

부산교육 2009-148

2009학년도 대학별 수리논술고사 분석

수리논술 나침반



부산광역시교육청

<http://www.pen.go.kr>

발 간 사



논술 공부를 위해서는 다산 정약용 선생의 공부 방법 중 '종합 파즐법(綜覈爬櫛法)'을 권할 만합니다. 복잡한 것을 종합하여 하나 하나 살피고, 가려운 데를 시원하게 긁고, 헝클어진 머리카락을 빗질 하듯 깔끔하게 정리해내는 것으로 공부의 가닥을 잡아야 튼튼한 학문적 토대를 마련할 수 있기 때문입니다.

왕명으로 화성(華城)을 설계할 때 다산 선생은 군사적·상업적 목적을 동시에 실현하는 아름다운 성곽 축조라는 목표 외에도 공기 단축과 경제적 비용 절감을 함께 고민했습니다. 다산은 현안을 해결 하기 위해 당시 기술력에서 앞서 있었던 중국과 서양의 과학서적을 뒤지며 생각을 넓고 깊게 펼쳐 갔습니다.

정보를 분석하고 체계화한 그는 마침내 수레바닥의 높이를 높이고, 수레의 무게중심을 평형으로 유지시켜 주는 장치인 '복토'를 고안합니다. 부러지기 쉬운 바퀴살 대신 서로 엇갈리는 버팀대를 대어 바퀴를 튼튼하게 만들고, 저울의 원리를 이용하여 바퀴와 짐대 사이에 반원 모양의 부품을 덧댄으로써 수레가 비탈길에서도 빠르고 가볍게 움직일 수 있는 신기술을 창안한 것입니다. 거중기(舉重機), 녹로(轆轤)와 함께 화성을 축조할 때 널리 활용된 유형거(游衡車)는 단 70대만으로 일반수레 200대의 성과를 능가하였습니다.

동양 성곽의 백미로 평가받는 화성의 축조 과정에서 우리가 배워야 할 것은 다산의 천재성이 아니라, 현안을 해결하는 방식과 태도입니다. 다산은 사물의 뿌리를 캐면서 방증이 될 만한 자료들을 수집하여 수렴과 확산의 과정을 반복하면서 문제의식을 심화하고 원리를 찾아내었습니다. 작은 의문을 발전시켜 계통을 갖춘 지식으로 나아가는 공부의 과정과 단계를 보여 준 것입니다. 이것이 정보 미디어의 세례 속에서 교육 관련 정보가 홍수처럼 쏟아지고 있는 현실에서 우리가 새삼 다산을 주목해야 하는 이유입니다.

대학별로 실시하고 있는 수리논술고사에 대한 정보는 곳곳에 흩어져 있지만, 정작 교사들의 손에 잡히는 정보만을 가려 담아 놓은 책은 쉬 눈에 띄지 않습니다. 기출문제를 보여주지만 하는 것이 아니라 논술고사의 출제 경향과 심도 있는 분석, 조리 있는 설명 등이 덧붙여야 제대로 된 자료라 할 수 있습니다. 무엇을 공부해야 효과적인 대비가 되는지를 알려 준다면 더없이 좋을 것입니다. 이러한 현실을 고려할 때 본 장학자료는 실로 명쾌하고 통쾌합니다.

이 책이 교실 수업의 질을 제고하는 데 크게 기여하기를 기대하며, 자료 개발을 위해 열정과 헌신을 아끼지 않으신 우리교육청 논술교육지원단과 수학나침반 동아리 교사 여러 분께 감사의 말씀을 드립니다.

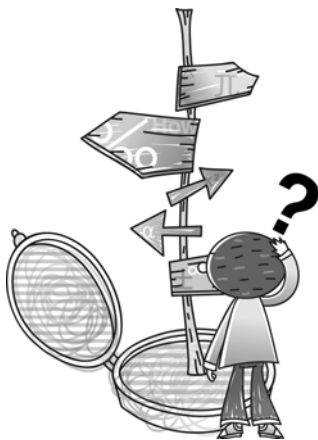
2009. 6. 15.

부산광역시교육감 설 동 근

차례

ICIOINITEINIS

2009학년도 대학별 수리논술고사 분석
수리논술 나침반



발 간 사

제 1 부

서울대학교

- 1. 정시 문항 4-(1) 3
- 2. 정시 문항 4-(2) 12
- 3. 정시 문항 4-(3) 19
- 4. 정시 문항 4-(4) 28

고려대학교

- 5. 모의논술 37
- 6. 수시 2-(가) 45
- 7. 수시 2-(나) 55

연세대학교

- 8. 모의 문항 (1) 62
- 9. 모의 문항 (2) 74
- 10. 수시 2 84

제 2 부

경북대학교

- 1. 수시 2-2 97

경희대학교

- 2. 수시 2-1 104

서강대학교

- 3. 수시 2-1 115

서울시립대학교

- 4. 모의논술 126
- 5. 수시 2-1 141

성균관대학교

- 6. 예시 문항 151

숙명여자대학교

- 7. 수시 160

아주대학교

- 8. 예시 문항 (1) 168
- 9. 예시 문항 (2) 182

인하대학교

- 10. 수시 2-1 195
- 11. 수시 2-2 203

한국외국어대학교

- 12. 수시 2 216

한양대학교

- 13. 예시 문항 223
- 14. 수시 2 230

제 1 부



- ➡ 서울대학교
- ➡ 고려대학교
- ➡ 연세대학교



서울대학교 정시 문항 4-(1)

제시문

(가)

여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m 인 물체의 운동을 기술해보자. y 를 용수철 평형점으로부터의 변위(길이라 하고 용수철 상수를 k 라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$ 가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$ 로 표시되는데 가속도 a 는 속도 v 의 도함수이고, 속도 v 는 위치 y 의 도함수이므로 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)$ 이고, y 를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)$, 즉 y 의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 로 나타내면, 관계식

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \quad \text{---(1)}$$

을 얻는다. ($y=f(t)$ 인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 를 $f''(t)$ 로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 미분방정식이라 부른다.

상수 a 에 대해

$$\frac{d \sin at}{dt} = a \cos at, \quad \frac{d \cos at}{dt} = -a \sin at$$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$ 를 미분방정식 (1)에 대입했을 때 모든 t 에 대하여 등호가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $y = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$ 가 미분방정식 (1)을 ‘만족’시킨다고 말한다. 이와 같이 ‘주어진 미분방정식을 만족시키는 함수’를 그 미분방정식의 해라고 부른다.

논의를 진행하기 위하여 몇 가지 수학적 사실이 더 필요하다. 우선 수열

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

이 수렴하며 그 극한값을 e 로 나타내는데 약 2.71828이다. e 를 밑으로 하는 지수함수 e^t 은 모든 실수 t 에서 미분 가능하며, 임의의 상수 a 에 대하여



$$\frac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$$

이 성립한다.

자연 현상을 설명하는 미분방정식은 그 해가 초기 조건(한 시점에서의 함수값, 도함수값 등)에 의하여 유일하게 결정된다. 구체적인 예를 들기 위해 아래 미분방정식을 살펴보기로 하자.

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \quad \text{----(2)}$$

여기서 a 와 b 는 상수이다. 이 미분방정식의 해 $y=f(t)$ 가 초기값 $f(0)$ 에 의해 유일하게 결정됨을 확인해 보자. 이를 위하여 $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 가 미분방정식 (2)의 해이고, 또한 f_1 의 초기값 사실로부터 $f_1(0)$ 와 f_2 의 초기값 $f_2(0)$ 이 같다고 하자. 이 때 함수 $g(t)$ 를 $g(t)=f_1(t)-f_2(t)$ 로 정의하면 $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 가 미분방정식 (2)의 해라는 사실로부터 $g'(t)=ag(t)$ 가 성립함을 알 수 있다. 보조함수 $h(t)$ 를 $h(t)=e^{-at}g(t)$ 로 정의하면 모든 실수 t 에 대하여 $h'(t)=0$ 임을 확인할 수 있다. 따라서 $h(t)$ 는 상수함수가 되고, $g(0)=f_1(0)-f_2(0)=0$ 이므로 모든 t 에 대하여 $h(t)=0$ 이 된다. 모든 실수 t 에 대하여 e^{-at} 은 항상 양수이므로, $h(t)$ 의 정의로부터 $g(t)=0$ 이 모든 t 에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 는 같은 함수이다.

비슷한 방법으로 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ 의 해 $y=f(t)$ 가 $f(0), f'(0)$ 에 의해서 유일하게 결정됨을 보일 수 있다. 이와 같이 미분방정식의 해가 초기 조건에 의해 유일하게 결정되는 것을 통칭하여 미분방정식의 해의 유일성이라 한다.

[문제 1] C_1 과 C_2 가 임의로 주어진 상수라 하자. 보조함수

$$g(t) = (\cos t)f(t) - (\sin t)f'(t)$$

$$h(t) = (\sin t)f(t) + (\cos t)f'(t)$$

를 이용하여 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \quad \text{-----(3)}$$

의 해 $y=f(t)$ 가 초기 조건 $f(0) = C_1, f'(0) = C_2$ 에 의해 유일하게 결정됨을 보이시오.



제시문 분석

① 미분방정식

자연의 여러 현상은 어떤 함수와 그것의 도함수를 포함하는 방정식으로 표현할 수 있는데 이것을 미분방정식이라 한다.

② 미분방정식의 해의 유일성

미분방정식을 만족하는 함수를 그 ‘미분방정식의 해’라고 하고 특별한 초기 조건이 주어지면 그 미분방정식의 해는 유일하다.

논제 분석

① 이계 미분방정식의 해의 유일성을 증명할 수 있는가?

제시문에 주어진 유일성 증명을 바탕으로 주어진 보조함수를 잘 활용하면 이계 미분방정식의 유일성을 증명할 수 있다. 이때 $g'(t)=0$ 이 됨을 이용하여 모든 t 에 대해 $g(t)=0$ 임을 보인다.

배경지식 쌓기

자연 현상을 해석할 때, 주어진 조건들을 단순화하여 이를 수학적 모델로 수식화 하면 그 현상을 이해하고 미래를 예측하는 것도 쉬울 것이다.

예를 들면 인구 증가에 대한 한 가지 모형은 인구는 인구의 크기에 비례하는 속도로 증가한다는 가정에 기초한다. 현재 인구를 P 라 하면, 시간 t 에 따른 인구의 변화율은 $\frac{dP}{dt}$ 이고 적당한 비례상수 k 에 대해 다음과 같은 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

이와 같이 어떤 함수와 그 함수의 도함수로 표시된 방정식을 ‘미분방정식’이라 한다. 특히 위 식은 P 에 관한 일계 도함수를 포함하는 방정식이므로 이를 ‘일계 미분방정식’이라 한다.

이 방정식은 도함수가 자기 자신의 상수배인 함수를 구하라는 것인데, 지수함수가 이러한 성질을 갖고 있음은 우리가 쉽게 알 수 있다. 즉 $P=e^{kt}$ 라 하면 $\frac{dP}{dt} = ke^{kt}$ 이므로 위 식을 만족한다. 이와 같이 어떤 미분방정식을 만족하는 함수를 그 ‘미분방정식의 해’라고 한다. 그런데 $P=3e^{kt}$ 도 미분방정식 $\frac{dP}{dt} = kP$ 의 해가 된



다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 어떤 미분방정식의 해는 여러 개가 존재할 수 있는데 이를 임의의 상수 C 를 사용하여 표시하면 $P = Ce^{kt}$ 로 표시할 수 있다. 이것을 미분방정식의 ‘일반해(general solution)’라고 한다. 일반해에서 임의의 상수에 특정한 값을 대입함으로써 얻어지는 해를 ‘특수해(particular solution)’라고 한다.



풀어 보기

1. 개구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이면, f 는 개구간 (a, b) 에서 상수함수가 됨을 설명하시오.

2. 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

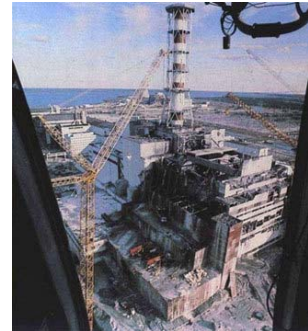
(1) $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ 는 위 미분방정식의 해가 됨을 밝히시오.

(2) 일반해 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ 에서 초기치 $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ 를 만족할 때, 특수해를 구하시오.



입기 자료

1986년 우크라이나 체르노빌 원자력 발전소 사고로 인해 대기 속으로 방사능 물질이 유출되는 사고가 있었다. 당국은 주변 지역의 방사능 누출량이 치명적이고 위험한 수준에 이를 가능성은 전혀 없다고 발표하였다. 당국은 어떻게 이런 결론에 도달한 것일까?



[체르노빌 사고현장]

더 일반화하여 말하자면, 이런 상황에서 하루 혹은 일주일 후의 방사능 농도를 당신은 어떻게 예측할 수 있을까?

미분방정식을 풀면 예측이 가능하다.

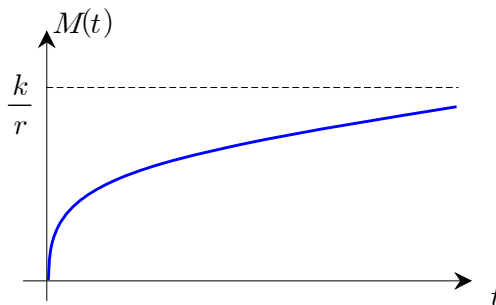
우리가 사고 발생 t 시간 후의 대기 속의 방사능 양을 알고자 한다고 가정하자. 방사능은 시간에 따라 변하므로, 방사능을 시간의 함수 $M(t)$ 로 표기하는 것이 합리적일 것이다. 불행이도 탐구를 시작하는 시점에서 당신은 주어진 시간에 $M(t)$ 값을 계산하는 공식을 가지고 있지 못할 것이다. 하지만 물리학 이론에 따르면, 방사능 물질의 증가율 $\frac{dM}{dt}$ 을, 방사능 물질이 대기에 유입되는 고정비율 k 및 방사능 물질이 붕괴되는 고정비율 r 과 연결 짓는 방정식이 존재한다. 그 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dM}{dt} = k - rM$$

이 방정식은 미분방정식, 즉 하나 이상의 도함수가 포함된 방정식의 한 예이다. 이런 미분방정식을 푼다는 것은, 미지의 함수 $M(t)$ 를 나타내는 식을 찾는다는 것을 의미한다. 방정식이 어떠한가에 따라 풀이가 가능할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 우리가 말한 방사능의 오염 상황과 관련해서는, 주어지는 미분방정식이 매우 단순하고, 해를 얻는 것도 가능하다. 위 미분방정식의 해는 다음과 같은 함수이다.

$$M(t) = \frac{k}{r} (1 - e^{-rt})$$

이 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.





이 그래프를 보면 처음에는 곡선이 급격히 상승하지만, 점점 상승 정도가 낮아져 극한값 $\frac{k}{r}$ 에 점점 다가가면서 절대로 그 값에 도달하지 않는다. 그러므로 도달할 수 있는 최고 오염 농도는 절대로 $\frac{k}{r}$ 보다 클 수 없다.

많은 다른 상황에서도 동일한 유형의 미분방정식이 등장하는데, 예를 들면 물리학에서 뉴턴의 냉각법칙, 의학에서 약물의 정맥류 확산률(rate of intravenous infusion)을 나타내는 식 등이 있다. 또 다른 종류의 변화에도 다른 형태의 미분방정식이 등장한다. 이처럼 미분방정식은 삶의 모든 행보에 등장하기 때문에 미분방정식의 연구는 인류에게 엄청난 영향을 미치는 수학의 한 분야이다.

미분방정식의 해를 찾는 작업은 그 자체로도 독자적인 수학 분야를 형성하지만 불행히도 많은 경우에 공식으로 표현된 해를 얻는 것이 불가능하다. 그런 경우 공식대신에 컴퓨터를 이용하거나 수와 그래프로 표현된 해를 얻는다.

— 참고 문헌 : 케이스 데블린(전대호 옮김), 『수학의 언어』 (해나무, 2006)



예시 답안

[풀어 보기 1]

개구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x)=0$ 이면 이 구간에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능이므로 개구간 (a, b) 에 속하는 모든 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 에 대하여 폐구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속이어야 한다.

따라서 미분에 관한 평균값의 정리에 의하여 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c)$ 인 c 가 α 와 β 사이에 적어도 하나 존재해야 하는데, 개구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x)=0$ 이므로 $f'(c)=0$ 이다. 즉, $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$ 이다.

따라서 개구간 (a, b) 에 속하는 모든 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)$ 이므로 f 는 개구간 (a, b) 에서 상수함수이다.

[풀어 보기 2]

(1) $y=f(t)=C_1 \cos t+C_2 \sin t$ 라 하면

$$\frac{dy}{dt}=-C_1 \sin t+C_2 \cos t \quad \text{이고} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-C_1 \cos t-C_2 \sin t \quad \text{이므로}$$

$y=f(t)=C_1 \cos t+C_2 \sin t$ 는 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ 를 만족한다. 따라서 해가 된다.

(2) $f(0)=1$ 이므로 $C_1=1$, $f'(0)=2$ 이므로 $C_2=2$ 이다. 따라서 조건을 만족하는 특수해는 $\cos t+2 \sin t$ 이다.

