.

$$\begin{aligned}A+A^2+\cdots+A^{2010}&=(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots+A^{2004}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{2009}+A^{2010}\\&=A^{2009}+A^{2010}=(A^4)^{502}A+(A^4)^{502}A^2=A+A^2=A-E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로 $(2,1)$ 의 성분은 1 이다.

풀어보기 2

n 번 작업 후에 두 그릇 A, B 에 들어있는 물의 양을 각각 a_n, b_n이라 하면

$$a_n+b_n=1\ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}\left(b_n+\frac{1}{4}a_n\right)=\frac{13}{16}a_n+\frac{1}{4}b_n=\frac{13}{16}a_n+\frac{1}{4}(1-a_n)$$

$$a_{n+1}=\frac{9}{16}a_n+\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{9}{16}x+\frac{1}{4} \qquad \therefore\ x=\frac{4}{7} \qquad \text{그러므로 } \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{7}$$

풀어보기 3

n 번째 줄이 (○, ○) 인 경우의 수를 b_n, n 번째 줄이 (○, ×) 인 경우의 수를 c_n, n 번째 줄이 (×, ○) 인 경우의 수를 d_n 이라 하면 $a_n=b_n+c_n+d_n$

(ⅰ) n 번째 줄이 (○, ○) 이려면 $(n-1)$ 번째 줄은 무엇이든 상관없다.

$$b_n=a_{n-1}$$

(ⅱ) n 번째 줄이 (○, ×) 이려면 $(n-1)$ 번째 줄은 (○, ○) 또는 (×, ○)

$$c_n=b_{n-1}+d_{n-1}$$

(ⅲ) n 번째 줄이 (×, ○) 이려면 $(n-1)$ 번째 줄은 (○, ○) 또는 (○, ×)

$$d_n=b_{n-1}+c_{n-1}$$

그러므로
$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+2b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}\\&=a_{n-1}+b_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1})\\&=2a_{n-1}+a_{n-2}\ (n=3,4,5\cdots)\end{aligned}$$

풀어보기 4

2차 조사에서 찬성한 사원의 비율과 반대한 사원의 비율을 나타내는 행렬이 $AB=(a\ \ b)$일 때, 3차 조사에서 찬성한 사원의 비율은 $0.9a+0.4b$로 행렬 ABC의 $(1,1)$성분과 같다.

문제

전이확률행렬 $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$이면, $P^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$이다.

(1) (i) 금주에 자가용으로 출근한 사람이 2주 후에 자가용으로 출근할 확률은

금주(자가용) → 다음주(자가용) → 2주 후(자가용) 의 경우: $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

금주(자가용) → 다음주(대중교통) → 2주 후(자가용) 의 경우: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

두 가지 경우의 합이다. (즉, P^2의 1행 1열의 성분의 값과 같다.)

따라서 $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ 이다.

(ii) 직원 전체의 인원을 A라 두면, 금주 자가용으로 출근한 직원의 수는 $0.6A$, 대중교통을 이용한 직원의 수는 $0.4A$이다.

금주에 대중교통으로 출근한 사람이 2주 후에 자가용으로 출근할 확률은

금주(대중교통) → 다음주(자가용) → 2주 후(자가용) 의 경우: $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

금주(대중교통) → 다음주(대중교통) → 2주 후(자가용) 의 경우: $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

두 가지 경우의 합이다. 따라서 $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ 이다.

따라서 금주 자가용으로 출근하고 2주 후 자가용으로 출근하는 경우는 $0.6A\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}A$이고, 금주는 대중교통으로 출근하지만 2주 후에 자가용으로 출근하는 확률은 $0.4A\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}A$이다. 그러므로 2주 후 자가용으로 출근할 직원의 비율은 $\frac{1}{3}+\frac{8}{45}=\frac{15+8}{45}=\frac{23}{45}$ 이다.

조건M의 2번에 의해 행렬의 곱으로 나타내면 다음과 같다.

$$(0.6A\ 0.4A)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=(0.6A\ \ 0.4A)\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{23A}{45} & \frac{22A}{45}\end{pmatrix}$$

(2) 전이확률행렬 $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 이고, $P^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ b_n & a_n\end{pmatrix}, a_n+b_n=1$ 라 두면

$P^{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ b_{n+1} & a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ b_n & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 이다. 따라서

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}(1-a_n)=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}$$

이고, 일반항을 구하면 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다. 나머지도 같은 방법으로 계산하면

$P^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 이다.

(3) 전이확률행렬을 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$, n-단계 전이확률행렬을 $\boldsymbol{P}^{(n)}=\begin{pmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{pmatrix}$이라고 하자.

$n=1$ 일 때 $P_{00}=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)}{a+b}=\frac{b+a-a(a+b)}{a+b}=1-a$ 이므로 성립한다.

$n=k$ 일 때 $P^{(k)}$ 의 P_{00} 를 $P_{00}=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^k}{a+b}$ 라 두면 조건M의 3과 4 에 의해 $P_{01}=1-\frac{b+a(1-a-b)^k}{a+b}$ 이다.

$P^{(k+1)}$ 의 $P_{00}=(P^{(k)}$의 $P_{00})\times(1-a)+(P^{(k)}$의 $P_{01})\times b$ 이므로

$$\begin{aligned}P_{00}&=\left\{\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^k}{a+b}\right\}(1-a)+\left\{1-\frac{b+a(1-a-b)^k}{a+b}\right\}b\\ &=\frac{\{b+a(1-a-b)^k\}(1-a)}{a+b}+\frac{\{a-a(1-a-b)^k\}b}{a+b}\\ &=\frac{b+a(1-a)(1-a-b)^k-ab(1-a-b)^k}{a+b}=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^k(1-a-b)}{a+b}\\ &=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^{k+1}}{a+b}\end{aligned}$$

따라서 모든 자연수 n에 대해 다음 식이 성립한다.

$$p_{00}=\frac{b}{a+b}+\frac{a(1-a-b)^n}{a+b}$$

20 한양대학교 모의

[논술 1] 다음 제시문을 읽고 지시에 따라 논술하시오.

제 시 문

(가) a가 양의 실수이고 n이 자연수라 하자. a의 n거듭제곱 a^n은

$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{번}}$$

으로 정의한다. a의 n제곱근 $\sqrt[n]{a}$는 방정식 $x^n = a$의 양의 실수해로 정의한다.

(나) a가 양의 실수이고 r이 양의 유리수라 하자. a^r은, r이 두 자연수 m, n이 있어서 $r = \dfrac{n}{m}$으로 표현될 때,

$$a^r = \sqrt[m]{a^n}$$

으로 정의한다. 즉, $x^m = a^n$의 양의 실수해로 정의한다.

(다) a가 양의 실수이고 x가 양의 실수라 하자. a^x은, $r_1, r_2, r_3, \cdots$가 x로 수렴하는 양의 유리수의 수열이라 할 때, 수열

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \cdots$$

이 수렴하는 실수로 정의한다.

(라) a가 양의 실수이고 x, y가 양의 실수이면

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

가 성립한다. 또한 $x < y$이고 $a > 1$이면

$$a^x < a^y$$

가 성립한다.

(1) $2^{\sqrt{2}}$이 $\dfrac{5}{2}$보다 크고 3보다 작은 수라는 것을 설명하시오.

(2) a가 양의 실수일 때 a^x를, x가 음 또는 영일 때에도 정의하고, 자신이 제시한 정의에 대해 그 적절성을 설명하시오.

[논술 2] 다음 제시문을 읽고 지시에 따라 논술하시오.

제 시 문

할당 문제(assignment problem)는 조합 최적화에 관한 문제인데, 다음과 같이 일반적인 형태의 문제로 나타낼 수 있다.

해야 하는 일들(tasks)과 수행할 기계들 또는 사람들 (agents)이 있다. 수행할 기계 또는 사람들에게 작업들을 어떻게 할당하느냐에 따라 비용이 달라지므로, 총비용을 최소화하는 할당을 찾아라.

사람들에게 할 일을 할당하는 문제, 축구 선수에게 포지션을 배정하는 문제 (예를 들어, 박지성 선수를 측면 공격수로 기용하는 것과 중앙미드필더로 기용하는 것 중 어느 것이 한국 대표팀의 역량을 보다 발휘시킬 수 있는가?) 또는 건설 현장에서 주어진 장비들을 활용하여 어느 곳에서 일을 하는 것이 좋은지에 대한 문제 등이 있다. 할당 문제에서는 해야 할 일의 가지 수와 수행할 기계 또는 사람의 수가 같고, 일대일대응으로 일이 주어진다고 가정한다. n 개의 일과 n명의 사람이 있다고 하자. 일을 사람들에게 할당하는 방법은 $n!$ 개가 있다. 이때 i번째 사람이 j번째 일을 하는 비용을 a_{ij}라고 하고, 행렬

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

를 **비용행렬(cost matrix)**라고 한다.

주어진 $n \times n$ 행렬 A에서 어느 두 개도 같은 행이나 열에 있지 않는 n개의 행렬 A의 성분들의 집합을 **할당(assignment)**이라 하고, 할당에 있는 n개의 원소들의 합을 **비용(cost)**이라 한다. 그리고, 가장 작은 비용(cost)을 갖는 할당(assignment)을 **최적 할당(optimal assignment)**이라 한다. 할당 문제는 주어진 비용행렬에서 최적 할당을 찾는 것이다. 예를 들어, n개의 장비를 n개의 건설 현장에 배정한다고 할 때 a_{ij}를 i번째 장비와 j번째 건설 현장과의 거리라고 하자. n개의 장비가 건설 현장으로 이동하는 총 거리가 가장 작은 할당이 최적 할당이다. 최적 할당을 찾는 알고리듬 중의 하나는 헝가리 방법이고, 이 방법은 5단계로 이루어져 있다. 이를 살펴보도록 하자.

1단계 : 각 행의 성분들을 그 행의 가장 작은 성분으로 빼시오.
2단계 : 1단계 결과의 행렬에서 각 열의 성분들을 그 열의 가장 작은 성분으로 빼시오.
3단계 : 1-2단계를 통해 구해진 행렬에서 0성분을 모두 포함하도록 행과 열에 직선들을 긋되, 직선의 개수가 최소가 되도록 하시오. (이 경우, 직선을 긋는 방법은 유일하지 않다.)
4단계 : 다음과 같은 방법으로 최적화를 판별하시오.
(i) 3단계에서 그어진 직선의 개수가 n개이면, 여기서 멈춘다.
(ii) 3단계에서 그어진 직선의 개수가 n개 미만이면, 5단계를 실행한다.
5단계 : 3단계에서 직선으로 그어지지 않은 모든 성분들을 그들 중에서 가장 작은 성분으로 빼고, 3단계부터 다시 실행하시오.

다음과 같이 4대의 불도저와 4곳의 건설 현장사이의 거리에 대한 비용행렬이 주어져 있다. (표 안의 단위는 km이다).

		건설 현장			
		1	2	3	4
불도저	1	90	75	75	80
	2	35	85	55	65
	3	125	95	90	105
	4	45	110	95	115

헝가리 방법을 사용하여 불도저들의 총 이동거리가 최소가 되도록 불도저를 배정하시오.

제시문 분석

1. <논술 1>

지수가 자연수, 양의 유리수, 양의 실수일 때 지수를 정의하고 있다.

2. <논술 2>

비용행렬에서 어느 두 개도 같은 행이나 열에 있지 않는 행렬의 성분들의 집합을 할당(assignment)이라 하고, 할당에 있는 n개의 원소들의 합을 비용(cost)이라 한다. 이때 가장 작은 비용(cost)을 갖는 할당(assignment)을 최적 할당(optimal assignment)이라고 하는데, 제시문은 최적 할당을 찾는 알고리듬 중의 하나인 헝가리 방법을 소개하고 있다.

논제 분석

[논제 1] "지수의 밑이 1보다 크면 증가함수이다."를 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가?

$\sqrt{2}$가 약 1.4임을 이용하여 $\sqrt{2}$의 범위를 찾을 수 있다. 또 이것을 이용하면 $\frac{5}{2} < 2^{\sqrt{2}} < 3$ 이 되는 과정을 유추할 수 있다.

[논제 2] 헝가리방법을 이해하고 적용할 수 있는가?

주어진 행렬이 4×4 행렬이므로 행렬에서 모든 0을 긋는 최소의 선의 개수가 4개가 되면 알고리즘을 멈춘다. 제시문의 최적할당을 이해하여 이동거리가 최소가 되도록 불도저를 배치할 수 있다.

배경지식 쌓기

1. 지수법칙

$a > 0$, $b > 0$ 이고, m, n 이 실수일 때,

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$　　(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$　　(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

2. 실수인 거듭제곱근

방정식 $x^n = a$ 의 근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

(1) n 이 홀수이면 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ 로 한 개 뿐이다.

(2) n 이 짝수이고 $a > 0$ 이면 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{a}$ 로 2개, $a = 0$ 이면 0으로 1개, $a < 0$ 이면 a 의 n 제곱근 중에서 실수는 없다.

풀어보기

1. m, n 이 자연수일 때 위의 지수법칙이 성립함은 알려져 있다. $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 으로 정의하면 m, n 이 음의 정수일 때, 지수법칙 (1)이 성립함을 증명하시오.

2. $a > 0$ 이고 임의의 유리수 r , s 에 대해 $a^r a^s = a^{r+s}$ 가 성립함을 증명하시오.

읽기 자료

영화 <뷰티플 마인드>와 게임이론

John Forbes Nash Jr.

그림 출처: www.Google.co.kr

<뷰티플 마인드>는 경제학자이자 수학자인 존 내쉬를 주인공으로 한 영화이다. 존 내쉬는 금발의 미녀를 둘러싼 남학생들의 심리적인 역학 관계에서 단서를 얻어 1949년 '내쉬 균형(Nash equilibrium)'이라는 개념을 내놓고 일약 천재적인 학자로 주목을 받았다.

그러나 그 후, 내쉬는 정신 분열증으로 인해 파란만장한 인생의 우여곡절을 겪으면서 4반세기가 지난 1994년에야 노벨 경제학상을 공동 수상했다. 내쉬의 균형 이론은 게임 이론의 발전에 크게 기여했다. 게임 이론은 각각 자신의 이익을 최대화하기 위해 경쟁할 때 최적의 선택을 하는 방법을 수학적으로 분석하는 이론이다.

게임 이론에는 상대방의 전략에 상관없이 자신의 최선의 전략이 결정되는 '결정 게임'과 이와 달리 상대방의 전략에 따라 자신의 전략이 달라지는 '비결정 게임'이 있다. 이 두 가지 중 비교적 간단한 결정 게임의 예는 다음과 같다.

1. 일본군과 연합군의 선택

1943년 일본군과 연합군은 뉴기니아 섬에서 대치하고 있었다. 일본군은 뉴브리턴 섬의 북쪽 항로(비스마르크 해)나 남쪽 항로(솔로몬 해) 중 한 곳을 선택하여 물자를 수송하고 병력을 이동시키려 하고, 연합군은 이동 중인 일본군을 폭격하기 위하여 마찬가지로 북쪽 항로나 남쪽 항로를 선택하려고 한다. 이때 각각의 경우 연합군이 일본군을 폭격할 수 있는 기간은 다음과 같다.

일본 연합군	북쪽 항로	남쪽 항로
북쪽 항로	2일	2일
남쪽 항로	1일	3일

연합군은 되도록 폭격 가능한 날을 늘리려고 하겠지만, 일본군은 줄이려고 할 것이다. 이 상황에서 연합군과 일본군의 최선의 전략은 무엇일까?

각 진영은 자신이 취하는 전략에 따라 일어날 수 있는 최악의 경우를 생각하고 그 중 나은 전략을 선택해야 한다. 연합군이 북쪽 항로를 택할 때에는 일본군의 선택과 상관없이 2일간 폭격할 수 있다. 또 연합군이 남쪽 항로를 택할 때에는 일본군이 북쪽 항로를 택하느냐, 남쪽 항로를 선택하느냐에 따라 각각 1일과 3일을 폭

격할 수 있으므로 최악의 경우는 1일이 된다. 연합군이 자신이 북쪽 항로와 남쪽 항로를 택할 때 각각 최소 폭격 일수인 2일과 1일 중에서 더 유리한 2일, 즉 북쪽 항로를 택하게 된다.

한편 일본군이 북쪽 항로를 택하면 연합국의 선택에 따라 각각 2일 또는 1일간 폭격을 받게 되므로 그 중 최악은 2일간 폭격을 받는 것이다. 일본군이 남쪽 항로를 선택할 때의 최악의 경우는 3일간 폭격을 받는 것이다. 이 중에서 피해가 적은 쪽은 2일, 즉 일본군이 북쪽 항로를 택할 때이다. 정리하면 연합군과 일본군은 모두 최악의 경우 중 최선인 북쪽 항로를 선택하게 된다.

연합군이 북쪽 항로를 택할 때의 최악은 2일 연합군이 남쪽 항로를 택할 때의 최악은 1일	⇒ 둘 중의 최선은 2일
일본군이 북쪽 항로를 택할 때의 최악은 2일 일본군이 남쪽 항로를 택할 때의 최악은 3일	⇒ 둘 중의 최선은 2일

예시 답안

풀어보기 1

$m=-p$, $n=-q$ (단, p, q 는 양의 정수)라 두면

$$a^m a^n = a^{-p}a^{-q} = \frac{1}{a^p}\frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

풀어보기 2

정수 $m, n, p, q\,(n, q>0)$ 에 대하여 $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ 라고 두면

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s}$$

논제 1 [51)]

먼저 $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$임을 관찰하자. 이것은

$$(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9} < 2 = \sqrt{2}^2, \quad (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2 = \sqrt{2}^2$$

으로부터 알 수 있다. 따라서, 제시문 (라)에 의해

$$2^{\frac{4}{3}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}}$$

을 얻는다.

이제 $(2^{\frac{4}{3}})^3 = (\sqrt[3]{2^4})^3 = 16$이고 $(\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8} < 16$이므로 $\frac{5}{2} < 2^{\frac{4}{3}}$이 성립하고,

$(2^{\frac{3}{2}})^2 = (\sqrt{2^3})^2 = 8$이고 $3^2 = 9 > 8$이므로 $2^{\frac{3}{2}} < 3$이 성립한다.