[문제 1]

$f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 가 미분방정식 (3)의 해이고, $f_1(0)=f_2(0)=C_1$ 이고 $f_1'(0)=f_2'(0)=C_2$ 라 하자. 이때, 보조함수 $H(t)$, $G(t)$ 를 각각

$$G(t)=(\cos t)[f_1(t)-f_2(t)]-(\sin t)[f_1'(t)-f_2'(t)]$$

$$H(t)=(\sin t)[f_1(t)-f_2(t)]+(\cos t)[f_1'(t)-f_2'(t)]$$

라 하면

$$\begin{aligned} G'(t) &= (-\sin t)\{f_1(t)-f_2(t)\}+(\cos t)\{f_1'(t)-f_2'(t)\}- \\ &\quad [(\cos t)\{f_1'(t)-f_2'(t)\}+(\sin t)\{f_1''(t)-f_2''(t)\}] \\ &= (-\sin t)[f_1(t)-f_2(t)]-(\sin t)[f_1''(t)-f_2''(t)] \\ &= (-\sin t)[f_1(t)-f_2(t)]+(\sin t)[f_1(t)-f_2(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$



($\because f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 가 미분방정식 (3)의 해이므로 $f_1''(t)+f_1(t)=0$, $f_2''(t)+f_2(t)=0$ 이고, 따라서 $f_1''(t)=-f_1(t)$, $f_2''(t)=-f_2(t)$ 가 된다.)

그러므로 $G(t)$ 는 상수함수가 되고, $G(0)=f_1(0)-f_2(0)=C_1-C_1=0$ 이므로 모든 t 에 대해 $G(t)=0$ 가 된다. 즉,

$$(\cos t)[f_1(t)-f_2(t)] - (\sin t)[f_1'(t)-f_2'(t)] = 0 \dots\dots\dots(4)$$

같은 방법으로 $H(t)$ 를 t 로 미분하여 정리하면

$$\begin{aligned} H'(t) &= (\cos t)[f_1(t)-f_2(t)] + (\cos t)[f_1''(t)-f_2''(t)] \\ &= (\cos t)[f_1(t)-f_2(t)] - (\cos t)[f_1(t)-f_2(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $H(t)$ 도 상수함수가 되고, $H(0)=f_1'(0)-f_2'(0)=C_2-C_2=0$ 이므로 모든 t 에 대해 $H(t)=0$ 이다. 따라서

$$(\sin t)[f_1(t)-f_2(t)] + (\cos t)[f_1'(t)-f_2'(t)] = 0 \dots\dots\dots(5)$$

(4)와 (5)식에서

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t)-f_2(t) \\ f_1'(t)-f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 되고 행렬 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 의 행렬식의 값은 $D=\sin^2t+\cos^2t=1 \neq 0$ 이므로 모든 t 에 대해 $f_1(t)-f_2(t)=0$ 이고 두 함수 $f_1(t)$ 와 $f_2(t)$ 는 같은 함수이다. 즉, 미분방정식 (3)의 해는 주어진 초기 조건에 의해 유일하게 결정된다.



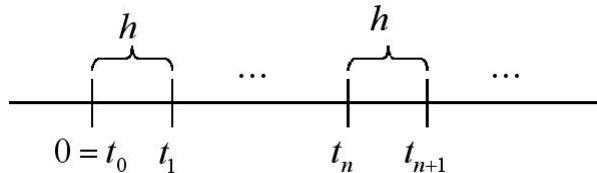
서울대학교 정시 문항 4-(2)

제시문

(나)

컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 해를 근사적으로 구할 수 있는데, 가장 간단한 방법은 다음과 같다. 우선 h 를 충분히 작은 양수로 택하고, $t_0 = 0$ 으로부터 일정한 간격으로 떨어진 $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh, \dots$ 를 고정하자.

이 $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ 을 격자점이라 부르는데, 우리는 이들 격자점 위에서 미분방정식의 해 $f(t)$ 의 값을 근사적으로 구하고자 한다.



h 가 충분히 작으므로 도함수의 정의 $f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ 에 의하여 $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ 를 $f'(t)$ 의 근사값으로 사용할 수 있다.

이제 미분방정식

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \quad (2)$$

의 근사적 해법에 대하여 알아보자. 함수 $y = f(t)$ 가 초기 조건 $f(0) = y_0$ 을 만족시키는 미분방정식 (2)의 해라 하자. 위의 관찰로부터 $\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{h}$ 이 $f'(t_n)$ 의 근사값이고 $f'(t_n) = af(t_n) + b$ 이므로, $\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{h}$ 이 $af(t_n) + b$ 의 근사값이 된다. 따라서 $f(t_{n+1})$ 을 $(1+ah)f(t_n) + bh$ 로 근사시킬 수 있다.

그러므로 y_1, y_2, \dots 을 점화식

$$y_{n+1} = (1+ah)y_n + bh$$

및 초기 조건 $y_0 = f(0)$ 을 이용하여 귀납적으로 정의하면, $n = 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 y_n 은 $f(t_n)$ 의 근사값이 된다.

비슷한 방법으로 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \quad (3)$$



의 해의 근삿값을 구할 수 있다. 이 때 $f''(t_n)$ 의 근삿값으로

$$\frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1}))}{h^2}$$

을 사용하는데, 그 이유는 다음 공식이 성립하기 때문이다.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} = f''(t)$$

[문제 2] $h = 0.1$ 이라고 하고, t_0, t_1, t_2, \dots 을 위에서 정의한 격자점이라고 하자.

미분방정식

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

의 해 $y = f(t)$ 가 초기 조건 $f(t_0) = 3, f'(t_0) = 2$ 를 만족시킨다고 하자. $f(t_n)$ 의 근삿값 y_n 을 귀납적으로 정의하는 점화식과 y_1, y_2 의 값을 구하시오.



제시문 분석

① 미분방정식의 근사해

$\frac{dy}{dt} = ay + b$ 는 임의의 점에서 기울기가 $ay + b$ 란 말이다. 따라서 그 점에서의 접선의 방정식을 그 점 근방에서 미분방정식을 만족하는 함수의 선형근사식으로 생각할 수 있다.



논제 분석

제시문에서 $f(t_{n+1})$ 을 $(1+ah)f(t_n) + bh$ 로 근사시킬 수 있고, 이 근사식을 점화식으로 표현하면 $y_{n+1} = (1+ah)y_n + bh$ 가 된다고 하였다. 같은 방법으로 하면 $f''(t_n)$ 의 근삿값이 $\frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1}))}{h^2}$ 이므로 이를 활용하면 점화식을 유도할 수 있다.



배경지식 쌓기

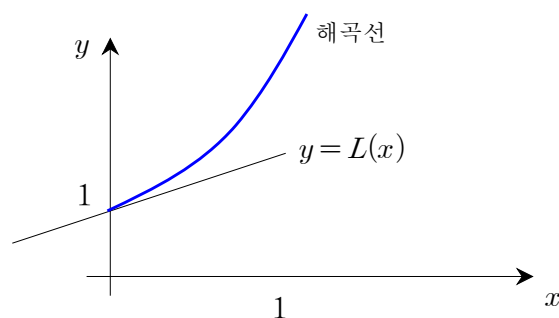
불행하게도, 모든 미분방정식의 해에 대한 명백한 공식을 얻는다는 것은 불가능하다. 그렇다면 우리는 그래프적인 접근방법이나 수치적 접근 방법(오일러 방법)을 통하여 미분방정식의 해의 근삿값에 접근할 수는 있다.

예를 들어 다음과 같은 초기값 문제

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

에 대하여 미분방정식의 해는 모르지만 해곡선은 대략 짐작할 수 있다. 위의 미분방정식을 해석하면 $y' = x + y$ 의 해곡선은 임의의 점 (x, y) 에서의 기울기가 그 점에서의 x 좌표와 y 좌표의 합과 같다는 말이다.

$y'(0) = 0 + 1 = 1$ 임을 말하며, 따라서 해곡선은 점 $(0, 1)$ 에서 기울기 1을 가진다. 해에 대한 첫 번째 근사식으로 선형근사식 $L(x) = x + 1$ 을 사용할 수 있다. 다시 말하면, 해곡선의 개략적인 근사식으로 $(0, 1)$ 에서 접선을 사용할 수 있다.

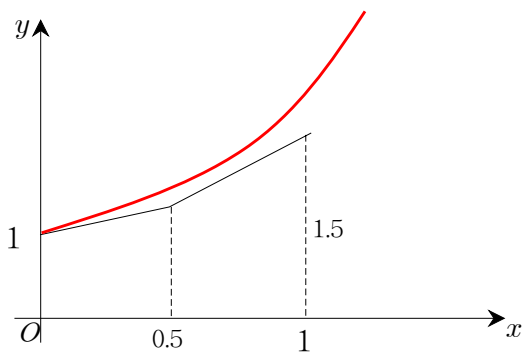




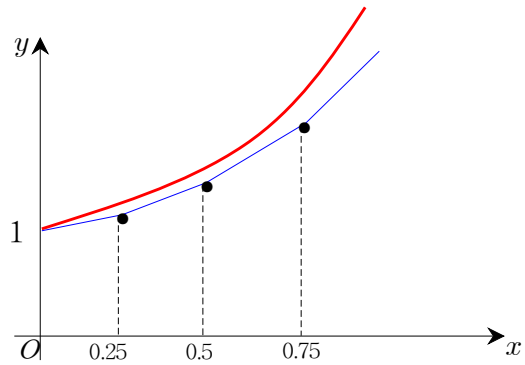
오일러는 이 접선을 따라 오직 짧은 거리만큼 나아간 다음 점에서 기울기가 지시하는 대로 방향을 바꾸어 중간 진로를 수정함으로써 이 근사식을 개선해 나갔다. 예를 들어 0.5마다 진로를 수정한다면 $L(0.5) = 0.5 + 1 = 1.5$ 이므로 $y(0.5) \approx 1.5$ 를 얻고 $(0.5, 1.5)$ 를 새로운 선분의 시작점으로 잡는다. 이 점에서 $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$ 이므로 $x > 0.5$ 에서는 근사해로 일차함수

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

를 사용한다. (아래 [그림1]참조)



[그림 1]



[그림 2]

일반적으로 오일러의 방법은 초기값이 주어진 점에서 시작하여 각 분점에서 새로운 기울기를 계산하여 그 방향으로 진행하는 과정을 반복한다. 그러나 이 방법은 정확한 해를 만들지는 못하고 근사식만을 제공할 뿐이다. 그러나 단계의 크기를 작게 함에 따라 정확한 해에 보다 가까운 근사식을 얻을 수 있다.(위의 [그림 2] 참조)



풀어 보기

1. $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh, \dots$ 이라 하고, 초기 조건 $f(0) = y_0$ 을 만족시키는 미분방정식

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

를 생각해 보자. 이 때, $f(t_{n+1})$ 의 근사해를 구하는 방법을 설명하시오.

2. 위 문제에서 $h = 0.1$ 이고 초기 조건 $f(0) = 1$ 일 때, 미분방정식

$$\frac{dy}{dt} = y + 1$$

의 $f(t_n)$ 의 근사값을 y_n 이라 하자. 여기서 y_2 를 구하시오.



 예시 답안

[풀어 보기 1]

미분방정식 $\frac{dy}{dt} = ay + b$ 에서 $f'(t_0) = af(t_0) + b$ 이므로 이것은 $x = t_0$ 에서 접선의 기울기이다. 따라서 $(t_0, f(t_0))$ 에서 접선의 방정식은 $f(t) - f(t_0) = [af(t_0) + b](t - t_0)$ 이다. 즉

$$f(t) = [af(t_0) + b](t - t_0) + f(t_0) = [a(t - t_0) + 1]f(t_0) + b(t - t_0)$$

가 되고 이것을 근사해로 사용할 수 있다. 따라서 t_1 에서 근사해는

$$[a(t_1 - t_0) + 1]f(t_0) + b(t_1 - t_0) = (ah + 1)f(t_0) + bh$$

이다. 즉 $f(t_1) \approx (1 + ah)f(t_0) + bh$ 이다.

같은 방법으로 $x = t_1$ 에서 접선의 기울기는 $af(t_1) + b$ 에 근사하므로 $t > t_1$ 일 때 근사해로 기울기가 $af(t_1) + b$ 이고 점 $(t_1, f(t_1))$ 을 지나는 직선

$$f(t) - f(t_1) = [af(t_1) + b](t - t_1)$$

을 생각할 수 있다. 따라서 t_2 에서 근사해는

$$[a(t_2 - t_1) + 1]f(t_1) + b(t_2 - t_1) = (ah + 1)f(t_1) + bh$$

가 된다. 이 과정을 계속하면 $f(t_{n+1})$ 을 $(1 + ah)f(t_n) + bh$ 로 근사시킬 수 있다.

[풀어 보기 2]

$f'(0) = f(0) + 1 = 2$ 이므로 $(0, 1)$ 에서 접선의 방정식은

$$f(t) - 1 = 2t \quad \text{즉,} \quad f(t) = 2t + 1$$

이다. 따라서 $f(t_1) = f(0.1)$ 의 근삿값 y_1 은 $2 \times 0.1 + 1 = 1.2$ 가 된다. 같은 방법으로

점 $(0.1, 1.2)$ 에서 기울기는 $f'(0.1) = f(0.1) + 1 = 2.2$ 이므로 근사해는

$f(t) - 1.2 = 2.2(t - 0.1)$ 이다. 따라서 $f(t_2)$ 의 근삿값 y_2 는 $2.2(0.2 - 0.1) + 1.2 = 1.42$

이다.

[문제 2]

제시문에서 $\frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1}))}{h^2}$ 이 $f''(t_n)$ 의 근삿값이고 $f''(t_n) = -f(t_n)$ 이므로

$\frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1}))}{h^2}$ 은 $-f(t_n)$ 의 근삿값이 된다. 따라서 $-f(t_n)$ 을

$\frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1}))}{h^2}$ 로 근사시킬 수 있다. 그러므로 $f(t_n)$ 의 근삿값 y_n 을 귀납

적으로 정의하는 점화식을 구하면



$$-y_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

이 되고 이것을 정리하면 다음과 같은 점화식을 얻는다.

$$y_{n+1} + (0.1^2 - 2)y_n + y_{n-1} = 0, \quad y_0 = f(t_0) = 3, \quad f'(t_0) = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

제시문에서 $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{h}$ 가 $f'(t_1)$ 의 근삿값이고, 이것을 정리하면 $f(t_1)$ 의 근삿값은

$$h f'(t_0) + f(t_0)$$

이 된다. 여기서

$$h f'(t_0) + f(t_0) = 0.1 \times 2 + 3 = 3.2$$

이므로 $f(t_1)$ 의 근삿값 y_1 은 $y_1 = 3.2$ 이다.

①의 점화식에 $n=1$ 을 대입하면 $y_2 + (h^2 - 2)y_1 + y_0 = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore y_2 &= -(h^2 - 2)y_1 - y_0 \\ &= -(0.1^2 - 2) \times 3.2 - 3 \\ &= 3.368 \end{aligned}$$



3

서울대학교 정시 문항 4-(3)

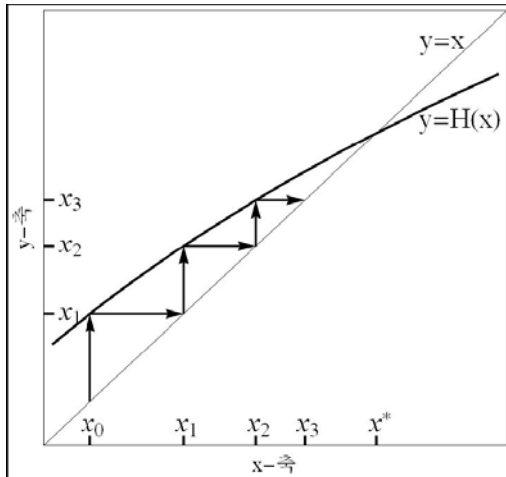
제시문

(다)

위에서 본 바와 같이 미분방정식이 주어지면 그 해를 근사하는 적절한 점화식을 항상 찾을 수 있기 때문에 미분방정식 연구는 점화식 연구와 밀접한 관계가 있다. 우선 함수 $H(x)$ 를 이용하여 정의한 점화식

$$x_{n+1} = H(x_n)$$

을 살펴보자. 초기값 x_0 이 [예시그림 1]에 표시된 바와 같다고 하자. 다음값 x_1



[예시그림 1]

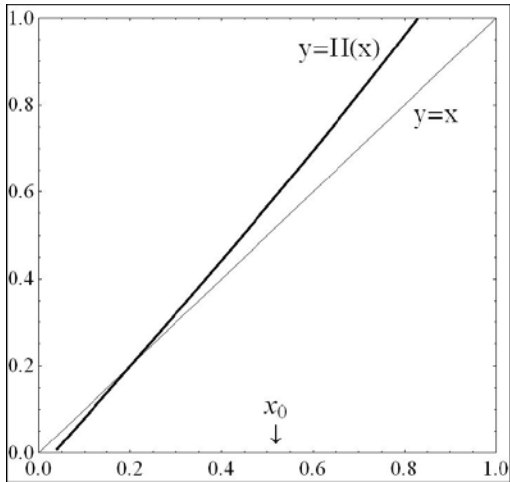
은 $x_1 = H(x_0)$ 이 되는데 이 값이 [예시그림 1]의 y 축에 표시되어 있다. 이 점으로부터 수평선을 직선 $y=x$ 와 만날 때까지 그으면 그 교점의 x 좌표는 당연히 x_1 이 되며, 이 값이 x 축에 표시되어 있다. 이 x_1 을 새로운 초기값으로 점화식을 다시 적용하면 다음 값 x_2 는 $x_2 = H(x_1)$ 이 되며 이 값이 y 축에 x_2 로 표시되어 있다. 이 과정을 반복해서 [예시그림 1]에서와 같이 굵게 표시한 화살표들을 그릴 수 있다. 이와 같이 x_0, x_1, x_2, \dots 의 움직임에 관한 정보를 화

살표들로 그린 것을 x_0 에서 시작하는 거미줄그림이라 부른다.