그러므로, $\frac{5}{2} < 2^{\frac{4}{3}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$이 성립하고, 특히 $\frac{5}{2} < 2^{\sqrt{2}} < 3$이라는 결론에 도달한다.

논제 2

x가 음수이면 $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$로 정의하고, $x = 0$이면 $a^0 = 1$로 정의하자.

그러면, x가 양수일 때, $a^{x+(-x)} = a^0 = 1$이고 $a^x a^{-x} = a^x \cdot \frac{1}{a^x} = 1$이므로 $a^{x+(-x)} = a^x a^{-x}$가 성립하게 된다.

일반적으로, $x < 0$, $y < 0$일 때,

$$a^{x+y} = \frac{1}{a^{-(x+y)}} = \frac{1}{a^{(-x)+(-y)}} = \frac{1}{a^{-x}a^{-y}} = \frac{1}{a^{-x}} \cdot \frac{1}{a^{-y}} = a^x a^y$$

이므로 $a^{x+y} = a^x a^y$가 성립한다.

또한, $x < 0$, $y > 0$이고 $x + y > 0$일 때,

$$a^{x+y} = \frac{1}{a^{-x}} \cdot a^{-x} a^{x+y} = a^x a^{(-x)+(x+y)} = a^x a^y$$

이고, 이 사실을 이용하면 $x < 0$, $y > 0$이고 $x + y < 0$일 때,

$$a^{x+y} = \frac{1}{a^{-(x+y)}} = \frac{1}{a^{-x}a^{-y}} = \frac{1}{a^{-x}} \cdot \frac{1}{a^{-y}} = a^x a^y$$

이므로, x와 y가 0 이 아닌 실수일 때, $a^{x+y} = a^x a^y$가 성립함을 알 수 있다.

51) 한양대 모의논술 해설

마지막으로 x 혹은 y가 0 이라 하자. $x=0$인 경우만 생각하면 충분하다.

$$a^{0+y}=a^y=1a^y=a^0a^y$$

이므로, 위에서와 같이 정의하면 $a^{x+y}=a^xa^y$가 모든 실수 x, y에 대해 성립함을 알 수 있다.

논제 3

제시문에서 주어진 헝가리 방법을 사용하기 위해 문제의 4대의 불도저와 4곳의 건설 현장사이의 거리를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{vmatrix}$$

헝가리 방법의 1단계를 적용하자. 즉, 1행의 모든 성분을 1행의 가장 작은 수 75로 빼면

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{vmatrix}$$

이다. 이와 같은 방법을 2, 3, 4행에 실행하면, 즉 2행의 모든 성분을 35로 빼고, 3행의 모든 성분을 90으로 빼고, 4행의 모든 성분을 45로 빼면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{vmatrix}$$

헝가리 방법의 2단계를 적용하자. 1, 2, 3열은 0을 포함하고 있으므로 0으로 각 성분을 빼도 같다. 4열에서 가장 작은 수인 5로 4열의 성분을 빼면

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{vmatrix}$$

을 얻는다. 위의 행렬에서 0성분을 모두 포함하게 행과 열에 선을 긋되 선의 개수를 최소로 하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{vmatrix}$$

행렬의 0인 모든 성분을 포함하게 긋는 선의 최소의 개수는 3이므로, 5단계를 실행한다. 5단계에 따라 3개의 선으로 그어지지 않은 성분 중 가장 작은 수인 20으로 선으로 그어지지 않은 성분들을 뺀다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{vmatrix}$$

위의 행렬을 0성분을 모두 포함하게 행과 열에 선을 긋되 선의 개수를 최소로 하자.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{vmatrix}$$

마찬가지로 선의 개수는 3개이므로 다시 5단계를 실행하자. 즉, 선으로 그어지지 않은 성분 중 가장 작은 수인 5로 선으로 그어지지 않은 성분을 모두 빼면, 다음 행렬을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{vmatrix}$$

위의 행렬에서 다시 0을 모두 포함하는 최소 개수의 선을 그으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{vmatrix}$$

위의 행렬에서 모든 0을 긋는 최소의 선의 개수는 4개이므로, 4단계의 (i)을 만족한다. 따라서 최적의 할당을 찾으면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 25 & \boxed{0} & 0 \\ 35 & \boxed{0} & 0 & 5 \\ \boxed{0} & 40 & 30 & 40 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 15 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & \boxed{0} \\ 35 & 0 & \boxed{0} & 5 \\ \boxed{0} & 40 & 30 & 40 \end{vmatrix}$$

첫째 행렬에서의 최적할당은 불도저 1은 건설 현장 4로, 불도저 2는 건설 현장 3으로, 불도저 3은 건설 현장 2로, 불도저 4는 건설 현장 1로 보내는 것이고, 이때 총 이동거리는

$$80 + 55 + 95 + 45 = 275\text{km}$$

이다. 둘째 행렬에서의 최적할당은 불도저 1은 건설 현장 2로, 불도저 2는 건설 현장 4로, 불도저 3은 건설 현장 3으로, 불도저 4는 건설 현장 1로 보내는 것이고, 이때 총 이동거리는

$$75 + 65 + 90 + 45 = 275\text{km}$$

이다. 불도저를 건설 현장에 총 이동거리가 최소가 되도록 배정하는 방법은 위의 2가지이고, 최소의 총 이동거리는 275km이다.

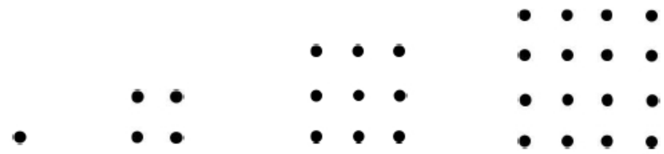
21 한양대학교 수시 2차(오전)

[논술 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

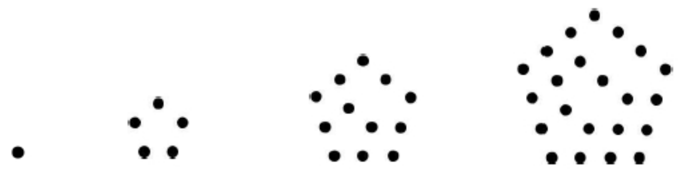
제 시 문

(가) 고대 그리스 시대의 피타고라스학파는 우주 만물이 수로 이루어져 있다고 믿었다. 그래서 도형을 이용하여 숫자를 표현하고 수와 도형의 관계를 연구하였다. 이렇게 하여 도형으로 묘사된 자연수를 형상수라고 한다. 여러 형상수에는 각각 일정한 규칙이 숨어 있는데 이것을 찾는 과정에서 여러 가지 수학적 사고를 할 수 있다. 삼각수는 다음 그림과 같이 삼각형으로 배열된 점의 개수로 $1, 3, 6, 10, \cdots$ 으로 나타난다.

사각수는 다음 그림과 같이 사각형으로 배열된 점의 개수로 $1, 4, 9, 16, \cdots$ 으로 나타난다.



오각수는 다음 그림과 같이 오각형으로 배열된 점의 개수로 $1, 5, 12, 22, \cdots$ 으로 나타난다.



(나) 용규는 수업 시간에 형상수에 대해 공부한 후 “삼각수이면서 동시에 사각수인 수는 어떤 것들이 있을까?”란 문제를 생각하고 다음과 같은 사실을 알게 되었다. m 번째 삼각수는 $\dfrac{m(m+1)}{2}$ 이고 n 번째 사각수는 n^2 이므로, 이 문제는 $\dfrac{m(m+1)}{2}=n^2$ 인 자연수 m 과 n 을 찾는 문제와 같다. 이 등식의 양변에 8 을 곱한 후 정리하면 $(2m+1)^2-2(2n)^2=1$ 이 되므로 이 문제는 쌍곡선의 방정식 $x^2-2y^2=1$ 을 만족하는 자연수 x 와 y 를 찾는 문제로 바뀌게 된다.

(다) 제시문<나>에 정의된 쌍곡선 위의 자연수 점 $(x, y) = (3, 2)$ 로부터, 무리수 $\sqrt{2}$ 를 사용하여 $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$ 을 인수분해하면 $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$ 을 얻게 되고 이를 전개하여 얻는 쌍곡선 위의 자연수 점 $(x, y) = (17, 12)$ 로부터 8 번째 삼각수인 36 이 6 번째 사각수와 같게 됨을 알 수 있다. 비슷한 방식으로 $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$ 의 양변을 여러 번 거듭제곱하여 위의 방법을 적용하면, 삼각수이면서 동시에 사각수인 수가 무수히 많음을 알 수 있다.

1. 제시문<가>에 주어진 그림을 참고하여 오각수들로 이루어진 수열의 일반항을 구하시오.

2. 제시문<나>를 사용하여 사각수이면서 동시에 오각수인 수들을 찾기 위하여 필요한 쌍곡선을 구하시오.

3. 제시문<다>를 사용하여 사각수이면서 동시에 오각수인 수들은 1 이외에 어떤 것이 있으며 그것들이 무수히 많은 지에 관하여 논하시오.

[논술 2] 다음 제시문을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 물음에 답하시오.

제 시 문

양의 실수 집합을 $R^{+}=\{x|x>0\}$ 로 표시하고, 함수 $f: R^{+} \to R^{+}$ 는 모든 양의 실수 s,t 에 대하여 $f(sf(t))=tf(s)$ 을 만족한다.