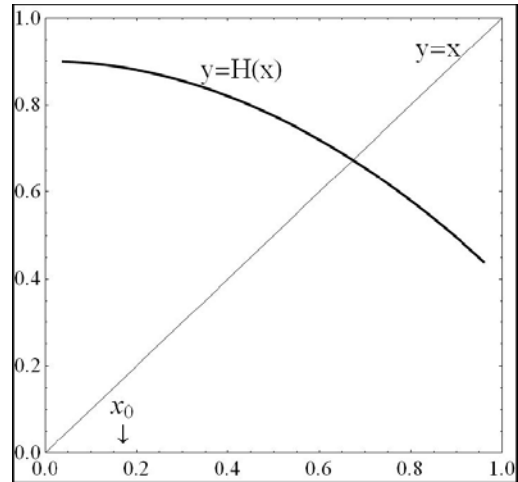
만약 x^* 가 $H(x^*)=x^*$ 를 만족하면 이 x^* 를 점화식 $x_{n+1} = H(x_n)$ 의 부동점이라 부른다. [예시그림 1]에서 볼 수 있듯이 x^* 는 $y=H(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표이다. x^* 가 점화식 $x_{n+1} = H(x_n)$ 의 부동점일 때, x^* 를 포함하는 적절한 개구간을 잡아서 그 개구간에 속하는 모든 c 에 대하여 $x_0 = c, x_{n+1} = H(x_n)$ 으로 정의된 수열 $\{x_n\}$ 이 x^* 로 수렴하도록 할 수 있으면, x^* 를 안정성을 가진 부동점 또는 줄여서 안정부동점이라 부른다. [예시그림 1]의 경우 x^* 는 안정부동점이다. 안정부동점이 아닌 부동점을 불안정부동점이라 부른다.



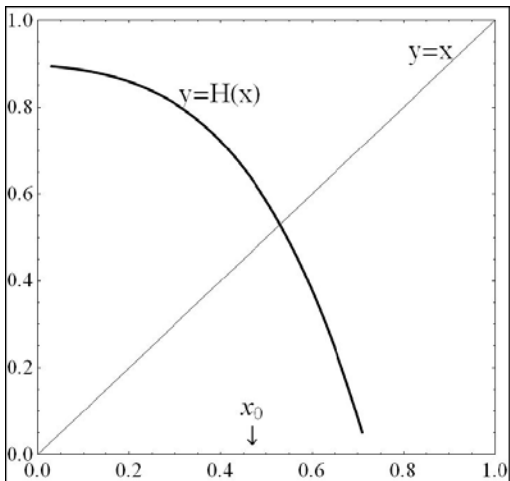
[문제 3] 아래에 주어진 [문제 3 : 그림 1], [문제 3 : 그림 2], [문제 3 : 그림 3]에서 함수 $y=H(x)$ 의 그래프는 굵은 선으로, $y=x$ 의 그래프는 가는 선으로 표시되어 있다. [문제 3 : 그림 1~3]의 경우에 각 그림에 표시된 x_0 에서 시작하는 거미줄그림의 개형을 답안지에 그리시오. 이를 기반으로 부동점의 안정성 여부를 일반적인 경우에 대하여 곡선 $y=H(x)$ 의 기울기와 관련해서 논하시오. (단, 함수 $H(x)$ 가 미분가능하고 도함수가 연속이며, 부동점 x^* 에서 곡선 $y=H(x)$ 의 기울기는 ± 1 이 아니라고 가정한다.)



[문제 3: 그림 1]



[문제 3: 그림 2]



[문제 3: 그림 3]



제시문 분석

① 점화식을 이용한 반복법

미분방정식의 근사해를 얻기 위하여 점화식을 세우고 거미줄그림을 이용하여 수렴값을 구할 수 있다.

② 안정부동점

부동점의 정의를 설명하고, 거미줄그림을 이용하여 점화식이 부동점으로 수렴하면 이 점을 안정부동점이라 하고 그렇지 않으면 불안정부동점이라 한다.

논제 분석

거미줄그림을 그려 안정부동점을 찾고, 안정부동점을 가지는 경우는 부동점 근방에서 함수 $y=H(x)$ 의 접선의 기울기와 관계가 있음을 추측할 수 있다.

배경지식 쌓기

x 가 함수 $f(x)$ 의 부동점(fixed point)이란 $f(x)=x$ 를 만족하는 점을 말한다. 예를 들어 $f(x)=x^2-3x+4$ 라 하면 $f(2)=2$ 가 되므로 2가 부동점이다. (옆의 그림 참조)

모든 함수가 부동점을 가지는 것은 아니다.

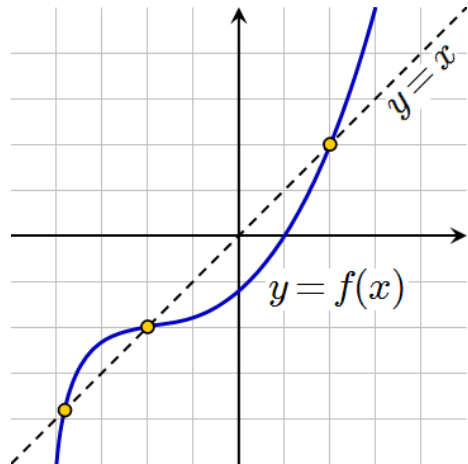
예를 들어 함수 $f(x)$ 가 실변수 함수

$$f(x)=x+1$$

이라 하면 이 함수는 부동점을 갖지 않는다.

일반적으로 말하면 부동점이란 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 와의 교점을 말한다.

위의 예에서 $f(x)=x+1$ 는 $y=x$ 와 평행하므로 부동점을 가지지 않는다.



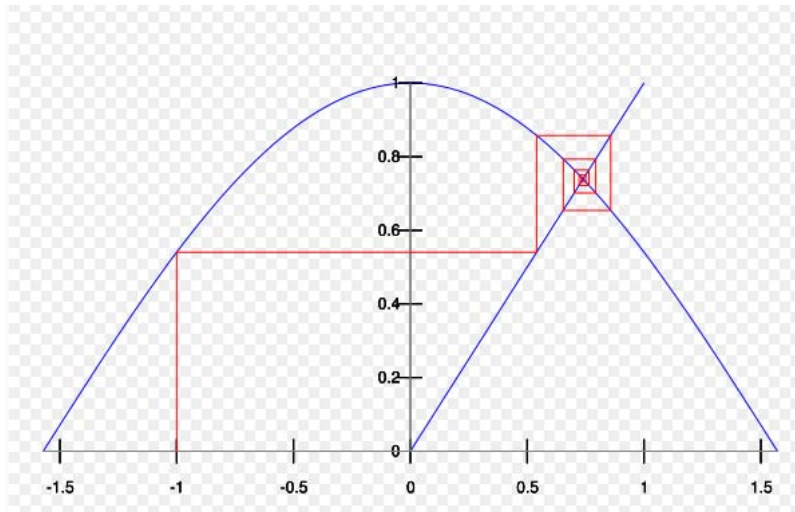
① 안정부동점

함수 f 의 부동점 x_0 가 ‘유인부동점(attractive fixed point)’ (논제에서는 안정부동점)이란 다음과 같은 함수의 수열

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

이 x_0 로 수렴하는 것을 말한다.

아래 그림과 같이 코사인 함수는 한 개의 부동점을 가지고 이것은 유인부동점이다. 아래 그림은 초기값(initial value)을 $x_1=-1$ 로 잡았을 때, 수열 $x_{n+1}=\cos x_n$ 의 거미줄그림을 나타낸다.



이 그림에 따르면 이 값은 고정점 0.739085013으로 수렴함을 알 수 있다.

모든 부동점이 유인부동점인 것은 아니다. 예를 들면 $x=0$ 는 함수 $f(x)=2x$ 의 부동점이지만 유인부동점은 아니다. 함수 f 가 부동점 x_0 근방에서 계속 미분가능하고 $|f'(x_0)| < 1$ 이면 이 부동점은 유인부동점이 된다.

— 출처 : <http://en.wikipedia.org/wiki/>



풀어 보기

1. 정의역과 공역이 모두 폐구간 $[0, 1]$ 인 연속함수 f 의 그래프를 그려 보고 그 그래프에서 고정점을 찾아보시오.
2. 정의역과 공역이 모두 폐구간 $[0, 1]$ 인 연속함수 f 의 그래프 중에서 고정점을 가지지 않는 경우가 있는가?
3. 중간값의 정리를 이용하여 정의역과 공역이 모두 폐구간 $[0, 1]$ 인 모든 연속함수는 반드시 고정점을 갖는 것을 설명하시오.



입기 자료

➔ 부동점 정리

중간값의 정리를 이용하면 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(0)=1$, $f(1)=0$ 인 연속함수 $f(x)$ 가 존재하면 $f(c)=c$ 를 만족하는 c 가 개구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 알 수 있는데, 이를 부동점의 정리라 하고 이 때, c 를 부동점이라 한다.

네덜란드 수학자 브로우베르(Brouwer, J : 1881~1966)가 1912년 최초로 증명한 이 정리는 위상 기하학을 수학 및 물리학의 여러 분야에 적용시키는데 매우 유용하게 쓰인다.

이 정리가 응용되는 한 예로서 다음과 같은 것이 있다.

바닥에 종이 한 장이 놓인 속이 깊은 상자가 있다. 이 상자의 바닥에 놓인 종이의 각 점은 상자 바닥의 각 점과 대응한다. 이제 그 종이를 구겨서 상자 속에 마음대로 던진다. 수학자들은 이 종이가 구겨진 모양이나 그것이 상자에 떨어진 방식에 관계없이 상자 밑바닥에 정확히 수직으로 대응하는 다시 말해 종이를 구기기 전과 똑같은 대응 상태를 갖는 점이 종이 위에 하나 이상 있다는 것을 증명했다. 이외에도 부동점의 정리가 응용되는 재미있는 사례가 많이 있다.

예를 들면 이 정리는 지구상에 바람이 전혀 불지 않는 곳이 매 순간마다 최소한 한 지점이 있다는 것을 증명해 준다. 태풍의 눈이 바로 그 예이다. 또 머리카락으로 뒤덮인 구 모양의 머리를 완전하게 빗질하는 것이 불가능하다는 것도 증명해 준다. 여기서는 사람마다 반드시 한 개 이상 가지고 있는 가마가 부동점의 역할을 한다.

그러나 가운데 구멍이 뚫린 원환면 위의 모든 머리카락은 빗질하여 납작하게 눕히는 것이 가능하다고 한다.

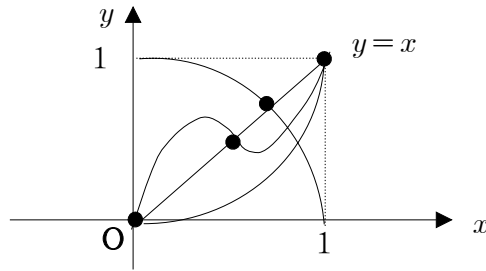
- 출처 : <http://classroom.re.kr/view.jsp?mcode=141411>



 예시 답안

[풀어 보기 1]

$f(a) = a$ 를 만족하는 a 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = x$ 의 교점의 x 좌표이다. 따라서 여러 가지 연속함수에 대한不動점의 좌표는 아래 그림과 같다



[풀어 보기 2]

폐구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수의 그래프를 그리려면 먼저 $x=0$ 에서의 함숫값 $f(0)$ 을 정하고 곡선이 끊어지지 않도록 $x=1$ 까지 연결한다. 이 경우에 함수의 정의에 의하여 그래프가 $x=a(0 \leq a < 1)$ 와 오직 한 점에서 만나고, 함숫값이 0 이상 1 이하가 되도록 그리려면 반드시 직선 $y=x$ 와 만나게 되므로 정의역과 공역이 모두 폐구간 $[0, 1]$ 인 연속함수 f 의 그래프 중에서不動점을 가지지 않는 경우는 없다.

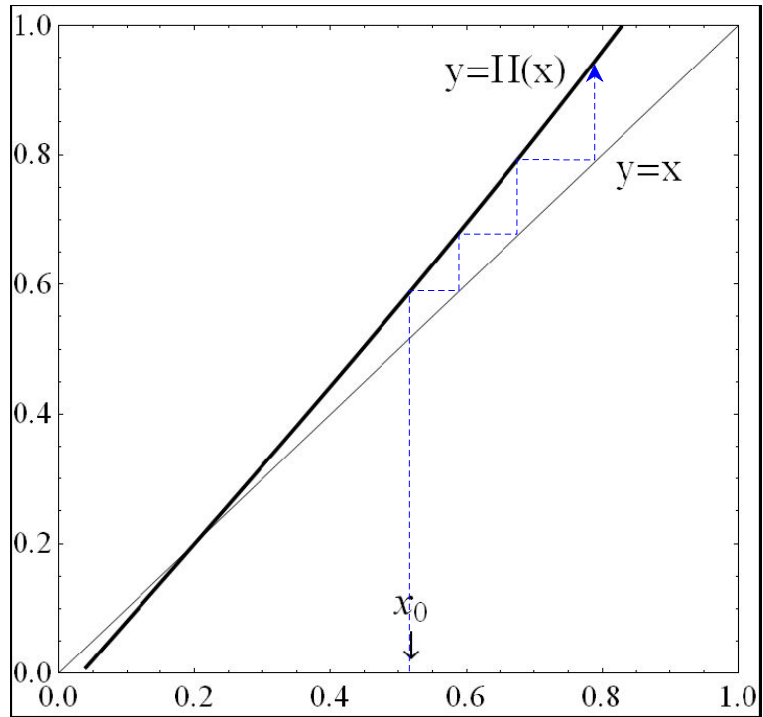
[풀어 보기 3]

- 1) $f(0) = 0$ 또는 $f(1) = 1$ 이면 0 또는 1이不動점이 된다.
- 2) $f(0) \neq 0$ 이고 $f(1) \neq 1$ 이라면 $f(x) \in [0, 1]$ 이므로 $0 < f(0) \leq 1$ 이고 $0 \leq f(1) < 1$ 이어야 한다.

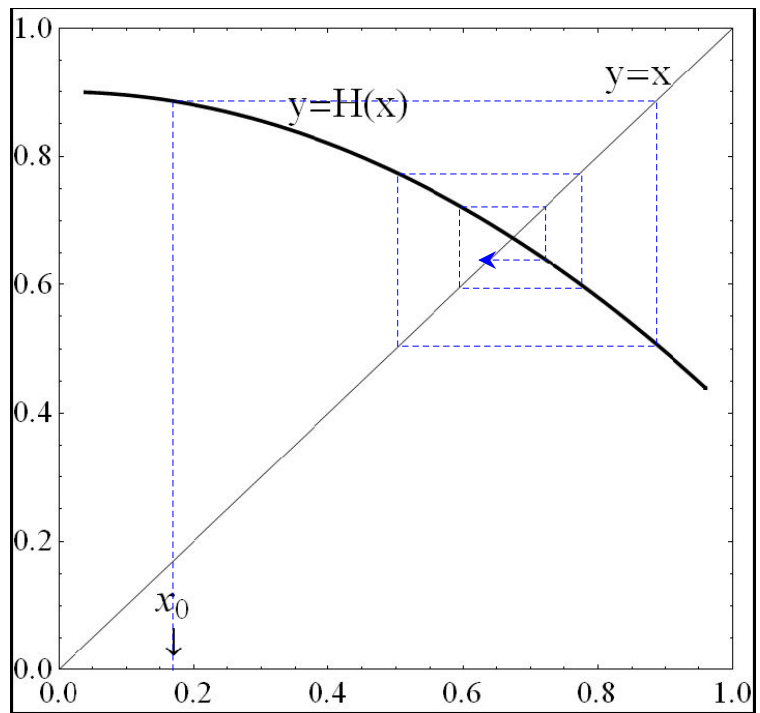
이때, $g(x) = f(x) - x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 폐구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고, $f(0) - 0 > 0$ 이고 $f(1) - 1 < 0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $g(t) = 0$ 을 만족하는 $t \in [0, 1]$ 이 존재한다. 따라서 t 는 $f(t) = t$ 를 만족하므로 함수 f 의不動점이 된다.



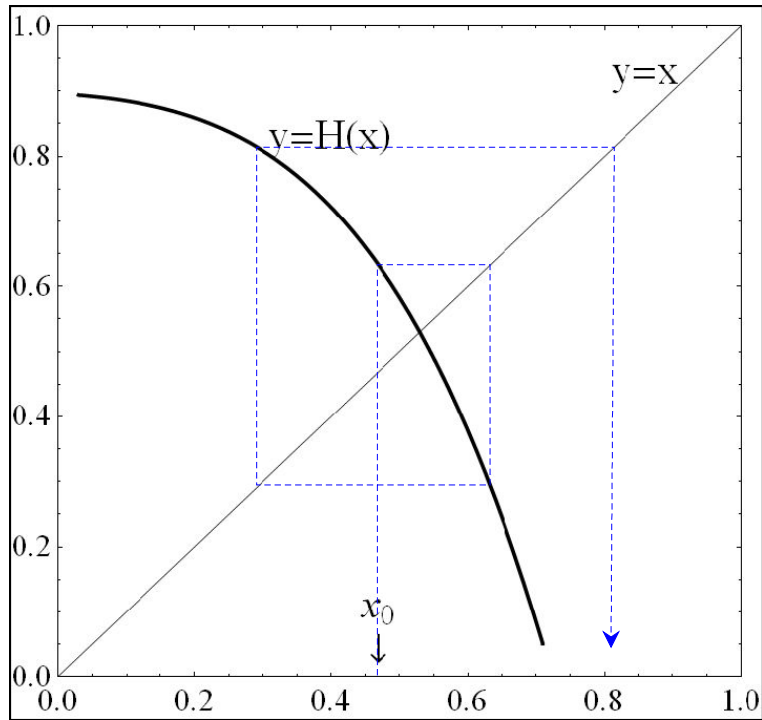
[문제 3]



[문제 3: 그림 1]



[문제 3: 그림 2]



[문제 3: 그림 3]

[그림 1]과 [그림 3]은 불안정부동점을 가지고, [그림 2]는 안정부동점을 가진다.

일반적으로 $y=x$ 와 $y=H(x)$ 의 교점에서 $y=H(x)$ 에 그은 접선의 기울기 m 이 $-1 < m < 1$ 이면 안정부동점을 가지고 $m > 1$ 이거나 $m < -1$ 이면 불안정부동점을 가진다.



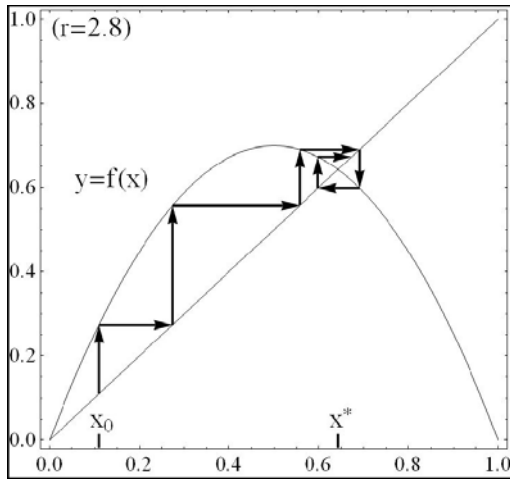
4

서울대학교 정시 문항 4-(4)

제시문

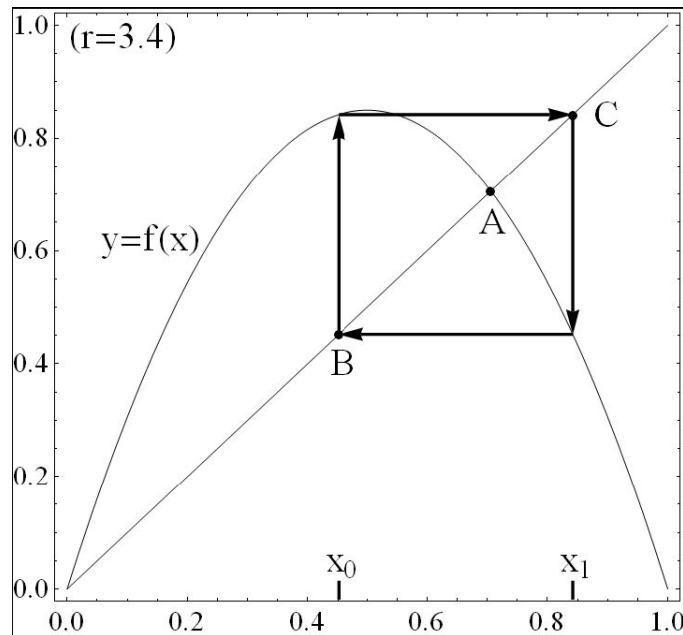
(라)

r 을 양의 상수라 하고 $f(x) = rx(1-x)$ 라 하자. 그리고 $0 < c < 1$ 에 대하여 점화식 $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n)$ 및 초기값 $x_0 = c$ 로 정의된 수열 $\{x_n\}$ 의 행동을 살펴보기로 하자. 앞으로 이 수열을 c 에서 출발한 수열이라 부르자. 또한 c 를 $\{x_n\}$ 의 출발점이라 하자.



[예시그림 2]

[예시그림 2]는 $r=2.8$ 일 때 거미줄그림의 예시를 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 0과 1 사이에 있는 모든 c 에 대해서 c 에서 출발한 수열이不動점 x^* 로 수렴함을 볼 수 있다. [예시그림 3]은 $r=3.4$ 인 경우를 보여주고 있는데, 그 특징은 특별한 점 x_0 과 x_1 이 존재해서 x_0 에서 출발한 수열이 x_1 으로 간 후 다시 x_0 로 돌아오는 주기 2의 주기적 패턴을 보이고 있다는 것이다.



[예시그림 3]



이제 상수 r 의 값을 3.4에서 점차 증가시키면 4, 8, 16, 32 등의 2^n ($n=2, 3, \dots$)을 주기로 갖는 주깃점들이 점차적으로 출현한다. 그리고 r 이 약 3.57을 넘게 되면, 소위 카오스 현상이 나타난다. 아래의 <예시표 1>은 이 카오스 현상에 대한 이해를 돕기 위한 것으로 상수 r 값을 3.79, 3.80, 3.81로 주고, 이 각각의 경우에 대하여 0.2999, 0.3000, 0.3001에서 출발한 수열의 x_{600} 값을 컴퓨터로 계산한 결과이다.

<예시표 1> 상수 r 과 초깃값 x_0 에 따른 x_{600} 값

$r \backslash x_0$	0.2999	0.3000	0.3001
3.79	0.697998	0.630530	0.271574
3.80	0.882534	0.545618	0.687939
3.81	0.634374	0.700818	0.927301

이 표에서 출발점의 미소한 변화가 시간이 흐른 후에는 큰 차이를 가져옴을 관찰할 수 있다. 또한 상수 r 을 근소하게 변화시켜도 결과값에 큰 차이가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 출발점의 미소한 차이에 대해 큰 변화를 보이는 것이 카오스 현상의 주요한 특징이다. 또한 카오스 현상은 대부분의 출발점 c 에 대해 c 에서 출발한 수열이 매우 불규칙해진다는 특징을 가진다. 이러한 카오스 현상은 점화식으로 주어진 수열뿐만 아니라 자연 현상에서 도출된 많은 미분방정식들에서도 나타나는데 이 현상은 흥미로움을 넘어 자연 현상의 이해에 새로운 도전의 장을 열어주고 있다.

[문제 4-1] [예시그림 3]에서 출발점이 임의의 점일 때, n 이 증가함에 따라 수열 $\{x_n\}$ 이 어떻게 행동하는지 추정하고 그 이유를 설명하시오.

[문제 4-2] 자연법칙이 미분방정식으로 기술되고 이 미분방정식의 해는 초기 조건에 의해 유일하게 결정된다는 사실은 “어느 한 시점의 상태가 미래를 완벽히 결정한다”는 결정론적 세계관에 지대한 영향을 주었다. 그러나 이러한 결정론적 자연법칙의 지배를 받는 자연현상이라도 만약 그것이 카오스 성질을 가지고 있다면, 초기 조건이 미래를 유일하게 결정한다는 사실에도 불구하고 인간이 미래 시점의 상태를 정확하게 예단하는 일은 실질적으로 불가능하게 된다. 그 이유에 대해 위에서 제시한 사실들을 기반으로 설명하고, 이 사실이 결정론적 세계관에 미치는 영향에 대해 논하시오.



제시문 분석

- ① $f(x) = rx(1-x)$ 의 거미줄그림은 초깃값 $0 < c < 1$ 의 값뿐만 아니라 r 의 값에 의해서 행동이 바뀐다.
- ② r 이 3을 넘어가면 여러 값을 가지는 사이클을 반복하게 되고 3.57을 넘게 되면 r 값이 조금만 변해도 거미줄그림이 규칙적인 그림에서 갑자기 혼돈의 모습으로 바뀐다. 이를 카오스현상이라 한다.



논제 분석

- ① r 이 3.4일 때 거미줄그림은 주기가 2인 주깃점들이 점차적으로 나타날 것이다.
- ② 미분방정식의 해의 유일성에서 영향을 받는 결정론적인 세계관이 카오스 이론으로 받는 영향을 설명하기를 요구하고 있다.



배경지식 쌓기

주어진 함수 $f(x)$ 에 대하여 x_0 에서의 오비트(orbit)란 다음과 같은 함수 $f(x)$ 의 합성에 의하여 만들어지는 수열 x_0, x_1, x_2, \dots 을 말한다. 즉, 함수 $f(x)$ 에 대하여 출발점을 x_0 라 할 때,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f_2(x_0), x_3 = f(f(f(x_0))) = f_3(x_0), \dots$$

이렇게 초깃값 x_0 으로부터 함수의 합성에 의해 만들어지는 수열은 주어진 함수 $f(x)$ 와 초깃값 x_0 에 따라 다양한 특징을 갖는다.

이제, 이차함수 $f(x) = ax(1-x)$ 에서 초깃값을 0.5로 고정시킨 후 a 의 값을 차례로 변화시킬 때 생기는 오비트 수열의 특징에 대하여 알아보자. 여기서 이차함수 $f(x) = ax(1-x)$ 의 a 의 값을 어떤 무인도에서 사는 토끼의 번식률로 해석하여 보자. 이때, 처음의 토끼수가 0.5(무인도에 최대 살 수 있는 토끼의 절반이라는 뜻)일 때, 시간이 지남에 따라 토끼의 수가 얼마나 되는지 살펴보자. (가)번식률이 3보다 작은 경우에 출발점 x_0 의 값을 0.5로 하고 $f(x) = ax(1-x)$ 의 오비트 수열을 살펴보면 오비트 수열이 수렴함을 볼 수 있다. 그런데 번식률이 3보다 커지면 오비트 수열은 이상한 행동을 보여 주기 시작한다. (나)예를 들어 a 가 3.1이면 수열은 궁극적으로 두 개의 값을 반복하여 갖는 2-사이클을 만든다. 즉 토끼의 수가 주기적으로 많아졌다 적어졌다를 반복하게 된다. 그러다가 a 가 3.45이상으로 커지면 오비트는 궁극적으로 4개의 값을 반복하여 갖는 4-사이클을 보여준다. 그러다가 (다) a 가 3.57 이상으로 커지면 오비트는 규칙성이 없이 이리 저리로 변화됨을 볼 수 있다. (이것



을 카오스 오비트라고 한다.) 그러다가 a 가 3.83에서 주기가 3인 오비트 수열이 잠시 나타나다가 a 가 4에 가까이 가면서 또 다시 혼돈의 모습이 나타나게 된다. 이와 같이 a 가 3.57주변인 경우에 조그마한 a 값의 변화에 의해 오비트 수열이 규칙적인 모습에서 갑자기 혼돈의 모습으로 바뀌는 것을 볼 수 있다. 마치 0°C 의 물에 돌을 던지는 순간 얼음이 얼기 시작하는 것과 같이 조그마한 변화가 질적으로는 큰 차이가 있는 변화를 몰고 온다. 수학자들은 이러한 현상을 나비효과라고 부르는데, 나비효과의 예로 홍콩에서 나비 한 마리가 무심코 날개를 팔랑 거려 일으킨 조그마한 바람이 미국 뉴욕에 태풍을 일으킬 수도 있음을 얘기한다.

- 참고 : 고등학교 고급수학. 서울대학교 국정도서편찬 위원회



풀어 보기

1. (가)의 오비트 수열의 그림을 그려보고 어디로 수렴하는지를 설명하시오.

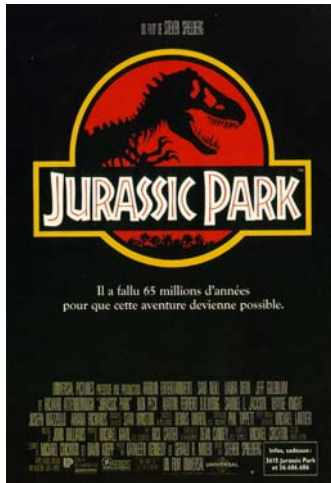
2. (나)와 (다)의 오비트 수열의 그림을 그려보시오.



읽기 자료

➔ **쥬라기 공원의 혼돈**

우리가 사는 이 세상을 이해하기 위한 끝없는 연구에는 아직도 공부해야 할 분야가 많다. 수학자와 과학자들은 1970년대에 들어서 자연의 불규칙적이고 불연속적이며 또한 번덕스러운 일면을 컴퓨터를 사용해 탐구하기 시작했다. 그들은 이전에도 혼돈으로 분류되었던 구름의 모양, 혈관의 뒤엉킴, 은하계의 성단 등과 같은 상황 속에서 놀라운 질서를 발견하였다. 크라이턴(Michel Crichton)의 공상과학 스릴러 영화인 「쥬라기 공원」(Jurassic Park)은 혼돈이론(chaos theory)의 아주 재미있는 내용을 극중의 수학자인 말콤(Ian Malcolm)의 시각과 생각을 통해 보여 주고 있다.



쥬라기 공원 영화 포스트와
극중의 말콤박사

코스타리카해안에서 멀리 떨어진 섬에는 해먼드 재단에서 설립한 비밀스러운 테마공원인 쥬라기 공원이 있다. 그 재단 소속 과학자들이 공룡의 DNA를 복구해 복제하는 놀라운 기술력의 결과로 오래 전에 사라졌던 생명체가 쥬라기 공원에서 살게 된다. 해먼드(John Hammond)는 자신의 비밀을 세상에 알려 이 놀라운 공원을 일반인들에게 공개할 계획을 세운다. 말콤은 해먼드의 비밀을 알고 있는 몇 안 되는 사람 중 한 사람으로, 그는 처음부터 쥬라기 공원이 불완전하다고 생각했다.

“이 섬에서 계획을 실행에 옮겨서는 안 된다고 내가 끊임없이 말하지 않았던가요” / 라고 말콤은 말했다.

“내가 처음부터 당신이 공원 문을 닫게 될 것이라고 예상하지 않았던가요.”

“문을 닫는다!” / 해먼드는 화가 난 채 서 있었다.

“우습게 됐군.” / ... (해먼드 변호사가 묻는다.)

“당신의 보고서에는 해먼드의 계획이 실패할 것으로 되어있지요?”

“맞습니다.” / “혼돈 이론에 의해서요?” / “그렇습니다.”

... “그러나 실제로 그가 한 것을 보려면 그 섬을 둘러봐야 하지 않겠습니까?”



“아닙니다. 그럴 필요 없습니다. 사소한 것에 신경을 쓸 때가 아닙니다. 혼돈이론에 의하면 그 점은 예상치 못할 정도로 변화가 빠르게 진행될 것입니다.”

“당신은 그 이론을 확신한다 이 말이지요.”

“물론이지요. 틀림없이 확신합니다.”

말콤은 의자에 기대앉으면서 다시 말했다.

“그 점은 마치 꼭 일어나기로 되어 있는 사고처럼 문제덩어리입니다.”

말콤은 날씨처럼 우리가 며칠 앞도 예측하지 못하는 현상이 있다는 점을 자신의 말을 수용하려 하지 않는 그들을 상대로 집요하게 설명한다. 공룡을 무성생식시킨 과학자인 우(Wu) 박사의 논리에 따라, 공룡은 모두 암컷이기 때문에 번식이 되지 않는다는 점은 충분히 예측 가능했다. 그러나 말콤의 생각은 달랐다.

... 말콤이 말했다.

“당신의 compy(*compsognathus longipes*의 애칭)들은 번식을 해요.”

“나는 그렇게 생각하지 않아요.” 우 박사는 머리를 가로저었다.

“아뇨, 그들은 번식을 합니다. *othnielia*, *maiasaur*, *hypsy*, *velociraptor*도 마찬가지입니다.”

그런데 만약 그 공룡들이 번식을 했다면, 공원에 있는 공룡의 수를 세고 추적하는 감시 컴퓨터가 어째서 새끼들을 감지하지 못했을까? 말콤은 컴퓨터 프로그램을 조사해 그 속에 숨어 있는 문제점을 찾아냈다.

“자, 이제 문제점이 보이지요.” / 말콤은 말을 이어간다.

“당신은 공룡이 사라질 것을 걱정해, 컴퓨터가 당신이 입력해 놓은 숫자보다 공룡의 수가 적은지만을 확인하도록 프로그래밍해 놓았어요. 그런데 그게 문제가 아닙니다. 문제는 공룡의 수가 당신이 입력했던 숫자보다 더 많다는 것입니다.”

혼돈 이론은 어떤 구조에서 초기의 미세한 차이점이 나중에는 전혀 예측할 수 없는 변화를 초래할 수 있음을 말해 준다. 어떤 구조에서 무심코 지나쳐버린 작은 결점이 심각해질 수 있어, 말콤이 말한 대로 완전히 복구 불능 상태가 될지도 모른다. 유라기 공원에서는 인간이 수백만 년 전에 존재했던 상황을 재현시키고자 애쓴 결과, 평화롭고 통제가 가능한 것처럼 보였던 한 섬을 혼돈 이론의 제물로 만들고 말았다.