1. 어떤 양의 실수 a,b 에 대하여 $f(a)=a$, $f(b)=b$ 일 때, $f(ab)$ 를 구하시오.

2. $1 \in \{f(x)|x \in R^{+}\}$ 과 $f(1)=1$ 임을 설명하시오.

3. 만약 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 단 하나만 존재함을 밝히고 그 함수를 구하시오.

제시문 분석

1. 논술 1 제시문 (가)

점의 배열을 이용하여 삼각수, 사각수, 오각수들을 표현하고 있다.

2. 논술 1 제시문 (나)

삼각수이면서 사각수인 수를 찾는 문제를 쌍곡선 방정식의 자연수 해를 찾는 문제로 바꾸어 제시하고 있다.

3. 논술 1 제시문 (다)

제시문 (나)에서 정의된 쌍곡선을 이용해 삼각수이면서 사각수인 자연수를 찾는 방법에 대해 설명하고 있다.

4. 논술 2 제시문

양의 실수 집합에서 특정한 성질을 만족하는 함수를 제시하고 있다.

논제 분석

[논술 1]

1. 오각수로 이루어진 수열의 일반항을 점화식 혹은 계차수열의 일반항을 이용해 구하는 문제이다.

2. (문제 1)에서 구한 오각수로 이루어진 수열의 일반항과 사각수의 일반항을 이용해 사각수이면서 동시에 오각수인 수들을 찾기 위해 필요한 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는 지에 대한 문제이다.

3. (문제 2)에서 구한 쌍곡선의 방정식을 이용해 제시문 (다)와 같은 방법으로 사각수이면서 오각수인 수들을 찾는 문제이나 거듭제곱만으로 구해지지 않는 경우 세제곱 등을 활용해 본다.

[논술 2]

1~2. 함수의 조건과 주어진 함숫값의 조건을 이용해 함숫값을 구하는 문제이다.
3. (문제 2)에서 구한 조건과 주어진 함수의 부동점(고정점, fixed point) 성질을 이용해 함수의 유일성을 증명하고 함수를 직접 구하는 문제이다.

배경지식 쌓기

1. 수열의 귀납적 정의

(1) 계차수열 : 수열$\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_{n+1} - a_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$을 계차라 하고, 수열$\{b_n\}$을 계차수열이라고 한다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad (n \geq 2)$$

(2) 수열의 귀납적 정의(점화식) : 처음 몇 개의 항과 이들을 이용하여 차례로 그 다음 항을 정할 수 있는 관계식을 주어 수열을 정의하는 방법

① $a_{n+1} - a_n = d$ (일정) ⇒ 공차가 d 인 등차수열

② $a_{n+1} \div a_n = r$ (일정) ⇒ 공비가 r 인 등비수열

③ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ⇒ $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ ⇒ 등차수열

④ $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ ⇒ $a_{n+2} \div a_{n+1} = a_{n+1} \div a_n$ ⇒ 등비수열

⑤ $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$ $\Rightarrow$ 조화수열

⑥ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 의 꼴 $\Rightarrow$ n 에 1, 2, 3, ⋯, n-1 을 대입하여 얻은 식을 변변 더한다. $\Rightarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geq 2)$

⑦ $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ 의 꼴 $\Rightarrow$ n 에 1, 2, 3, ⋯, n-1 을 대입하여 얻은 식을 변변 곱한다. $\Rightarrow a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots f(n-1)$

⑧ $a_{n+1}=pa_n+q$ 의 꼴(단, p, q, α는 상수)

$\Rightarrow a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$의 꼴로 변형

⑨ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 꼴(단, $p+q+r=0$, p, q, r, k는 상수)

$\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ 의 꼴로 변형

⑩ $a_{n+1}=\frac{ra_n}{pa_n+q}$ 의 꼴 $\Rightarrow$ 양변에 역수를 취한다.

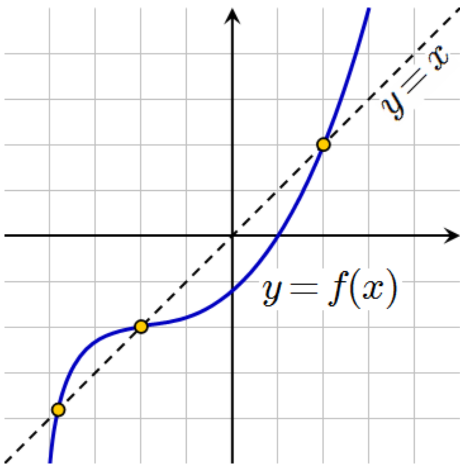
2. 부동점(고정점, fixed point)

x 가 함수 $f(x)$의 부동점(fixed point)이란 $f(x)=x$를 만족하는 점을 말한다. 예를 들어 $f(x)=x^2-3x+4$ 라 하면 $f(2)=2$가 되므로 2 가 부동점이다. (옆의 그림 참조)

모든 함수가 부동점을 가지는 것은 아니다.

예를 들어 함수 $f(x)$ 가 실변수 함수

$f(x)=x+1$ 이라 하면 이 함수는 부동점을 갖지 않는다.



풀어보기

1. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.52)

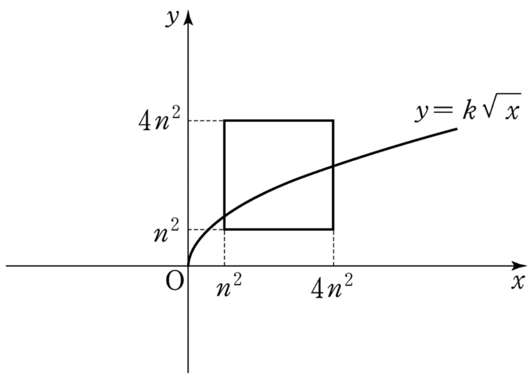
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

2. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 A_n 을 4개의 점

$$(n^2, n^2), (4n^2, n^2), (4n^2, 4n^2), (n^2, 4n^2)$$

을 꼭짓점으로 하는 정사각형이라 하자.

정사각형 A_n 과 함수 $y = k\sqrt{x}$ 의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 a_n 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?53)



<보 기>

ㄱ. $a_5 = 15$

ㄴ. $a_{n+2} - a_n = 7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 200$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 중간값의 정리를 이용하여 정의역과 공역이 모두 닫힌구간 $[0, 1]$인 모든 연속함수는 반드시 고정점을 갖는 것을 설명하시오.

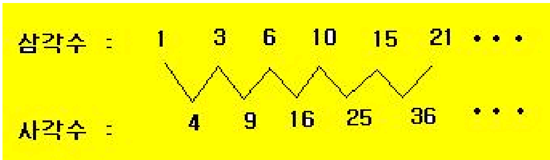
52) 2010 평가원
53) 2007 대수능

읽기 자료

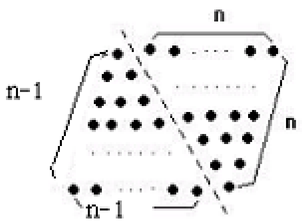
도형수 사이의 관계[54]

1. 삼각수와 사각수 사이의 관계

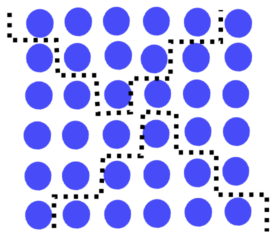
아래 그림은 삼각수와 사각수 사이의 관계를 나타낸 것이다.



이 그림으로부터 임의의 사각수는 연속하는 두 삼각수의 합임을 쉽게 유추할 수 있다. 즉, $S_n = T_n + T_{n-1}$ 이다. 연속하는 두 삼각수의 합이 사각수가 되는 이유를 $(n-1)$번째 삼각수의 그림과 n번째 삼각수의 그림을 거꾸로 붙여 $S_n = T_n + T_{n-1}$ 임을 설명할 수도 있다.



가로로 n개, 세로로 n개이다.
따라서, 전체 n^2개이다.



또한 그림과 같이 정사각형 모양으로 배열된 원 모양의 개수는 여러 가지 식으로 나타낼 수 있다. 그림과 같이 점선으로 묶으면 (1+3+5)×4는 가로 (5+1), 세로 (5+1)의 곱과 같다. 즉, $(1+3+5)\times 4 = (5+1)^2$ 이다.

그러므로 $1+3+5 = \frac{1}{4}(5+1)^2$ 이 된다.

위의 사실을 이용하여 n번째까지의 홀수의 합을 구하면

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{1}{4}\{(2n-1)+1\}^2 = n^2$$

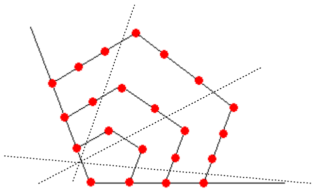
이다.

2. 오각수와 삼각수 사이의 관계

n번째의 오각수 P_n은 $(n-1)$번째 삼각수의 3배와 n과의 합임을 이용하여 P_n의 일반항을 구해 보자.