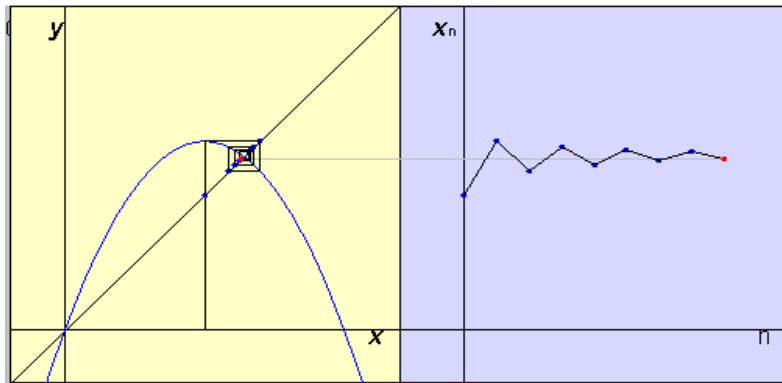
— 출처 : Sanderson M. smith(황선욱 옮김), 『수학사 가볍게 읽기』 (한승, 2002), pp.217~219



예시 답안

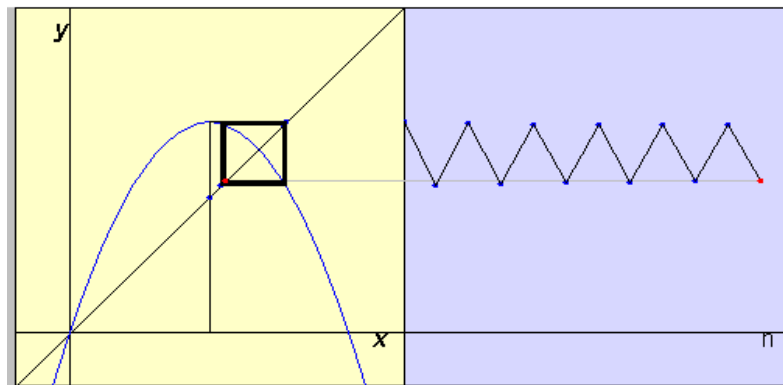
[풀어 보기 1]

아래 그림은 $a=2.6$ 일 때, 오비트 그림이다. 이 값은 $\frac{a-1}{a} \approx 0.6153$ 로 수렴한다.

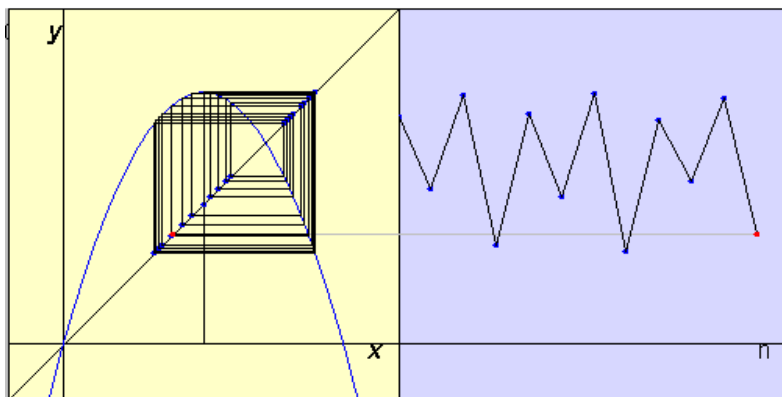


[풀어 보기 2]

다음 그림은 $a=3.1$ 일 때 2-사이클을 갖는 오비트 그림이다.



아래 그림은 $a=3.58$ 일 때, 카오스 현상을 보여주는 오비트 그림이다.



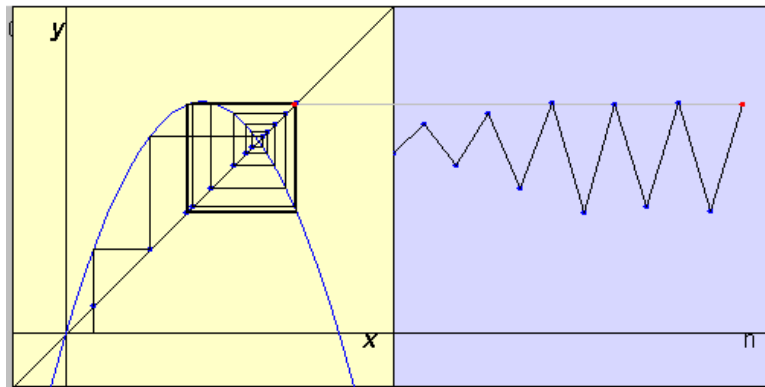


[문제 4-1]

$f(x) = rx(1-x)$ 와 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{r-1}{r}$ 이다. $f'(x) = r-2rx$ 이므로

$x = \frac{r-1}{r}$ 에서 곡선 $f(x) = rx(1-x)$ 의 접선의 기울기는 $r-2r\frac{r-1}{r} = 2-r$ 이다. 문제 3에서 이 기울기가 -1 보다 작으면 부동점으로 수렴하지 못한다. 그런데 $r=3.4$ 이면 $2-r < -1$ 이므로 [예시그림 3]은 부동점으로 수렴하지 못한다.

아래 그림은 초기치 0.1일 때 거미줄그림이다.



그림의 오른쪽에서 보는 것과 같이 두 값을 왕복하는 주기 2인 주기적 패턴을 보여주고 있다.

[문제 4-2]

제시문에서 보는 것과 같이 $f(x) = rx(1-x)$ 에서 r 이 3보다 작으면 거미줄 그림은 부동점으로 수렴함을 알 수 있다. 이것은 어느 한 시점의 상태가 정해지면 미래를 완벽하게 예측할 수 있고, 세상의 미래는 과거와 마찬가지로 그 운명이 결정돼 있다는 결정론적 세계관의 이념에 부합되는 듯하다. 그러나 r 이 3보다 커지면 일정한 값으로 수렴하는 것이 아니고 여러 개의 값을 주기적으로 가지다가, r 의 값이 3.57을 넘으면 그 값을 전혀 예측할 수 없는 혼돈의 상태로 변한다. 즉, 어느 한 시점의 상태가 정해지더라도 미래를 완벽하게 예측한다는 것은 불가능하다는 말이다. 그러나 똑같은 지점으로 되돌아오지는 않지만 거의 비슷한 모양이 반복된다는 것을 알 수 있고 이것은 무질서 속에서도 일정한 규칙을 찾아볼 수 있는 여지를 남겨 놓았다.



고려대학교 모의논술

제시문

(나) [평균값의 정리] 함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 개구간 (a, b) 에서 미분가능하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

(다) 형과 동생이 일직선 도로에서 자전거 시합을 한다. 동생은 출발선에서 50미터 지점에서 출발하기로 하였다. 둘이 동시에 출발하여 T 초 후 형은 200미터 지점을, 동생은 150미터 지점을 통과하였다. 출발 t 초 후 형의 위치를 $x_1(t)$ 미터라 하고 동생의 위치를 $x_2(t)$ 미터라 하면 운동의 물리적 특성으로 인해 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 폐구간 $[0, T]$ 에서 연속이고, 개구간 $(0, T)$ 에서 미분가능한 함수로 볼 수 있다. 따라서 형과 동생의 속도는 각각 $v_1(t)=x_1'(t)$ 미터/초와 $v_2(t)=x_2'(t)$ 미터/초로 표시할 수 있다.

(라) 평면 위를 움직이는 점 P 의 좌표가 시간 t 초 일 때 $P(x(t), y(t))$ 로 주어졌다고 하자. $x(t)$ 와 $y(t)$ 가 미분가능하면 속도벡터 $\vec{v}(t)$ 는 $\vec{v}(t)=(x'(t), y'(t))$ 이며 속력은 $|\vec{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ 이다.

(마) 구간 $0 \leq x \leq a$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 와 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 가 다음의 성질을 가진다고 하자.

$F(a)=\int_0^a f(t)dt=1$ 이고, 구간 $0 \leq x \leq a$ 안의 모든 x 에 대해 $f(x)=3\{F(x)\}^2+1$ 이 성립한다.



[문제 2] 제시문 (나)를 활용하여 다음 문항에 답하십시오.

(a) 제시문 (다)에서 형의 속도가 동생의 속도의 두 배가 되는 시점, 즉 $v_1(t) = 2v_2(t)$ 가 되는 t 가 개구간 $(0, T)$ 안에 존재함을 설명하십시오.

(b) 제시문 (라)와 관련하여 아래 주장의 문제점을 지적하십시오.

$x(t)$ 와 $y(t)$ 가 폐구간 $[t_1, t_2]$ 에서 연속이고, 개구간 (t_1, t_2) 에서 미분 가능하면 평균값의 정리에 의해

$$x'(s) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad y'(s) = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$$

을 만족하는 s 가 t_1 과 t_2 사이에 존재하고, 이 때 속력은 다음과 같다.

$$|\vec{v}(s)| = \frac{\sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2}}{t_2 - t_1}$$

[문제 3] 제시문 (마)에 대하여 다음 문항에 답하십시오.

(a) 구간 $(0, a)$ 에서 $y = \{F(x)\}^3$ 의 도함수를 $f(x)$ 를 이용하여 표현하십시오.

(b) 구간 $[0, a]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, 두 직선 $x = 0$ 과 $x = a$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구하십시오.



제시문 분석

- ① 제시문 (나)는 평균값의 정리를 설명하고 있다. 평균값 정리란 어떤 구간에서 연속이고 미분가능한 함수라면 평균변화율과 순간변화율이 같은 점이 그 구간 내에 적어도 1개는 있다는 것이다.
- ② 제시문 (다)에서는 형과 동생의 T 초 동안의 이동거리가 각각 200미터, 100미터임을 제시하고 있으며, 위치함수를 미분하여 속도를 나타낼 수 있음을 보여주고 있다.
- ③ 제시문 (라)에서는 평면 위에서 움직이는 점에 대한 속도벡터와 속력의 정의를 보여주고 있다.
- ④ 제시문 (마)에서는 $f(x)$ 와 $F(x)$ 사이의 관계식을 제시하고 있다.

논제 분석

- ① $v_1(t) = 2v_2(t)$ 가 되는 t 가 개구간 $(0, T)$ 안에 존재함을 설명할 수 있는가?

제시문 (다)에서 설정된 형과 동생이 자전거 시합을 하는 상황에서 형의 속도가 동생의 속도의 두 배가 되는 시점이 있음을 설명하도록 요구하고 있다. 새로운 함수 $F(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$ 를 정의하여 제시문 (나)에서 언급한 평균값의 정리를 이용하여 설명한다.

- ② [논제 2]의 (b)에 제시된 주장의 문제점을 지적할 수 있는가?

평균값의 정리를 잘못 적용한 예를 제시하고 논리적인 오류를 찾아 설명하기를 요구하고 있다. 두 함수에 각각 평균값의 정리를 적용하여 얻은 상수의 값이 같을 필요가 없음을 지적하면 된다.

- ③ $y = \{f(x)\}^3$ 의 도함수를 구할 수 있는가?

곱의 도함수와 정적분으로 정의된 함수의 도함수를 구할 수 있는지 묻고 있다. $\{[f(x)]^n\}' = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ 와 제시문 (마)의 관계식을 이용하여 $y = \{f(x)\}^3$ 의 도함수를 구하면 된다.

- ④ 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

함수의 그래프와 x 축, x 축과 수직인 두 직선으로 이루어진 영역을 x 축 둘레로 회전하였을 때 얻어지는 회전체의 부피를 구할 수 있는지 묻고 있다. 구간 $[0, a]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, $x = 0$ 와 $x = a$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피 V 는 $V = \pi \int_0^a \{f(x)\}^2 dx$ 임과 앞의 논제에서 주어진 조건을 적절히 이용하면 된다.

**배경지식 쌓기****① 평균값의 정리**

함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 개구간 (a, b) 에서 미분가능하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

② 속도

수직선 위를 움직이는 점 P 의 좌표 y 가 시각 t 의 함수 $y=x(t)$ 로 나타내어질 때, 시각 t 에서의 점 P 의 속도 v 는 $v=\frac{dy}{dt}=x'(t)$ 이다.

③ 속도벡터와 속력

평면 위를 움직이는 점 P 의 좌표가 시간 t 초일 때 $P(x(t), y(t))$ 로 주어지고, $x(t)$ 와 $y(t)$ 가 미분가능하면 속도벡터 $\overrightarrow{v(t)}$ 는 $\overrightarrow{v(t)}=(x'(t), y'(t))$ 이며 속력은 $|\overrightarrow{v(t)}|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ 이다.

**풀어 보기**

1. 평균값의 정리를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$$

2. 임의의 두 실수 $a, b (a < b)$ 에 대하여 다음을 증명하시오.

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

**읽기 자료**

미분은 곡선의 접선을 긋는 것에서, 적분은 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하는 것에서 시작되었다고 한다. 미분법과 적분법에 대해서는 그리스 시대부터 논의가 이루어져 왔는데, 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 오늘날의 구분구적법과 유사한 방법으로 평면 영역과 구면의 넓이를 구하였고, 프랑스의 페르마(1601~1665)는 함수의 극솟값과 극댓값을 구하는데 미분법과 유사한 방법을 이용하였다. 그러나 오늘날과 같은 미적분학은 뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되었다. 영국의 뉴턴(1642~1727)은 운동체의 속도를 구하는 과정에서 미분법을 발견하였다. 그는 행성의 움직임을 연구하기 위해 미적분을 고안하였으며, 미분방정식을 풀어서 케플러 법칙을 증명하였다. 독일의 라이프니츠(1646~1716)는 곡선의 접선과 함수의 극대, 극소를 고찰하는 과정에서 미분법을 발견했으며, 현대적인 미분과 적분의 기호를 개발하는데 크게 공헌하였다.

뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되고, 오일러 등 여러 학자에 의하여 발전된 미분법과 적분법은 현대수학의 가장 기본적인 개념이 되었을 뿐만 아니라 자연과학, 공학 및 사회과학 등 거의 모든 분야에 응용되고 있다. 예를 들어 최댓값, 최솟값을 구하는데 사용되기도 하고, 움직이는 물체의 운동이나 사물의 변화하는 현상을 기술하는데 이용되기도 한다. (2006 서울대 예시)



예시 답안

[풀어 보기 1]

$x \rightarrow +0$ 이므로 $x > 0$

$\therefore 0 < \sin x < x$

$f(x) = \sin x$ 라고 하면 $f(x)$ 는 폐구간 $[\sin x, x]$ 에서 연속이고 개구간 $(\sin x, x)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c) \quad (\sin x < c < x)$$

즉, $\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c) \quad (\sin x < c < x)$ 를 만족하는 c 가 존재한다.

$f'(c) = \cos c$ 이고 $x \rightarrow +0$ 일 때 $0 < \sin x < x$ 에서 $c \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow 0} \cos c = 1$$

[풀어 보기 2]

$f(x) = \sin x$ 라 하면 $f'(x) = \cos x$

평균값의 정리로부터 $\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$ 를 만족하는 c 가 존재한다.

$$\therefore \left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| = |\cos c| \leq 1$$

$$\therefore |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

[문제 2]

(a) $F(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$ 라 하면 함수 $F(t)$ 는 폐구간 $[0, T]$ 에서 연속이고, 개구간 $(0, T)$ 에서 미분가능한 함수다. 따라서 제시문 (나)의 평균값의 정리에 의해

$$\frac{F(T) - F(0)}{T - 0} = F'(t)$$

를 만족하는 t 가 개구간 $(0, T)$ 안에 적어도 하나 존재한다. ……………①

그런데 $F(T) - F(0) = [x_1(T) - 2x_2(T)] - [x_1(0) - 2x_2(0)] = (200 - 300) - (0 - 100) = 0$ 이고 $F'(t) = x_1'(t) - 2x_2'(t) = v_1(t) - 2v_2(t)$ 이므로 ①에 의하여 $v_1(t) - 2v_2(t) = 0$, 즉 $v_1(t) = 2v_2(t)$ 가 되는 t 가 개구간 $(0, T)$ 안에 존재한다.

(b) 평균값의 정리에 의해 $x'(s_1) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ 을 만족하는 s_1 이 t_1 과 t_2 사이에 존재하고,

$y'(s_2) = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}$ 을 만족하는 s_2 가 t_1 과 t_2 사이에 존재한다. 그러나 이



s_1 과 s_2 가 서로 같은 값이 된다는 보장은 없다. 따라서 위 식과 같이 속력을 계산하는 방법은 잘못된 방법이다.

[문제 3]

(a) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 이므로 $F'(x) = f(x)$ 이다.

또, 제시문 (마)에 의하여 $f(x) = 3\{F(x)\}^2 + 1$ 이므로 $3\{F(x)\}^2 = f(x) - 1$ 이다.

따라서 $y = \{F(x)\}^3$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$y' = 3\{F(x)\}^2 F'(x) = f(x)\{f(x) - 1\}$$

(b) (a)에 의하여 $\frac{d}{dx} \{F(x)\}^3 = f(x)\{f(x) - 1\}$ 이므로 $\{f(x)\}^2 = \frac{d}{dx} \{F(x)\}^3 + f(x)$ 이다.

또 제시문 (마)에 의하여 $F(a) = \int_0^a f(t) dt = 1$ 이다.