---

54) 한국교육개발원 수탁연구 RM 2004-4-14

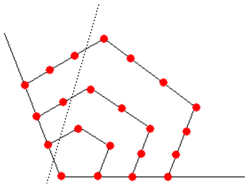


왼쪽의 그림은 P_4 의 그림이다. 이 그림으로부터 P_4 은 3 번째 삼각수 3 개와 4 개의 점으로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다. 이를 이용하여 일반화하면 다음과 같다.

$$\therefore P_n = 3T_{n-1} + n = 3\cdot\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

3. 오각수와 삼각수, 사각수 사이의 관계

n 번째의 오각수 P_n 은 $(n-1)$ 번째 삼각수와 n 번째 사각수의 합임을 이용하여 P_n 의 일반항을 구해보자.



왼쪽의 그림은 P_4 의 그림이다. 이 그림으로부터 P_4 은 3 번째 삼각수 1 개와 4번째의 사각수의 합으로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다. 이를 이용하여 일반화하면 다음과 같다.

$$P_n = T_{n-1} + n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n^2 - n + 2n^2}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

4. 사각수를 이용해 피타고라스의 수 생성하기

피타고라스 정리를 만족시키는 자연수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 몇 개일까? 세 자연수 a, b, c 가 $a^2 + b^2 = c^2$ 이라는 관계를 만족시키고 있을 때, a, b, c 를 피타고라스 수라고 한다.

3, 4, 5와 5, 12, 13이 피타고라스 수라는 것은 잘 알려진 사실이다.

또한, 3, 4, 5가 피타고라스 수이면 이들 각각을 2배 한 6, 8, 10도 피타고라스 수이고, 3배한 9, 12, 15도 피타고라스 수이므로 일반적으로 자연수를 k 배한 $3k, 4k, 5k$ 도 피타고라스 수임은 명백하다.

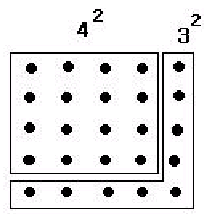
따라서 3, 4, 5라는 한 쌍의 피타고라스 수로부터 무한히 많은 피타고라스 수를 만들어낼 수 있다. 그러면 이렇게 분명한 경우들을 제외하고 피타고라스의 수는 모두 몇 개나 있을까?

피타고라스는 이렇게 분명한 경우를 제외하더라도 피타고라스의 수가 무수히 많이 있음을 홀수의 합이 사각수가 된다는 것을 사용하여 증명하였다.

먼저 다음과 같은 두 식을 살펴보자

$$1+3+5+7=4^2$$

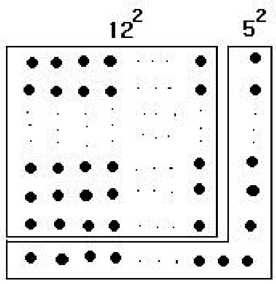
$$1+3+5+7+9=5^2$$



에서 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하고 $9=3^2$ 이라는 것에 주의하면 $4^2+3^2=5^2$ 이므로, 3, 4, 5 라고 하는 피타고라스 수를 얻게 된다.

위의 사실을 이용하여 한 쌍의 자연수를 정수 배(培)한 경우가 아닌 피타고라스의 수를 생성해 보자. 다음은 그 예이다.

(예제 1)



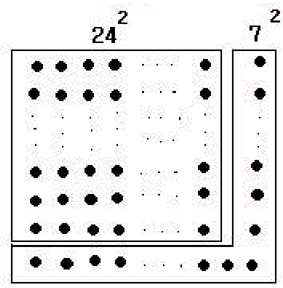
$1+3+5+\cdots+23=12^2$

$1+3+5+\cdots+25=13^2$

에서 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하고 $25=5^2$ 이라는 것에 주의하면

$12^2+5^2=13^2$이므로 5, 12, 13이라는 피타고라스의 수를 얻는다.

(예제 2)



$1+3+5+\cdots+47=24^2$

$1+3+5+\cdots+49=25^2$

에서 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하고 $49=7^2$ 이라는 것에 주의하면

$24^2+7^2=25^2$ 이므로 7, 24, 25이라는 피타고라스의 수를 얻는다.

부동점(고정점, fixed Point)[55]

1. 부동점의 개념

고정된 두 지점을 지나는 연속적인 임의의 두 함수가 적어도 한 개 이상의 만나는 점을 부동점(fixed point)이라고 한다.

2. 실생활에서의 부동점의 활용

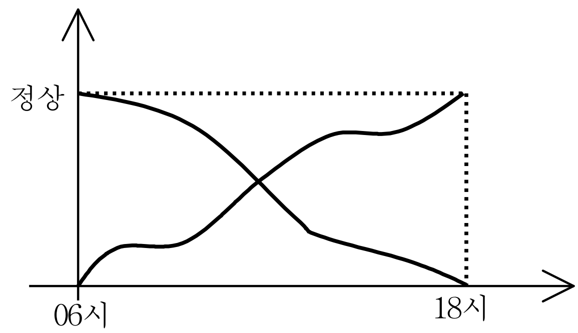
철수가 오전 6시에 정상을 향해 하나뿐인 등산로를 올라가기 시작한다. 가끔 쉬거나 경치를 보기 위해 몇 걸음 뒤로 돌아가기도 한다. 오후 6시에 산 정상에 도착

55) 사고의 전환을 통한 수학적 문제 해결력 제고, 경상북도교육청(2007)

하여 밤을 보내고 다시 오전 6시에 산을 내려온다. 올라갈 때와는 다른 곳에서 점심을 먹기도 하고 바위도 구경하면서 다시 오후 6시에 전날의 출발지점으로 돌아온다. 이 때 철수는 산을 올라가던 날과 내려가던 날, 정확히 같은 시간에 도달한 한 지점이 반드시 있음을 설명하시오.

[풀이]

Y축은 장소, X축은 오전 6시부터 오후 6시까지의 시간으로 잡고 걷기 함수의 연속성만 요구되면(즉, 등산로의 일부를 걷지 않고 높은 바위에서 아래로 뛰어내리거나 등산로가 아닌 지름길로 가는 경우 등을 제외하고) 상승과 하강그래프가 보여주듯 두 함수의 선이 어떻게 그려지든(철수가 아무리 빨리 걷거나, 멈추거나 뒤로 돌아간다고 해도)산을 오를 때와 내려갈 때, 정확히 같은 시간에 같은 지점을 반드시 한 번은 지나가게 된다.



3. 실생활에서의 고정점의 응용 예

(1) 봉세탁기, 카오스 세탁기 : 고정점이 생기는 것을 억제하여 빨래가 잘 되게 한다.

(2) 레미콘 차는 콘크리트를 회전이동으로 섞으면서 운행하면 상하좌우로 불규칙한 움직임으로 인해 고정점들이 옮겨 다니므로 잘 섞인다.

(3) 컵에 물을 가득 채우고 커피를 넣은 다음 컵의 위를 막고 흔들면 잘 섞이지 않지만, 물을 적당히 넣고 흔들면 평행이동이 일어나서 고정점이 생기지 않아 잘 섞인다.

(4) 우리나라 지도를 책상 위에 펼치면 실제의 장소와 지도상의 한 곳은 반드시 같은 위치에 놓인다.

(5) 고정점정리에서의 변환은 구김, 축소, 젓기 등의 수학적 또는 기계적 변환에 한정되지 않는다. 한 예로 우리 몸에서는 헤아릴 수 없을 정도의 많은 화학반응이 일어나며 이를 통해 원자와 분자는 시시각각 모습을 바꾼다. 그러나 이 변환에서도 변환 전후의 모습이 같은 경우가 존재해야 한다. 이런 점에서 유전자의 본체라고 할 DNA의 복제는 화학적 또는 생물학적 고정점이라고 말할 수 있다.

예시 답안

풀어보기 1

$a_{n+1}-a_n$

$=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$=(-1)^n(\dfrac{2n+1}{n}-\dfrac{2n+1}{n+1})$

$=(-1)^n(2+\dfrac{1}{n}-2+\dfrac{1}{n+1})$

$=(-1)^n(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})$

즉, $a_{n+1}-a_n=(-1)^n(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1})$이므로

$a_{20}=2+\sum_{k=1}^{19}(-1)^k(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1})$

$=2+\left\{-(1+\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})-\cdots\ -(\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20})\right\}$

$=2+(-1-\dfrac{1}{20})=1-\dfrac{1}{20}=\dfrac{19}{20}$

$\therefore\ p+q=39$

풀어보기 2

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 정사각형 A_n과 만날 필요충분조건은 두 점 $(4n^2,\ n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만날 때이다.

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$ 을 지날 조건은

$$n^2=k\sqrt{4n^2} \qquad \therefore\ k=\frac{n}{2}$$

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지날 조건은

$$4n^2=k\sqrt{n^2} \qquad \therefore\ k=4n$$

따라서 a_n 은 부등식 $\dfrac{n}{2}\le k\le 4n$을 만족하는 자연수 k 의 개수이다.

(i) n 이 홀수일 때

$$a_n=4n-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+1=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$$

(ii) n 이 짝수일 때

$$a_n = 4n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{7}{2}n + 1$$

$$\therefore\ a_n = \begin{cases} \frac{7}{2}n + \frac{1}{2} & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}n + 1 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

ㄱ. $a_5 = \frac{7}{2} \times 5 + \frac{1}{2} = 18$ (거짓)

ㄴ.

$$a_{n+2} = \begin{cases} \frac{7}{2}(n+2) + \frac{1}{2} = a_n + 7 & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}(n+2) + 1 = a_n + 7 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore\ a_{n+2} - a_n = 7 \text{ (참)}$$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_9 + a_{10})$

$= 12 + (12 + 14) + (12 + 2 \times 14) + \cdots + (12 + 4 \times 14)$

$= \frac{5}{2}\{12 + (12 + 56)\} = 200$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

풀어보기 3

(1) $f(0) = 0$ 또는 $f(1) = 1$ 이면 0 또는 1 이 부동점이 된다.

(2) $f(0) \neq 0$ 이고 $f(1) \neq 1$ 이라면 $f(x) \in [0,1]$ 이므로 $0 < f(0) \leq 1$이고 $0 \leq f(1) < 1$ 이어야 한다. 이때, $g(x) = f(x) - x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 연속이고, $f(0) - 0 > 0$ 이고 $f(1) - 1 < 0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $g(t) = 0$ 을 만족하는 $t \in [0,1]$ 이 존재한다. 따라서 t 는 $f(t) = t$ 를 만족하므로 함수 f 의 부동점이 된다.

논 술 1

1. 수열 $1, 5, 12, 22, \cdots$ 에서 계차의 일반항이 $3n+1$이므로 구하려는 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad (n \geq 1)$$

이다.

2. m번째 오각수는 $\dfrac{m(3m-1)}{2}$ 이고, n 번째 사각수는 n^2 이므로 사각수이면서 동시에 오각수인 수들을 찾는 문제는

$$\frac{m(3m-1)}{2}=n^2$$

을 만족하는 자연수 m , n 을 찾는 문제와 같다. 위 식의 양변에 24를 곱한 후 정리하면 $(6m-1)^2-6(2n)^2=1$이 되므로 이것은 쌍곡선 $x^2-6y^2=1$ 위의 자연수 점 $(x\,,y)$를 찾는 문제이다. (단, $x=6m-1$, $y=2n$, m과 n 은 자연수)

3. 1 은 사각수이면 오각수를 동시에 만족하므로 $m=1, n=1$ 을 대입하면 $x=5, y=2$ 이고 $5^2-6\cdot2^2=1$ 를 만족한다. 양변을 인수분해하면

$$(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1$$

이다. 양변을 세제곱하면

$$(485-198\sqrt{6})(485+198\sqrt{6})=1\cdots ㉠$$

$x=6n-1=485$ 이므로 $n=81$, $y=2m=198$ 이므로 $m=99$

즉, 사각수의 99 번째와 오각수의 81 번째가 9801 로 같은 값을 가진다.

양변을 다시 세제곱한다.

$$(485-198\sqrt{6})^3=485^3-3\cdot485^2\cdot(198\sqrt{6})+3\cdot485\cdot(198\sqrt{6})^2-(198\sqrt{6})^3=a-b\sqrt{6}$$

이므로, ㉠ 을 세제곱하여 정리한 식은 $(a-b\sqrt{6})(a+b\sqrt{6})=1$ 의 꼴을 만들 수 있다. 또한 이때 198 이 6 의 배수이고, 485 가 6 으로 나누었을 때 나머지가 5 이므로 a 는 항상 6 으로 나누었을 때 나머지가 5 이며, b 는 짝수가 된다.

같은 방식으로 계속 세제곱하면 사각수이면서 동시에 오각수인 수들은 무수히 많음을 알 수 있다.

논 술 2

1. 어떤 양의 실수 a , b에 대해 $ab=af(b)=f(a)b$ 이므로

$$f(ab)=f(bf(a))=af(b)=ab$$

이다.

2.

(풀이)

어떤 양의 실수 a, b 에 대하여 $f(a)>0, f(b)>0$ 이다. $f(a)=f(b)$ 라 두면

$$af(a)=f(af(a))=f(af(b))=bf(a)$$

이고, $f(a)\neq0$ 이므로 $a=b$ 이다. 즉, 일대일 함수이다.

따라서 $f(f(1))=f(1\cdot f(1))=1\cdot f(1)=f(1)$ 이므로 $f(1)=1$ 이다.

$1 \in R^+$ 이므로 $f(1) \in \{f(x) | x \in R^+\}$ 이다. 따라서 $1 \in \{f(x) | x \in R\}$ 이다.

(다른풀이)

$y = \dfrac{1}{f(1)} > 0$ 라 두면 $f(1 \cdot f(y)) = y \cdot f(1) = 1$ 이므로 $f(x) = 1$ 인 $x\,(x = 1 \cdot f(y))$ 가 존재한다. 따라서 $1 \in \{f(x) | x \in \mathrm{R}^+\}$ 이다. 그리고 $f(x) = 1$ 인 $x > 0$ 에 대해

$$f(1) = f(1 \cdot f(x)) = xf(1)$$

이고 $f(1) \neq 0$ 이므로 $x = 1$ 즉, $f(1) = 1$ 이다.

3.

(풀이)

만일 주어진 식 $f(x(f(y)) = yf(x)$ 에서 $y = x$ 라고 하면

$$f(xf(x)) = xf(x) \cdots\cdots ①$$

이므로 임의의 실수 x 에 대하여 $xf(x)$ 가 함수 f 의 부동점(혹은 고정점, fixed point)임을 알 수 있다.

①식에 $x = y = 1$ 을 대입하면 $f(f(1)) = f(1)$ 이고, $x = 1$, $y = f(1)$ 을 대입하면 $f(f(1)) = (f(1))^2$ 이다.

따라서 $(f(1))^2 = f(1)$ 을 알 수 있고, $f(1) > 0$ 이므로 $f(1) = 1$ 이다. 즉 1 이 f 의 부동점이다.

이제 1 이외에 부동점이 존재하지 않음을 증명해 보자.

(ㄱ) 만약 $a > 1$ 이 f 의 부동점이라고 하면, 즉 $f(a) = a$ 이면 $f(af(a)) = af(a)$ 이고 $f(a^2) = a^2$ 이므로 $f(a^4) = a^4, \cdots, f(a^{2n}) = a^{2n}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} f(a^{2n}) = \infty$ 이다. 이것은 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ 에 모순이다.

(ㄴ) $0 < a < 1$ 이 f 의 부동점이라고 하면, 즉 $f(a) = a$ 이면

$f(1) = f(\dfrac{1}{a} \cdot a) = f(\dfrac{1}{a} f(a)) = af(\dfrac{1}{a})$, $f(1) = 1$ 이므로 $f(\dfrac{1}{a}) = \dfrac{1}{a} > 1$ 이고, 이것은 구간$(0, 1)$ 에서 부동점이 존재한다는 가정에 모순이다.

따라서 1 이 f 의 유일한 부동점임을 알 수 있다.

즉, $xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ 이다.

(다른풀이)

주어진 조건에 $s = t = x$ 라 두면 $f(xf(x)) = xf(x), x > 0$ 이므로 $xf(x)$ 는 함수 f 의 부동점(고정점)이다. [문제 1]에 의해 함수 f 의 부동점들의 집합은 곱셈에 대하

여 닫혀있음을 알 수 있고, [문제2]에 의해 1 이 f 의 부동점임을 알 수 있다. 특히, a 가 부동점이라면, 모든 a 의 거듭제곱형태도 역시 f 의 부동점이다. 하지만 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이므로 1 보다 큰 부동점은 있을 수 없다.

$xf(x)$ 가 부동점이므로

$$xf(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le \frac{1}{x} \cdots ①$$

이고, 만약 $f(x)=x$ 이면 $xf\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x}f(x)\right)=f(1)=1$이므로 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$ 이 된다. 즉, 모든 $x>0$ 에 대하여 x 가 부동점이면 $\frac{1}{x}$ 역시 부동점이다.

따라서 모든 $x>0$ 에 대하여 $\frac{1}{xf(x)}$ 도 부동점이므로

$$\frac{1}{xf(x)}\le 1 \Leftrightarrow f(x)\ge \frac{1}{x} \cdots ②$$

임을 알 수 있다.

①, ② 에 의하여 $f(x)=\frac{1}{x}$ 가 되고, 이 함수가 가정을 만족하는 유일한 해이다.

MEMO

22 한양대학교 수시 2차(오후)

[논술 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제 시 문

대호는 점화식

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\ (p\neq 0,\ n\geq 1)\cdots ㉠$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하려고 여러 가지 시도를 하다가, 수열이 등비수열 또는 등비수열들의 합의 형태로 나타난다고 예상을 하였다. 실제 $p+q+r=0$ 인 경우, 어떤 0 이 아닌 t 에 대해 등비수열 $\{t^n\}$ 이 점화식 ㉠ 을 만족한다고 가정하면 $pt^{n+2}+qt^{n+1}+rt^n=0$ 이므로 $pt^2-(p+r)t+r=0$ 이 되어
$(pt-r)(t-1)=0$
을 만족한다. 즉 $t=\dfrac{r}{p}$ 또는 $t=1$ 이 되어, 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{r}{p}\right)^n\right\}$ 또는 $\{1^n\}$ 이 되어 점화식 ㉠ 을 만족한다. 뿐만 아니라, 임의의 c_1, c_2 에 대해 수열
$\left\{c_1\left(\dfrac{r}{p}\right)^n+c_2(1)^n\right\}$
역시 점화식 ㉠ 을 만족한다.