따라서 구간 $[0, a]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, 두 직선 $x = 0$ 와 $x = a$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_0^a \left\{ \frac{d}{dx} \{F(x)\}^3 + f(x) \right\} dx \\ &= \pi \left\{ [F(x)^3]_0^a + \int_0^a f(x) dx \right\} = \pi(1+1) = 2\pi \text{ 이다.} \end{aligned}$$



고려대학교 수시 2-(가)

제시문

(가)

삼차정사각행렬 A 와 B 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

자연수 n 에 대하여 좌표공간 위의 점 $P_n(a_n, b_n, c_n)$ 과 $Q_n(d_n, e_n, f_n)$ 의 성분이 다음 등식에 의해 정의된다.

$$A^n \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B^n \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

[문제 1]

- (a) 원점 O 와 세 점 $R(1,0,0)$, $S(1,1,0)$, $T(1,1,1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OP_n} = x_n \overrightarrow{OR} + y_n \overrightarrow{OS} + z_n \overrightarrow{OT}$ 를 만족하는 실수 x_n, y_n, z_n 을 찾으시오.
- (b) 원점 O 와 두 점 P_n, P_{n+1} 에 의하여 만들어지는 삼각형 $\triangle OP_n P_{n+1}$ 의 둘레의 길이를 ℓ_n 이라고 할 때, 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n$ 의 값을 구하시오.
- (c) 원점 O 와 세 점 P_n, Q_n, Q_{n+1} 에 의하여 만들어지는 사면체 $OP_n Q_n Q_{n+1}$ 의 부피를 V_n 이라고 할 때, 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ 의 값을 구하시오.



제시문 분석

- ① 행렬 A 와 B 에 관한 식을 제시하고 있다.

행렬 A 와 B 가 삼차정사각행렬임을 이용하여 적절한 기호를 사용해 행렬의 곱셈을 하면 행렬 A 와 B 를 쉽게 구할 수 있다.

- ② 행렬의 연산을 활용하여 수열을 귀납적으로 정의하고 있다.

적절한 조작을 하면 각 수열에 대한 점화식을 찾을 수 있다.



문제 분석

- ① 행렬의 연산과 수열의 귀납적 정의를 이용하여 x_n, y_n, z_n 을 계산할 수 있는가?

먼저 A 와 B 를 찾은 후 $A^n \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ 을 변형하여 a_n, b_n, c_n 을 귀납적으로 정의하고

문제에 주어진 식에 대입하여 연립방정식을 풀면 x_n, y_n, z_n 을 찾을 수 있다.

- ② 귀납적으로 정의된 점으로 이루어진 삼각형의 둘레의 길이의 극한값을 구할 수 있는가?

둘레의 길이의 극한값은 각 점의 극한을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 둘레의 길이와 같음을 이용하여 구할 수 있다.

- ③ 귀납적으로 정의된 점으로 이루어진 사면체의 부피의 극한값을 구할 수 있는가?

[문제 1-(a)]에서와 같은 방법으로 행렬 B 와 d_n, e_n, f_n 을 구하고 [문제 1-(b)]에서와 마찬가지로 각 점의 극한을 꼭짓점으로 갖는 사면체의 부피를 구하면 된다.



배경지식 쌓기

① 수열의 귀납적 정의

이웃하는 항 사이의 관계식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 을 정의하는 것을 수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의라 하고, 이 때 이웃하는 항 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

기본적인 점화식 : 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $n=1,2,3,\dots$ 일 때

(1) $a_{n+1} - a_n = d \Rightarrow$ 공차가 d 인 등차수열

(2) $a_{n+1} \div a_n = r \Rightarrow$ 공비가 r 인 등비수열

(3) $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n \Rightarrow$ 등차수열

(4) $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \Rightarrow$ 등비수열

(5) $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} \Rightarrow$ 조화수열

② 무한등비수열의 수렴과 발산

(1) 무한등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 조건은 $-1 < r \leq 1$

(2) 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 이 수렴하기 위한 조건은 $a=0$ 또는 $-1 < r \leq 1$



풀어 보기

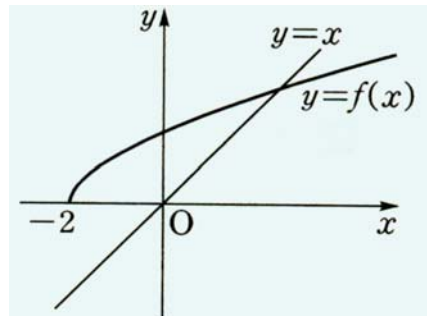
1. 아래 명제가 참인지 거짓인지 판별하시오.

「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 (b_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ 이다.」

2. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 일 때, 아래 그림은 $y=f(x), y=x$ 의 그래프이다. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1 = 1, a_{n+1} = f(a_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.



3. $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^n \theta + \cos^n \theta}{\sin^n \theta - \cos^n \theta}$ 의 값을 구하시오.



입기 자료

→ 행렬의 곱셈

행렬의 곱셈이 '그렇게 정의될 수밖에 없는 이유'는 선형사상과 행렬이 결국 같기 때문이다.

[정의 1]

n 차원 벡터 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 들을 모아놓은 공간을

$$R_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \text{은 실수}\}$$

와 같이 표시하고, 줄여서 n 차원 벡터공간이라고 하면 이 때, R_n 에는 다음과 같은 두 가지 연산이 주어진다.

$$(1) \text{ 덧셈} : (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$$

$$(2) \text{ 상수곱} : k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n)$$

[정의 2]

R_n 에서 R_m 로 가는 함수 f 가 다음 두 조건을 만족하면, f 를 선형사상(linear map)이라고 한다.

$$(1) R_n \text{에 속한 임의의 두 벡터 } v, w \text{에 대해, } f(v+w) = f(v) + f(w)$$

$$(2) R_n \text{에 속한 임의의 벡터 } v \text{와 임의의 실수 } k \text{에 대해, } f(kv) = kf(v)$$

이를 요약하면, 우리가 벡터공간에서 정의한 두 연산인 덧셈과 상수곱이 함수 안팎으로 자유롭게 들어오고 나올 수 있는 함수가 바로 선형사상이다. 즉, 선형사상은 두 벡터공간 사이의 연산을 보존하는 함수라는 의미이다.

[명제 3]

n 차원 벡터 e_1, e_2, \dots, e_n 을

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

로 정의하자. 즉, e_i 는 i 번째 좌표만 1이고 나머지는 모두 0인 벡터이다. 이 때, 다음이 성립한다.

$$(1) \text{ 임의의 } n \text{차원 벡터 } v \text{는 } v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \text{의 꼴로 유일하게 표현된다.}$$

(2) 따라서, $f: R_n \rightarrow R_m$ 이 선형사상이면, f 의 값은 $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ 만 알면 모두 결정된다.

[증명]

$$(1) v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$(2) f(v) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$$

**[정의 4]**

$f: R_n \rightarrow R_m$ 이 선형사상이라고 하자. 이 때, $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ 로 두면, 이 계수들로부터 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 를 만들 수 있다. 이 행렬을 $\Phi(f)$ 라고 정의하자. 즉, $\Phi(f) = A = (a_{ij})$ 이다. 이 정의는 우리가 선형사상 f 를 어떤 행렬과 대응시킬 수 있음을 알려준다.

[정리 5]

$f: R_n \rightarrow R_m$ 이 선형사상이라고 하자. $v = (x_1, x_2, \dots, x_n), f(v) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 이라고 두면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \Phi(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[증명]

위 식이 성립한다는 것은 $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ 가 성립함을 뜻한다. 혹은 $(y_1, y_2, \dots, y_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)$
 $= x_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + x_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + x_n(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$

이 성립함을 뜻하는데, 위 식은 결국

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_m) &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) \\ &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \\ &= f(v) \end{aligned}$$

이므로, 증명되었다.

이 정리는 우리가 선형사상을 결국 행렬과 같은 것으로 볼 수 있음을 알 수 있게 한다. 여기서는 선형사상을 행렬로 보는 방법을 소개하고 있으며 이를 거슬러 올라가 보면, 각각의 [$m \times n$ 행렬]에 대해, 이에 대응하는 [R_n 에서 R_m 으로의 선형사상]을 만들어낼 수 있음을 확인할 수 있다. 따라서 선형사상과 행렬은 같은 것이다.

여기에서 행렬의 곱셈이 자연스럽게 따라 나오게 되는 것이다.

[정리 6]

$f: R_n \rightarrow R_m$ 과 $g: R_m \rightarrow R_1$ 이 각각 선형사상이라고 하자.

그러면 $A = \Phi(f), B = \Phi(g)$ 라고 할 때,

- (1) g 와 f 의 합성함수 $g \circ f$ 는 R_n 에서 R_1 으로의 선형사상이고,
- (2) $\Phi(g \circ f) = \Phi(g)\Phi(f) = BA$.

즉, 행렬의 곱셈은 선형사상의 합성과 본질적으로 같다.



[증명]

(1) $g \circ f$ 가 [정의 2]를 만족하는지 확인하면 된다. 우선 $v, w \in R_n$ 이라고 하자. 그러면

$$(g \circ f)(v+w) = g(f(v+w)) = g(f(v)+f(w)) = g(f(v)) + g(f(w)) = (g \circ f)(v) + (g \circ f)(w)$$

이고, 마찬가지로 $v \in R_n$ 이고 k 가 실수이면

$$(g \circ f)(kv) = g(f(kv)) = g(kf(v)) = kg(f(v)) = k(g \circ f)(v)$$

이므로, $g \circ f$ 는 선형사상이다.

(2) [정리 5]를 증명하는 아이디어를 이용하여 증명할 수 있다.

앞서 살펴본 바와 같이 행렬의 곱셈은 선형사상의 합성이다. 이는 너무나도 자연스러운 정의이며, 이를 확인하면 행렬의 곱셈이 결합법칙을 만족하는 것이 아주 당연한 것이 된다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

거짓이다.

(반례) $a_n = 2^n$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 이라 두면, 가정은 참이지만 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 은 진동한다.

무한의 연산은 실수 연산과 다름을 인식하도록 한다.

[풀어 보기 2]

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ 가 성립하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라 두면, $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ 을 풀어

$\alpha = 2$ ($\because a_1 > 1$)를 얻는다.

[풀어 보기 3]

분자, 분모를 $\sin^n \theta$ 로 나누어 정리하면, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^n \theta + \cos^n \theta}{\sin^n \theta - \cos^n \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \cot^n \theta}{1 - \cot^n \theta} = 1$ 이다.

[문제 1-(a)]

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ 라 두면 } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{6}, e = \frac{1}{2}, f = -\frac{1}{6}, i = \frac{1}{3}, d = g = h = 0$ 이고, 따라서

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 이다. 그런데 } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 이므로 } a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 1 \text{ 이고,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A A^n \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ 이므로 이 식을 정리하면 다음을 얻는다.}$$



$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{6}c_n \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{6}c_n \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$(a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 1)$$

여기서 $c_1 = 1$ 이고 ③에서 $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n$ 이므로 $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다.

①-② 하면 $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$ 이고 $a_1 - b_1 = 4 - 2 = 2$ 이므로

$$a_n - b_n = 2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

가 된다. 또 ②-③ 하면 $b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - c_n)$ 이고 $b_1 - c_1 = 2 - 1 = 1$ 이므로

$$b_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

그런데 $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로 ⑤에서 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이다. 이것과 ④식을 이용하면

$a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 를 얻는다. 그런데 $\overrightarrow{OP_n} = x_n \overrightarrow{OR} + y_n \overrightarrow{OS} + z_n \overrightarrow{OT}$ 를 만족하므

$$\text{로 } \begin{cases} a_n = x_n + y_n + z_n \cdots \cdots \textcircled{6} \\ b_n = y_n + z_n \cdots \cdots \textcircled{7} \\ c_n = z_n \cdots \cdots \textcircled{8} \end{cases}$$

a_n, b_n, c_n 을 ⑥, ⑦, ⑧ 식에 대입하여 정리하면,

$$\therefore x_n = 2, y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, z_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

[문제 1-(b)]

$P_n(a_n, b_n, c_n) = P_n\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ 이므로

$n \rightarrow \infty$ 일 때, 점 P_n 과 P_{n+1} 은 점 $(2, 0, 0)$ 에 가까이 간다. 따라서 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $\triangle OP_n P_{n+1}$ 의 둘레의 길이 ℓ_n 의 극한값은 4이다. 즉

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = 4$$

[문제 1-(c)]

$$B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 에서 } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ e_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = B B^n \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



이므로 $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$, $e_{n+1} = -f_n$, $f_{n+1} = e_n$ 이고, $d_1 = \frac{7}{2}$, $e_1 = -3$, $f_1 = 5$ 이다.

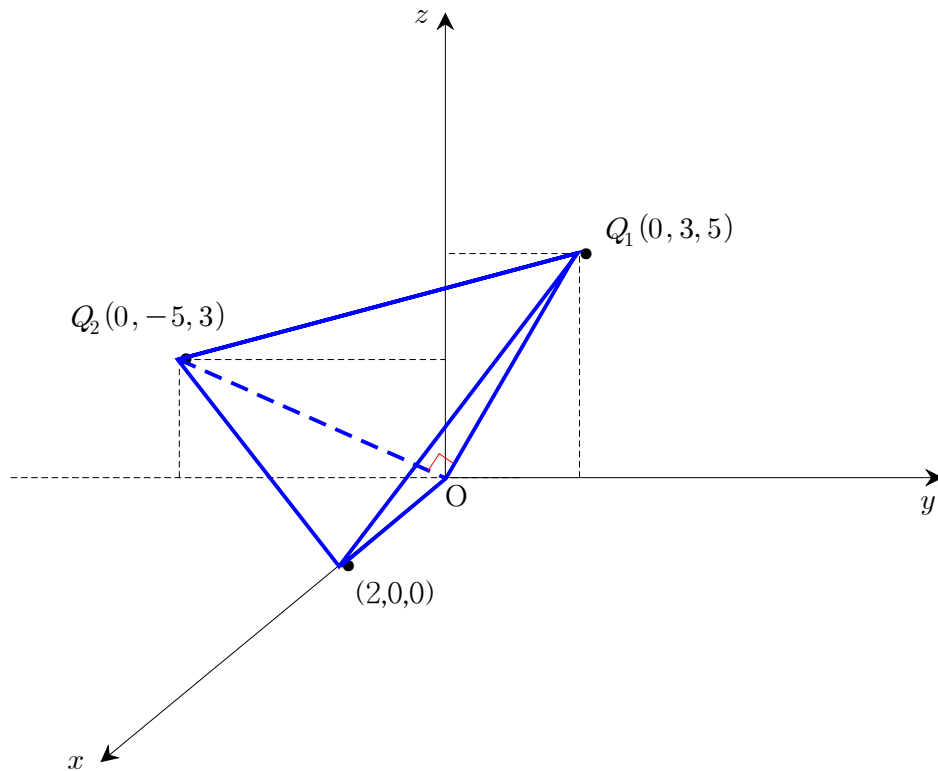
여기서 일반항을 구해 보면

$$d_n = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (e_n, f_n) = \begin{cases} (3, 5) & (n=4k-3) \\ (-5, 3) & (n=4k-2) \\ (-3, -5) & (n=4k-1) \\ (5, -3) & (n=4k) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 자연수})$$

여기서 $n \rightarrow \infty$ 라 하면 P_n 은 점 $(2, 0, 0)$ 에 가까이 가고, Q_n 은 $(0, e_n, f_n)$ 에 가까이 간다.

그런데 $R_n(0, e_n, f_n)$ 은 yz 평면 위의 점이며, OR_n 과 OR_{n+1} 은 서로 직각을 이루며 $\overline{OR_n} = \overline{OR_{n+1}} = 2\sqrt{17}$ 이므로 $\triangle OR_n R_{n+1} = \frac{1}{2}(2\sqrt{17})^2 = 34$ 이다. 따라서 $n \rightarrow \infty$ 로 가면 사면체 $OP_n Q_n Q_{n+1}$ 은 밑면이 직각이등변삼각형인 $\triangle OR_n R_{n+1}$ 이고 높이는 2인 사면체로 가까이 가므로

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{68}{3}$$





고려대학교 수시 2-(나)

제시문

(나) 그림 1에서 xy 평면 위의 $x^2 + y^2 \leq 1$ 을 만족하는 영역을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 A 라고 한다.

그림 2에서 xy 평면 위의 $0 \leq y \leq a(1-x^2)$ 을 만족하는 영역을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 B 라고 한다. 단, a 는 양의 실수이다.

그림 3은 그림 2에 표시된 영역을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체를 나타낸다. 이 회전체를 z 축에 수직인 평면 $z=k$ ($-1 \leq k \leq 1$)로 자른 단면을 R_k 라고 할 때, R_k 는 평면 $z=k$ 에서

$$0 \leq y \leq a(1-k^2-x^2)$$

을 만족하는 영역임을 알 수 있다. 그림 3에 나타난 회전체를 다시 z 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 C 라고 한다.

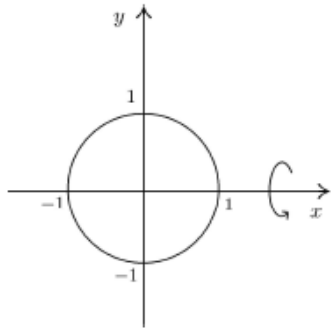


그림 1

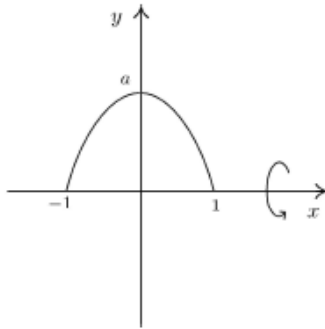


그림 2

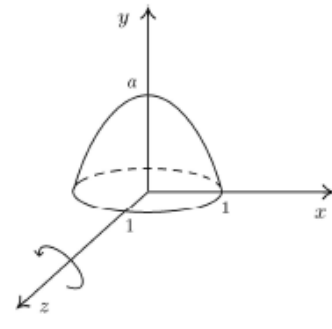


그림 3

[문제 2]

(a) 점 $(0, 0, k)$ 에서 R_k 위의 점까지 거리의 최댓값을 구하시오.