1. 대호의 방법을 사용하여 다음 점화식

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n\ (n\geq 1)$$

으로 정의되는 수열의 일반항을 구하시오.

2. 초깃값 a_1 과 a_2 가 어떻게 주어지더라도 점화식 ㉠ 을 만족하는 등비수열의 합으로 이루어진 수열 $\{a_n\}$ 이 단 하나 존재할 조건을 논하시오.

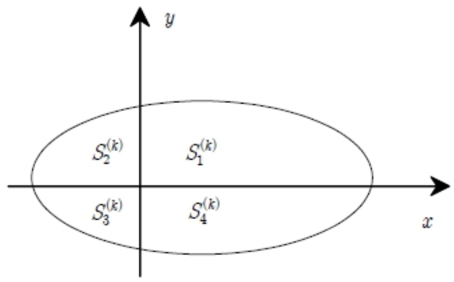
[논술 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제 시 문

택연이는 자연수 $k=1,2,\cdots,100$ 에 대해 점 $\left(k,\frac{1}{k}\right)$ 을 중심으로 하는 타원

$$E:\ \frac{(x-k)^2}{k}+\frac{\left(y-\frac{1}{k}\right)^2}{\frac{1}{k}}=2\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

을 인쇄하였다. 모든 k 에 대해 타원E를 다음과 같이 x 축과 y 축을 기준으로 4 개의 영역으로 나누어서 각각 $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ 라 하고, 영역 $S_1^{(k)}$ 와 $S_3^{(k)}$ 에 파랑색을 칠하고 다른 두 영역 $S_2^{(k)}$ 와 $S_4^{(k)}$ 에는 빨강색을 칠하였다.



3. $k=1$ 이면 중심이 $(1,1)$ 이고 반지름이 2 인 원임을 알 수 있다. 이때, 영역$S_1^{(1)}$ 의 면적을 구하시오.

4. 100 개의 타원들에 칠해진 파랑색 면적의 합과 빨강색 면적의 합의 차이에 대해서 설명하시오.

제시문 분석

1. 논술 1 제시문

점화식

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\,(p\neq 0,\, n\geq 1)\cdots ㉠$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 등비수열 또는 등비수열들의 합의 형태로 나타난다는 예상 하에 일반항을 구하고 있다.

2. 논술 2 제시문

좌표축에 의해 분할되는 타원 영역의 면적을 구할 수 있다.

논제 분석

[문제 1] 대호의 방법을 사용하여 다음 점화식 $a_1=0,\, a_2=1,\, a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n\,(n\geq 1)$ 으로 정의되는 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

제시문의 설명처럼 이차방정식의 근을 구하여 그 근에 의해서 조건에 맞는 일반항을 구할 수 있다.

[문제 2] a_1 과 a_2 에 상관없이 등비수열의 합으로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 단 하나 존재할 수 있는가?

조건을 적절하게 주면 일반항이 단 하나 존재할 수 있다.

[문제 3] 곡선이 원일 때 주어진 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

주어진 원을 그림으로 그려서 주어진 영역의 넓이를 기하적인 방법으로 구할 수 있다.

[문제 4] 여러 개의 타원으로 겹쳐지는 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

겹쳐지는 부분의 그림을 그려서 주어진 영역의 넓이를 기하적인 방법으로 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

1. 점화식

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 꼴 (단, $p+q+r=0$, p, q, r, k 는 상수)

$\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ 의 꼴로 변형

2. 이차곡선

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동하면

$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$이고 이것을 전개하면

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$(단 $A\neq B$, $AB>0$)이다.

풀어보기

1. $a_0=1$, $a_1=1$, $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}(n\geq 2)$ 일 때 수열$\{a_n\}$ 의 일반항을 구하시오.

2. 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 타원 $4x^2+9y^2=36$ 위를 움직일 때, 직선 $ax+by=1$이 지나지 않는 영역의 넓이를 구하시오.

3. 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$의 $y\geq 0$부분을 L이라 하고, 두 원 $(x-1)^2+y^2=1$ $(x+1)^2+y^2=1$의 $y\leq 0$ 부분을 각각 M, N이라 한다. 점 P가 L위를, 점 Q가 M위를, 점 R가 N위를 각각 움직일 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최댓값을 구하시오

읽기 자료

일반화에 대한 탐구56)

1. 선형동차 점화식

k가 고정된 자연수라고 할 때, 수열 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 에 대하여 어떤 수량 c_1, c_2, $\cdots$, c_k 와 n 에 관한 식 $f(n)$ 이 있어서

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k) \text{ ----㉠}$$

이 성립할 때, 등식 ㉠을 이 수열의 점화식이라고 한다.

또한, c_1, c_2, $\cdots$, c_k 가 상수일 때 ㉠을 선형점화식이라 하고, 특히 $f(n)=0$ 일 때

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (\text{단, } c_k \neq 0\,) \text{ ----㉡}$$

꼴의 점화식을 k차 '선형동차점화식(Homogeneous Linear Recurrence)'이라고 한다. 이를테면 등비수열의 점화식 $a_n = r a_{n-1}$ 은 선형동차점화식이다.

초깃값으로 $a_0 = k$ 가 주어지면 이 점화식으로부터 $a_n = kr^n$ 을 얻을 수 있다.

이 예와 같이 많은 선형동차점화식의 해는 지수함수들의 일차결합으로 나타난다.

또한, ㉡에 대하여

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0 \quad (\text{단, } c_k \neq 0\,) \text{ ----㉢}$$

를 ㉡의 '특성방정식'이라 하고 특성방정식의 근을 '특성근'이라 한다. $c_k \neq 0$ 이므로 특성근은 0 이 아니다.

정리 1 (특성근의 성질 [1])

$\lambda \neq 0$ 일 때, $a_n = \lambda^n$ 이 점화식 ㉡을 만족할 필요충분조건은 λ 가 특성근이다.

(증명)

$a_n = \lambda^n$ 이 ㉡을 만족한다.

$\Leftrightarrow \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \cdots - c_k \lambda^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^{n-k}(\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \cdots - c_k) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \cdots - c_k = 0 \; (\because \; \lambda \neq 0\,)$

$\Leftrightarrow \lambda$: 특성근

정리 2 (특성근의 성질 [2])

n 에 관한 식 $f_1(n)$, $f_2(n)$, $\cdots$, $f_p(n)$ 이 각각 ㉡을 만족하면 이들의 일차결합도 ㉡을 만족한다. (상수 a, b 에 대하여 $ax+by$ 를 x, y 의 일차결합이라 한다.)

56) 사고의 전환을 통한 수학적 문제 해결력 제고, 경상북도교육청, 2007

(증명)

상수 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k$ 에 대하여 $F(n)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(n)$ 으로 두면,

$F(n)=c_1F(n-1)+c_2F(n-2)+\cdots+c_kF(n-k)(n\ge k)$

가 성립함을 보이면 된다. k 개의 등식

$$c_1F(n-1)=c_1\alpha_1 f_1(n-1)+\cdots+c_1\alpha_p f_p(n-1)$$
$$c_2F(n-2)=c_2\alpha_1 f_1(n-2)+\cdots+c_2\alpha_p f_p(n-2)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$c_kF(n-k)=c_k\alpha_1 f_1(n-k)+\cdots+c_k\alpha_p f_p(n-k)$$

를 변변 더하면

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{k}c_iF(n-i)=\alpha_1\sum_{i=1}^{k}c_if_1(n-i)+\cdots+\alpha_p\sum_{i=1}^{k}c_if_p(n-i)$$
$$=\alpha_1 f_1(n)+\cdots+\alpha_p f_p(n)=F(n)$$

정리 3 (특성근과 수열의 일반항과의 관계)

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p$ 가 특성방정식 ㉢의 서로 다른 특성근이면

$\lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \cdots,\ \lambda_p^n$ 의 임의의 일차결합은 점화식 ㉡을 만족한다.

2. 특성근이 중근을 갖는 선형동차점화식

정리 4 (점화식의 해법[1])

점화식 ㉡에 대하여 $F(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_{k-1}x-c_k$ (단, $c_k\neq 0$) 에서 λ 가 $F(x)=0$ 의 중근이면 $\lambda^n,\ n\lambda^n$ 은 점화식 ㉡을 만족한다.

(증명)

$a_n=n\lambda^n$ 이 ㉡을 만족함을 보이면 충분하다.

$g(x)=x^{n-k}F(x)=x^n-c_1x^{n-1}-c_2x^{n-2}-\cdots-c_kx^{n-k}$ 에서

$g'(x)=nx^{n-1}-c_1(n-1)x^{n-2}-c_2(n-2)x^{n-3}-\cdots-c_k(n-k)x^{n-k-1}$ 이고

$xg'(x)=nx^n-c_1(n-1)x^{n-1}-c_2(n-2)x^{n-2}-\cdots-c_k(n-k)x^{n-k}$ 이다.

λ 가 $F(x)=0$ 의 중근이므로 $(x-\lambda)^2\mid F(x)$,

$(x-\lambda)^2\mid g(x),\ (x-\lambda)\mid g'(x)$ 이므로 $(x-\lambda)\mid x\cdot g'(x)$ 이다. (단, $f(x)|g(x)$ 는 $f(x)$ 가 $g(x)$ 의 약수임을 뜻한다.)

그러므로, $n\lambda^n-c_1(n-1)\lambda^{n-1}-c_2(n-2)\lambda^{n-2}-\cdots-c_k(n-k)\lambda^{n-k}=0$ 이다.

$\therefore\ a_n=n\lambda^n$ 이 ㉡을 만족한다.

정리 5 (점화식의 해법[2])

λ가 특성방정식의 $p-$중근일 때, λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, $\cdots$, $n^{p-1}\lambda^n$ 의 각각이 점화식을 만족하면, λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, $\cdots$, $n^{p-1}\lambda^n$ 의 일차결합이 점화식의 일반해이다.

(증명)

위(정리 3)와 (정리 4)에 의해 명백하다.

예시 답안

풀어보기 1

$x^2-5x+6=0$, 즉 $(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore\ a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot 3^n$

초깃값을 대입하면, $\alpha+\beta=1,\ 2\alpha+3\beta=1$ $\quad\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-1$

$$\therefore\ a_n=2^{n+1}-3^n\ (n\geq 0)$$

풀어보기 2

점 P가 타원 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{4}=1\cdots\cdots$ ①을 만족한다. 이 때, 직선 $ax+by=1$이 등식 ①을 만족하므로 $\dfrac{a}{3}=A,\ \dfrac{b}{2}=B,\ 3x=X, 2y=Y$ 라고 하면 등식 ①은 $A^2+B^2=1\ \cdots\cdots$ ②

직선 $ax+by=3A\cdot\dfrac{X}{3}+2B\cdot\dfrac{Y}{2}=1$ $\quad\therefore AX+BY=1\ \cdots\cdots$ ③ 이 성립한다.

②, ③식을 만족하는 A, B가 존재하려면 원 ②의 중심 $(0,0)$에서 직선 ③까지의 거리가 원 ②의 반지름인 1 이하이어야 한다.

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\leq 1$ $\quad\therefore X^2+Y^2\geq 1$ 즉, $(3x)^2+(2y)^2\geq 1$

$\therefore$ 구하는 점 (x,y)의 영역은 $9x^2+4y^2<1$이어야 한다.

이 영역은 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}<1$이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\therefore S=\pi\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

풀어보기 3

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 초점을 $F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=4$ 또, $\overline{PQ}\le\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PF}+1$, $\overline{PR}\le\overline{PF'}+\overline{RF}=\overline{PF'}+1$이므로
$\overline{PQ}+\overline{PR}\le(\overline{PF}+1)+(\overline{PF'}+1)=(\overline{PF}+\overline{PF'})+2=4+2=6$

문 제 1

제시문에 의해 등비수열 $\{t^n\}$이 점화식 $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n\ (n\ge1)$을 만족한다고 가정하면

$$t^{n+2}=2t^{n+1}+3t^n \text{ 즉, } t^2-2t-3=0$$

가 되고 $t=3\,,-1$이므로 $\{3^n\}$과 $\{(-1)^n\}$과 $a3^n+b(-1)^n$꼴이다. 여기서 $\{3^n\}$과 $\{(-1)^n\}$은 $a_1=0, a_2=1$를 만족하지 않는다. 따라서
$3a-b=0$, $9a+b=1$이 되고, 이 식을 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{4}$이므로 구하려는 수열의 일반항 a_n은

$$a_n=\frac{3^n}{12}+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{1}{4}\{3^{n-1}+(-1)^n\}\ (n\ge1)\text{이다.}$$

문 제 2

제시문에 의해 $pt^2+qt+r=0\ (p\ne0)$의 두 근을 α,β라고 하면 임의의 c_1,c_2에 대해 $a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$이다. 따라서

$$c_1\alpha+c_2\beta=a_1$$
$$c_1\alpha^2+c_2\beta^2=a_2$$

이고 행렬의 곱셈으로 표현하면

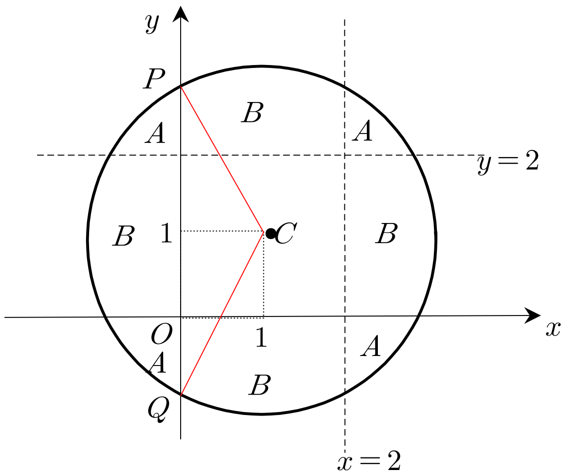
$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

이다. 초깃값 a_1과 a_2가 어떻게 주어지더라도 수열 $\{a_n\}$이 단 하나 존재하기 위해서는 $\alpha\beta^2-\alpha^2\beta\ne0$이어야 한다. $\alpha\beta(\beta-\alpha)\ne0$이므로 $\alpha\ne0, \beta\ne0, \alpha\ne\beta$이다.

즉, 두 근이 모두 0이 아니며 또한 두 근은 서로 같지 않아야 한다.

문 제 3

x축, y축을 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$의 중심 $C(1,1)$에 대해 대칭이동시킨 직선은 $x=2$와 $y=2$가 되고, 이들 네 직선에 의해 원이 나누어지는 부분의 면적을 각각 A, B라 하면 원의 대칭성에 의해 아래 그림과 같이 된다.



$4(A+B)+4=4\pi$ 이고 부채꼴 CPQ의 면적이 $\frac{4\pi}{3}$, $\triangle CPQ=\sqrt{3}$ 이므로

$$A+B=\pi-1 \cdots ① \quad , \quad 2A+B=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3} \cdots ②$$

을 얻는다. 이 식을 풀면

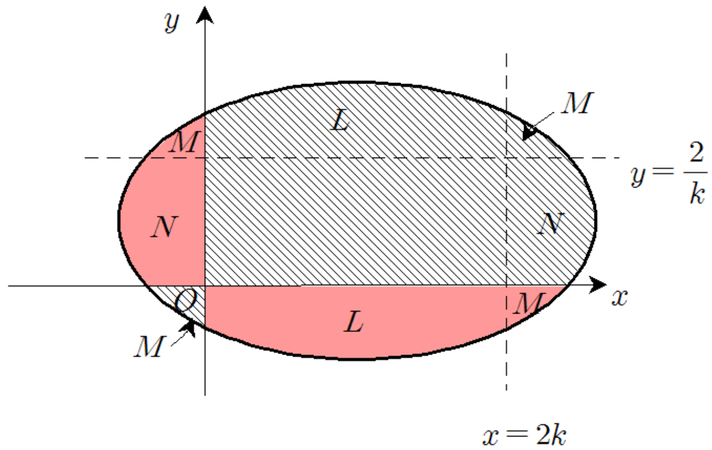
$$A=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1,\ B=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-2$$

를 얻는다. 따라서

$$S_1^{(1)}=A+2B+4=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}+1$$

문 제 4

x축, y축을 타원의 중심 $\left(k, \frac{1}{k}\right)$에 대해 대칭이동 시킨 직선은 $x=2k$와 $y=\frac{2}{k}$가 되고, 이들 네 직선에 의해 타원이 나누어지는 부분의 면적을 각각 L, M, N라 하면 타원은 타원의 중심에 대해 대칭이므로 아래 그림과 같이 된다.



이 때 빗금친 부분의 면적과 색이 칠해진 부분의 면적의 합의 차이는

$$S_1^{(k)}+S_3^{(k)}-\left(S_2^{(k)}+S_4^{(k)}\right)=L+2M+N+2k\cdot\frac{2}{k}-(L+2M+N)=4$$

로 일정하다. 따라서 구하려는 도형의 넓이의 합의 차이는 사각형 넓이의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{100}\left(2k\cdot\frac{2}{k}\right)=\sum_{k=1}^{100}4=400$$

이 된다.

MEMO

발간을 도와주신 분들

기 획

구 자 익	부산광역시교육청	교육정책국장
김 동 원	부산광역시교육청	교수학습기획과장
윤 재 희	부산광역시교육청	교수학습기획과 학력지원담당장학관
이 호 종	부산광역시교육청	교수학습기획과 장학사

집필위원

김 기 현	부산동고등학교
김 무 진	부산과학고등학교
김 정 수	부산과학고등학교
김 현 미	낙동고등학교
박 철 호	부산백양고등학교
신 동 연	구덕고등학교
오 정 임	부산장안고등학교
원 태 경	사상고등학교
임 승 윤	부산중앙고등학교
전 현 수	부산국제외국어고등학교
정 순 진	금명여자고등학교
최 기 원	신정고등학교

검토위원

박 재 희	경기과학고등학교

수리논술 나침반 Ⅲ

발 행 일	2011. 4. 22.
편집 · 발행	부산광역시교육청

이 책자는 부산광역시대학진학지원센터 홈페이지에서 파일을 다운받아 사용할 수 있습니다.
홈페이지주소 http://jinhak.pen.go.kr/(대학별고사/논·구술·면접 기출문제)