(b) $\max\{A, B\} < C$ 를 만족하는 a 의 조건을 찾으시오. 단, $\max\{A, B\}$ 는 A 와 B 의 최댓값을 나타낸다.



제시문 분석

- ① xy 평면에서 $x^2 + y^2 \leq 1$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 A , 포물선 $y = a(1 - x^2)$ (단, $a > 0$)과 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 B 라 한다. 이때 A 는 구의 부피, B 는 포물선을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피이다.
- ② 포물선 $y = a(1 - x^2)$ (단, $a > 0$)과 x 축으로 둘러싸인 부분을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체를 다시 z 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 C 라 한다.



논제 분석

- ① 점 $(0, 0, k)$ 에서 R_k 위의 점까지 거리의 최댓값을 구할 수 있는가?

점 $(0, 0, k)$ 를 O 라 하고 R_k 의 경계 부분에 있는 임의의 점 P 를 좌표로 표현하여 \overline{OP} 의 길이를 식으로 만들고, 미분을 이용하여 그 최댓값을 구하면 된다.

- ② $\max\{A, B\} < C$ 를 만족하는 a 의 조건을 찾을 수 있는가?

A 는 반지름의 길이가 1인 구의 부피임을 이용하여 간단히 그 값을 계산하고, B 는 포물선을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피이므로 회전체의 적분을 이용하여 그 값을 계산하면 된다. 또, [논제 2-(a)]에서 구한 식을 활용하여 a 의 값의 범위에 따른 C 의 값을 구한다. 이제 a 의 값의 범위에 따라 $\max\{A, B\}$ 의 값과 C 의 값을 비교하면 된다.



배경지식 쌓기

- ① 함수의 최댓값과 최솟값

함수 $y = f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며, 이 때 $f(x)$ 의 극값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 것이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이다.

- ② 회전체의 부피

폐구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $x = a, x = b$ ($a < b$) 및 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축의 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V 는

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$



풀어 보기

1. 영역 $|x|+|y-1|\leq 1$ 을 x 축에 대하여 회전시켜 얻은 입체의 부피를 구하시오.

2. 곡선 $y=\sin x$ ($0\leq x\leq\pi$)와 직선 $y=0$ 으로 둘러싸인 면이 직선 $y=c$ ($0\leq c\leq 1$)를 축으로 회전한다.

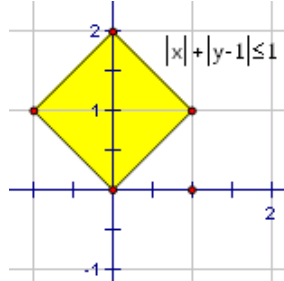
(1) 회전체의 부피를 최소로 하는 c 값을 구하고, 그 때의 부피를 구하시오.

(2) 회전체의 부피를 최대로 하는 c 값을 구하고, 그 때의 부피를 구하시오.



예시 답안

[풀어 보기 1]



구하고자 하는 입체의 부피를 V 로 두면

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \{(2-x)^2 - x^2\} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (4-4x) dx \\ &= 2\pi [4x - 2x^2]_0^1 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

* 파푸스-굴딘의 정리를 이용한 다른 풀이

$$V = \bar{r}A = 2\pi \times 1 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = 4\pi$$

[풀어 보기 2]

회전축이 $y=c$ 라면 회전축을 $y=0$ 으로 잡고, $y=\sin x - c$ 를 회전시켜도 결과는 동일하므로 회전체의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi (\sin x - c)^2 dx = \pi \int_0^\pi (\sin^2 x - 2c \sin x + c^2) dx \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2c \sin x + c^2\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + 2c \cos x + c^2 x\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + c^2\pi^2 - 4c\pi \\ &= \pi^2 \left(c - \frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi^2 - 4 \end{aligned}$$

여기서 $V_{c=0} = \frac{1}{2}\pi^2$, $V_{c=\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{2}\pi^2 - 4$, $V_{c=1} = \frac{3}{2}\pi^2 - 4\pi$ 이고, $\frac{1}{2}\pi^2 > \frac{3}{2}\pi^2 - 4\pi$ 이

다. 따라서 부피를 최소로 하는 c 의 값은 $\frac{2}{\pi}$ 이고 그 때의 부피는 $\frac{1}{2}\pi^2 - 4$ 이며, 부

피를 최대로 하는 c 의 값은 0이고 그 때의 부피는 $\frac{1}{2}\pi^2$ 이다.

**[문제 2-a]**

점 $O(0, 0, k)$ 와 R_k 위의 점까지의 최댓값은 R_k 의 경계에 위치한 점까지의 거리임이 자명하므로 경계 위의 임의의 점을 $P(t, a(1-k^2-t^2), k)$ 라 하고 \overline{OP} 의 최댓값을 찾으려 한다. 이 때 t 의 범위는 $0 \leq t \leq \sqrt{1-k^2}$ 이다.

$\overline{OP}^2 = L(t)$ 라 하면 $L(t) = t^2 + a^2(1-k^2-t^2)^2$ 이다. 계산의 편의를 위해 $1-k^2 = c$ 라 하자. 그러면 $L(t) = t^2 + a^2(c-t^2)^2$ 이다. 이를 t 에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{dL(t)}{dt} = 2t(1-2a^2c+2a^2t^2)$$

따라서 $\frac{dL(t)}{dt} = 0$ 이 되는 t 는 $t=0, t = \sqrt{c - \frac{1}{2a^2}}$ 이다. $L(t)$ 는 $\sqrt{c - \frac{1}{2a^2}}$ 좌우에서 감소하다 증가하므로 $L(t)$ 의 최댓값은

$$L(0) = a^2c^2 = a^2(1-k^2) \text{ 또는 } L(\sqrt{c}) = c = 1-k^2 \text{이다.}$$

여기서 $0 < a \leq 1$ 이면 $L(0) < L(\sqrt{c})$ 이므로 최댓값은 $L(\sqrt{c}) = c = 1-k^2$ 이고,

$$a > 1 \text{이면 } L(0) > L(\sqrt{c}) \text{이므로 최댓값은 } L(0) = a^2c^2 = a^2(1-k^2) \text{이다.}$$

즉, $0 < a \leq 1$ 일 때 \overline{OP} 의 최댓값은 $\sqrt{1-k^2}$ 이고,

$$a > 1 \text{ 일 때 } \overline{OP} \text{의 최댓값은 } a\sqrt{1-k^2} \text{이다.}$$

[문제 2-b]

A 는 반지름의 길이가 1인 구의 부피이므로 $A = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

B 는 포물선을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$B = 2\pi \int_0^1 y^2 dx = 2a^2\pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = 2a^2\pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{16}{15}\pi a^2$$

C 는 [문제 2-(a)]에서 구한 식을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$0 < a \leq 1 \text{ 일 때, } C = 2\pi \int_0^1 (1-k^2) dk = \frac{4}{3}\pi$$

$$a > 1 \text{ 일 때, } C = 2\pi \int_0^1 a^2(1-k^2) dk = \frac{4}{3}\pi a^2$$

이때, $A = B$ 가 되는 a 의 값을 구하면 $\frac{4}{3}\pi = \frac{16}{15}\pi a^2$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ($\because a > 0$)가 된다.

즉, $a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때 $\max\{A, B\} = A$ 이고, $a \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때 $\max\{A, B\} = B$ 이다. 이

것을 C 의 값과 비교하면 다음과 같다.



(i) $0 < a \leq 1$ 일 때,

$\max\{A, B\} = A$ 이고, $C = A$ 이므로 $\max\{A, B\} < C$ 를 만족하는 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $1 < a \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$\max\{A, B\} = A = \frac{4}{3}\pi$ 이고, $C = \frac{4}{3}\pi a^2$ 이므로 항상 $\max\{A, B\} < C$ 이다.

(iii) $a > \frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$\max\{A, B\} = B = \frac{16}{15}\pi a^2$ 이고, $C = \frac{4}{3}\pi a^2$ 이므로 항상 $\max\{A, B\} < C$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\max\{A, B\} < C$ 를 만족하는 a 의 범위는 $a > 1$ 이다.

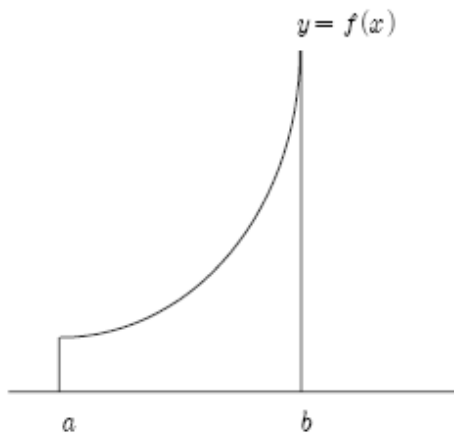


8

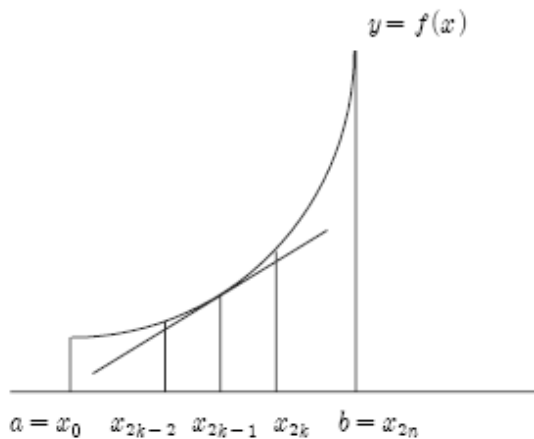
연세대학교 모의 문항 (1)

제시문

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $y=f(x)$ 의 그래프가 [그림 1]과 같을 때, 다음 물음에 답하시오.



[그림 1]



[그림 2]

[문제 1-1] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 부터 점 $(b, f(b))$ 까지의 곡선의 길이를 정적분의 정의를 이용하여 구하시오. (10점)

[문제 1-2] [그림 2]는 [그림 1]의 폐구간 $[a, b]$ 를 $2n$ 개의 균등한 소구간으로 나눈 그래프이다. 이때, 점 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$ 에서의 접선의 식을 $y=g_k(x)$ 라 하자. 접선 위의 점 $(x_{2k-2}, g_k(x_{2k-2}))$ 와 점 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$ 사이의 거리를 l_k 라고 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k$ 의 값을 구하시오. (20점)

[문제 1-3] 위의 [문제 1-1]과 [문제 1-2]의 결과를 비교 분석하고, [문제 1-1]과 같은 결론을 유도할 수 있는 다른 방법에 대하여 논하시오. (10점)



제시문 분석

- ① 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이라는 조건과 함께 [그림 1]에서 그 그래프를 제시하고 있다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 주어진 구간에서 연속이며 미분가능임을 알 수 있다. 이는 주어진 구간의 임의의 점에서 접선을 그을 수 있다는 조건이 되므로 [문제 1-2]의 해결을 위한 바탕이 됨과 동시에 중간값의 정리나 평균값의 정리를 응용할 수 있는 근거가 된다.
- ② [그림 2]에서는 [문제 1-2]의 이해를 위하여 주어진 구간을 $2n$ 등분하여 n 등분한 각 구간의 중점에서의 접선을 보여주고 있다.



문제 분석

- ① 정적분의 정의를 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?
주어진 구간을 n 등분하여 각 구간의 선분의 길이의 총합의 극한값으로 곡선의 길이를 구하면 된다. 평균값의 정리와 정적분의 정의에 대한 정확한 이해가 필요하다.
- ② 균등하게 분할한 각 구간에서의 접선의 길이의 합의 극한을 구할 수 있는가?
주어진 구간을 $2n$ 개의 소구간으로 나누어 홀수 번째 경계에서의 접선을 이용하도록 요구하는 이 방법은 결국 n 등분한 구간의 중점에서의 접선의 방정식을 이용하여 선분의 길이를 구하고, 그 총합의 극한값으로 곡선의 길이를 구하게 된다. 이는 [문제 1-1]에서 사용한 방법을 적용하면서 새로운 길이의 합을 활용하도록 요구하는 것이다.
- ③ 서로 다른 방법으로 구한 결과를 비교할 수 있는가? 또 같은 결과를 얻을 수 있는 또 다른 방법을 제시할 수 있는가?
[문제 1-1]과 [문제 1-2]의 결과는 같아야 한다. 비록 다른 선분의 길이의 합을 이용하여 곡선의 길이를 구하였지만 극한을 이용하여 정적분의 정의대로 나타냈기 때문에 결과가 같다는 설명을 할 수 있어야 한다. 또한 이 두 가지와 다른 방법을 제시하라는 질문은 두 방법을 혼합하는 방법 등 여러 가지 대안이 있을 수 있다.



배경지식 쌓기

① 곡선의 길이

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 를 포함하는 개구간에서 미분가능하고 $f'(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 점 $(b, f(b))$ 까지의 곡선의 길이 L 은

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

이다.

② 정적분의 정의

함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구분구적법으로 구하여 보자.

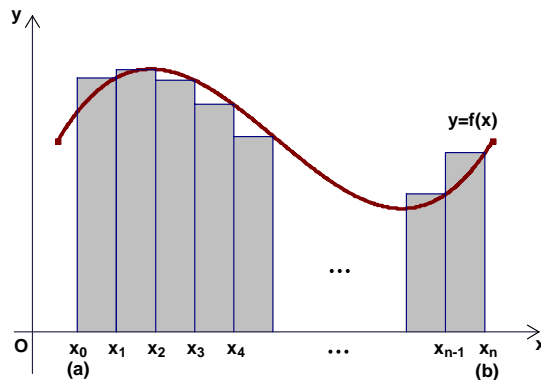
구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$x_0 (=a), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n (=b)$$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx 라고 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

이다.



이 때, 위 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함수값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합은 S_n 이라 하면

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

이다.

여기서, $n \rightarrow \infty$ 이면 S_n 은 구하는 도형의 넓이 S 에 한없이 가까워진다.

$$\therefore S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

일반적으로, 함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이면



$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

가 항상 존재한다. 이 때, 이 극한값을 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라고 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x) dx$$

와 같이 나타낸다.

그리고 $\int_a^b f(x) dx$ 의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 a 에서 b 까지 적분한다고 하고, a 를 이 정적분의 아래끝, b 를 위끝이라 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

(단, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)

③ 평균값의 정리

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 개구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

인 c 가 적어도 하나 존재한다.



풀어 보기

1. 정적분의 정의에 의하여 $\int_0^2 x^2 dx$ 의 값을 구하시오.
2. 정적분의 정의를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ 을 구하시오.
3. $y = x^{\frac{3}{2}}$ 의 폐구간 $[0, 4]$ 에서의 곡선의 길이를 구하시오.



읽기 자료

→ 리만합을 이용한 정적분의 정의

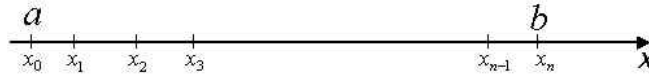
함수 f 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의되었다고 하자. 구간 $[a, b]$ 의 양 끝점 a 와 b 사이에 있는 임의의 $n-1$ 개의 점 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 을

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

가 되도록 잡으면, $n+1$ 개의 점 $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 는 구간 $[a, b]$ 를 n 개의 소구간 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ 으로 나눈다. 이들 n 개의 소구간의 점들의 집합

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

을 $[a, b]$ 의 분할(partition)이라 하고, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 을 P 의 분할점이라 한다.



분할 P 의 각 k 번째 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 의 길이를 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 로 표시한다. 이 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 들 중에서 가장 큰 길이의 값을 P 의 노름(norm)이라 하고 $\|P\|$ 로 나타낸다. 즉,

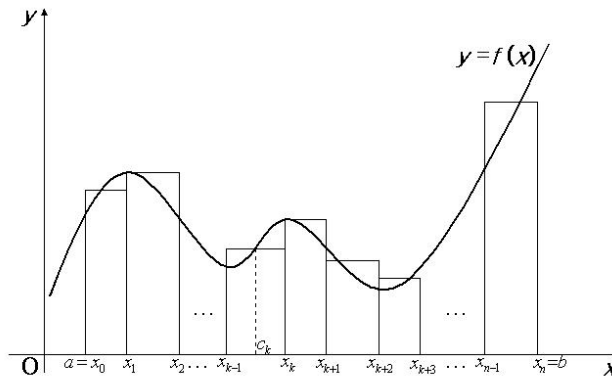
$$\|P\| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

특히 각 소구간의 길이 Δx_k 가 모두 같으면 분할 P 를 정칙분할이라 한다. 이 때 $\|P\|$ 는 $\frac{b-a}{n}$ 가 된다.

분할 P 의 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 내에서 임의의 점 c_k 를 택하여 만든 합

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

를 함수 f 의 분할 P 에 대한 리만합(Riemann sum)이라고 부른다.





리만합은 주어진 함수 f 에 대하여 구간 $[a, b]$ 의 분할방법과 점 c_k 들의 선택 방법에 따라 달라짐을 알 수 있다.

함수 f 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의되었다고 하자. 리만합에서 $\|P\|$ 가 0에 가까워갈 때, 극한값

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

가 존재하면, 이 극한값을 함수 f 의 $x=a$ 에서 $x=b$ 까지의 정적분(definite integral) 또는 리만적분이라 하며

$$\int_a^b f(x) dx$$

로 표시하고, 이 때 f 는 $[a, b]$ 에서 적분가능(integrable)하다고 말한다. 또한, 정적분

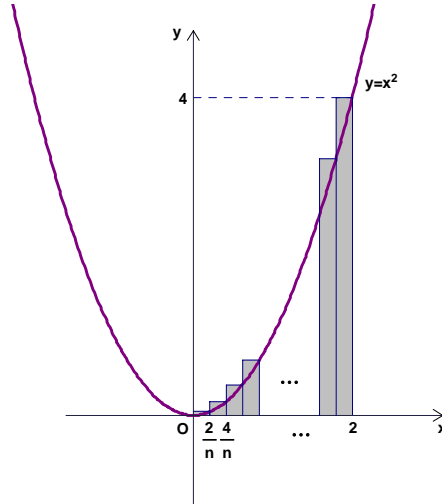
$\int_a^b f(x) dx$ 에서 $f(x)$ 를 피적분함수, a 를 정적분의 아래끝, b 를 정적분의 위끝이라 한다.

주어진 함수 f 가 $[a, b]$ 에서 적분가능하면, $[a, b]$ 의 분할 P 의 노름 $\|P\|$ 가 한없이 0에 가까워지도록 한 분할 P 의 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 에서 점 c_k 를 어떻게 택하든 f 의 P 에 대한 리만합은 항상 일정한 값에 수렴함이 알려져 있다.



예시 답안

[풀어 보기 1]



정적분의 정의에서 $a=0$, $b=2$ 이므로 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$ 이다.

또, $f(x_k) = x_k^2 = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{4k^2}{n^2}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \int_0^2 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

[풀어 보기 2]

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\Delta x = \frac{1-0}{n}$, $x_k = 0 + k \cdot \frac{1}{n}$ 이라 하면, 정적분에 정의에 의하여

$$(\text{준식}) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

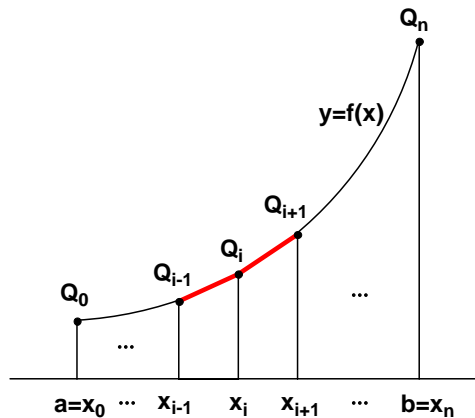


[풀어 보기 3]

$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 이므로 곡선의 길이 l 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{9} \right]_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

[문제 1-1]



구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 그 분점을 각각 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ 라 하고, 그 점에 대응되는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점을 각각 $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 이라 하자.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\Delta x_i = \frac{b-a}{n})$$

$$Q_i = (x_i, f(x_i)) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

라 하면

$$\overline{Q_{i-1}Q_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

이다. 그런데 여기서 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(z_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

을 만족하는 $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 가 존재한다. 따라서 위 선분의 길이는

$$\overline{Q_{i-1}Q_i} = \sqrt{1 + \{f'(z_i)\}^2} \Delta x_i$$

가 되고 각 구간에서 구한 이러한 선분의 총합은

$$\sum_{i=1}^n \overline{Q_{i-1}Q_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \{f'(z_i)\}^2} \Delta x_i.$$

이 된다.



여기서 $f'(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 $n \rightarrow \infty$ 이면 $f'(z_i) \rightarrow f'(x_i)$ 이다.

따라서 구하는 곡선의 길이는 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \overline{Q_{i-1}Q_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \{f'(x_i)\}^2} \Delta x_i$

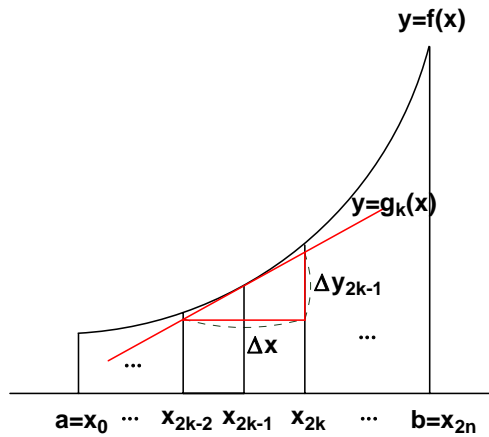
($\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x_i$)이다.

정적분의 정의에 의하여 이는

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

와 같다.

[문제 1-2]



폐구간 $[a, b]$ 를 $2n$ 등분하여 각 소구간을 위 그림과 같이 $\Delta x = x_{2k} - x_{2k-2}$ 라 하고, 이 때 점 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$ 에서의 접선 $y = g_k(x)$ 에서의 Δx 에 대한 y 증분을 Δy_{2k-1} 이라 하면 이 접선의 기울기가 $f'(x_{2k-1})$ 이므로 $\Delta y_{2k-1} = f'(x_{2k-1})\Delta x$ 이다. 따라서 점 $(x_{2k-2}, g_k(x_{2k-2}))$ 와 점 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$ 사이의 거리 l_k 는

$$l_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + \{f'(x_{2k-1})\Delta x\}^2} = \sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \Delta x \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \Delta x \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n})$$

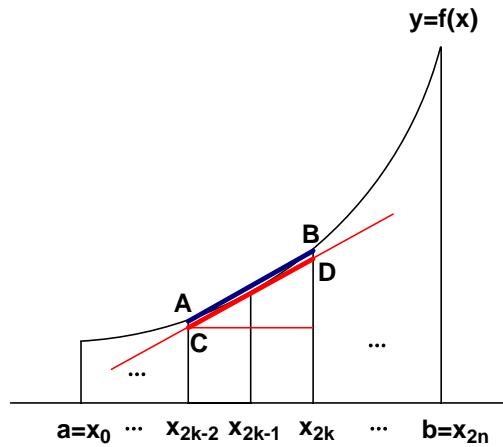
이고, 정적분의 정의에 의하여 이는

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

와 같다.



[문제 1-3]



[문제 1-1]은 위 그림의 선분AB의 길이 L_k 의 합의 극한으로 곡선의 길이를 구한 것이고, [문제 1-2]는 선분CD의 길이 l_k 의 합의 극한으로 곡선의 길이를 구한 것이다. 앞에서 유도한 바와 같이 이는 결국 같은 값을 갖게 된다. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 에서 연속이고 미분가능이므로 평균값정리에 의해서

$$\frac{f(x_{2k}) - f(x_{2k-2})}{x_{2k} - x_{2k-2}} = f'(x_i)$$

를 만족하는 $x_i \in (x_{2k-2}, x_{2k})$ 가 존재한다. 이 x_i 의 값이 항상 x_{2k-1} 의 값과 일치하는 것은 아니나, $n \rightarrow \infty$ 이면 $\Delta x = x_{2k} - x_{2k-2} \rightarrow 0$ 이므로 $L_k \approx l_k$ 가 되고 [문제 1-1]과 [문제 1-2]는 같은 결과가 나오게 되는 것이다.

이와 같이 곡선의 길이는 정적분의 정의를 이용하여 유한 선분의 길이의 합의 극한으로 계산할 수 있는데, 이 때 사용하는 유한선분의 길이를 여러 가지 다른 방식으로 정의하여도 위와 같은 방법으로 계산하여 동일한 값의 곡선의 길이를 얻을 수 있다.

예를 들어 다음의 각 경우가 있을 수 있다.

첫째, 폐구간 $[a, b]$ 를 $2m$ ($r \geq 2$, r 은 자연수)개의 균등한 소구간으로 나누어 [문제 1-2]와 같이 접선의 길이를 이용하는 방법.

둘째, 폐구간 $[a, b]$ 를 m ($r \geq 2$, r 은 자연수)개의 균등한 소구간으로 나누어 [문제 1-1]과 같이 선분의 길이를 이용하는 방법.

셋째, 폐구간 $[a, b]$ 를 $2n$ 개의 균등한 소구간으로 나누고 각 구간에서의 접선의 길이를 이용하는 방법.

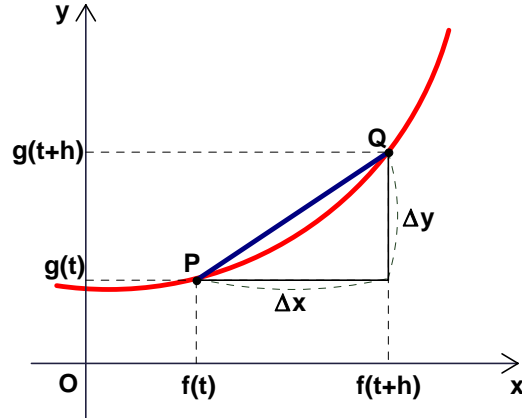
넷째, 벡터를 이용하는 방법.

벡터를 이용하는 방법을 자세히 설명하면 다음과 같다.

평면에서 움직이는 물체의 위치는 시간의 함수로 표현이 가능하고, 2차원 평면에서 위치는 $(x, y) = (f(t), g(t))$ 같이 표현이 가능하다. 이 때, 시간에 대한 위치(거리)의 변화율이 물체의 속도이고, 시간에 관한 속도의 변화율이 가속도가 된다.



평면에서 움직이는 점 P 의 좌표가 시간 t 에 관한 매개변수 $(x, y) = (f(t), g(t))$ 로 나타내어진다고 하고, 길이 h 인 시간 구간에서 점 P 가 점 Q 로 움직였다고 하자.



이 때, 점 P 에서 점 Q 로의 위치 변화는

$$\Delta x = f(t+h) - f(t)$$

$$\Delta y = g(t+h) - g(t)$$

여기서 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$ 와 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = g'(t)$

는 각각 점 P 의 시간 t 에서의 x, y 축 방향의 순간변화율이고 이것은 시간에 대한 거리의 변화율이므로 점 P 의 x, y 축 방향의 속도를 나타내는 성분이다. 따라서 점 P 의 속도벡터를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (f'(t), g'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

가 된다.

이 때, 속도를 적분함으로서 물체의 일정 시간 후의 위치를 구할 수 있다. 특히

속도 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 에 대해 속력은 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$ 이므로 점 P 가 시간 $t = a$ 에

서 $t = b$ 까지 실제로 움직인 총거리는 $S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$ 로 구할 수 있다. 이

실제로 움직인 거리가 곡선의 길이가 되고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\therefore S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

이 역시 앞에서 유도했던 것과 같은 결과를 나타낸다.



9

연세대학교 모의 문항 (2)

[문제 1] 다음 제시문은 박테리아 개체수 변화에 관한 것이다. 제시문을 읽고 아래 물음에 답하시오. (40점)

제시문

(가) 병을 낫기 위해 병원에 입원했다가 각종 항생제에 내성을 보이는 박테리아에 감염된 경우가 잇따르고 있어 병원 감염에 관한 불안이 확산되고 있다. 어떤 보고서에 따르면 항생제 내성 박테리아에 의한 병원 감염은 환자와 환자 간의 신체 접촉에 의해 직접적으로 전파되기 보다는, 병원 내에서 의료진의 손이나 병원 환경을 통해서 전파된다고 한다. 그리고 병원 내 항생제 내성 박테리아 감염율은 병원 내 총 박테리아의 양과 밀접히 관련되어 있다고 한다. 병원 환경에서 박테리아의 총 양의 변화를 정량적으로 분석하기 위하여 여러 수학 모델이 제시되었다.

(나) 이 제시문에서는 감염된 환자 개인별로 박테리아의 개체수의 변화를 단위 시간별로 추적하는 수학 모델을 소개하고자 한다. 박테리아가 인체에 침투했을 때 박테리아의 양을 a_0 로 표시하고, 침투 후 n 시간이 경과한 후 박테리아의 양을 a_n 으로 표시하자. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 에 관하여 다음 조건이 성립한다고 가정하자.

$$\textcircled{1} \quad a_{n+1} = a_n + \beta a_n (K - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

여기서 K 는 환자의 몸 안에서 생존할 수 있는 개체수의 정원을 의미하는 양의 상수이고, β 는 박테리아의 증가율과 관련이 있는 양의 상수이다.(※ 단, a_n 은 개체수를 표현함으로 자연수이어야 하나 계산의 편의상 실수라고 하자.) 이 모델은 비현실적인 가정에 근거하고 있으나 박테리아 개체수 변화의 기본 모델로서 이용되어 많은 성과를 얻었다.

(다) 수리모델 $\textcircled{1}$ 에서 $0 < \beta < \frac{1}{2K}$ 일 때 개체수의 변화를 살펴보자. 초기 개체수 a_0 가 $K < a_0 < 2K$ 이면 개체수가 K 가 될 때까지 감소하고, 초기 개체수 a_0 가 $0 < a_0 < K$ 이면 개체수가 K 가 될 때까지 증가한다.

[문제 1-1] 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다면 그 극한값은 무엇이 되어야 하는지를 논리적으로 설명하시오. (10점)

[문제 1-2] 제시문 (다)에서 초기 개체수가 $K < a_0 < 2K$ 이면 a_1 은 부등식

$K < a_1 < a_0$ 를 만족하고, $0 < a_0 < K$ 이면 부등식 $a_0 < a_1 < K$ 를 만족함을 논리적으로 설명하시오. (15점)

[문제 1-3] 제시문 (다)가 성립함을 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 이용하여 논리적으로 설명하시오. (15점)



제시문 분석

- ① 병원 환경에서 박테리아의 총양의 변화를 정량적으로 분석하기 위하여 여러 가지 수학 모델을 사용한다.
- ② n 시간이 경과한 후 박테리아의 양을 a_n 이라 할 때, $n+1$ 시간 경과한 후 박테리아의 양은

$$a_{n+1} = a_n + \beta a_n (K - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- ③ 초기 개체수 a_0 의 범위에 따라 개체수가 K 가 될 때까지 증가하거나 감소한다.



논제 분석

- ① 주어진 수열의 점화식에서 극한값을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ (수렴)라 둘 수 있다.

- ② 초기 개체수의 범위로 수열의 증가, 감소를 설명할 수 있는가?

점화식 $a_{n+1} = a_n + \beta a_n (K - a_n)$ 를 함수 $y = -\beta x^2 + (K\beta + 1)x$ 로 바꾸어 보면 수열의 증감상태를 가시적으로 볼 수 있다.



배경지식 쌓기

➔ 수열의 귀납적 정의와 점화식

수열에서 첫째항과 임의의 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다. 특히 이웃하는 항들 사이의 관계식을 점화식(recurrence relation)이라고 한다. 수열을 귀납적 정의로 표현하면 좀더 간결하고 엄밀하게 수열의 구조를 표현할 수 있다.



풀어 보기

1. $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$)의 꼴의 점화식을 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ 꼴로 변형하여 일반항을 구하는 방법을 서술하고, 이러한 방법이 의미하는 바를 함수의 그래프의 평행이동과 연관지어 설명하시오.

2. $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$)의 꼴에서 $|p| < 1$ 인 경우는 수열의 각 항들의 절댓값이 점차 줄어들고, $|p| > 1$ 인 경우는 수열의 각 항들의 절댓값들이 점차 커진다. $y = px + q, y = x$ 의 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값과 연관지어 위의 결과에 대해 설명하시오.

3. 한 사람이 계단을 매 걸음마다 한 계단 또는 두 계단씩 올라간다고 한다. n 개의 계단을 올라가는 모든 가능한 방법의 수를 a_n 이라고 할 때, 수열

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots \text{의 수렴, 발산을 설명하시오.}$$

[2006 고려대 모의]



입기 자료

➔ 수열의 극한의 의미

수열의 극한에 대한 의미를 다음 기본명제를 가지고 설명해 보자.

기본 명제 : “수열 $\frac{1}{n}$ 의 극한은 0이다.” (기호로는 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$)

여기서 수열 $\frac{1}{n}$ 이란 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ 과 같이 무한히 계속되는 수의 열을 말한다.

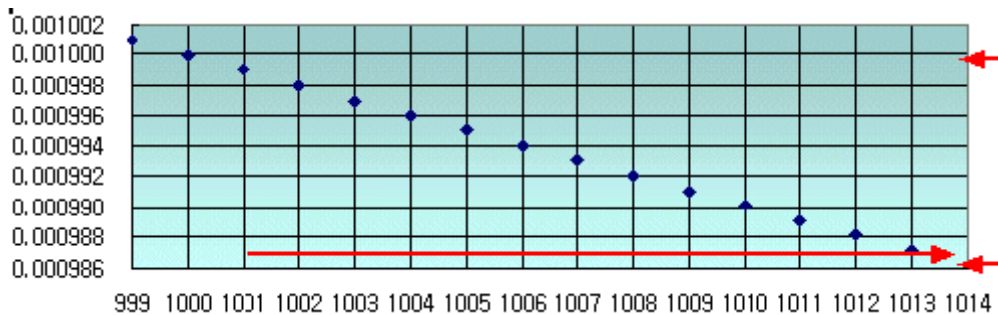
[의미]

- ① n 이 ∞ 로 증가할 때 수열 $\frac{1}{n}$ 의 값은 $L=0$ 에 얼마든지 가깝게 다가간다.
- ② 여기서 '가깝다'는 것은 $\frac{1}{n}$ 과 그 극한 $L=0$ 간의 거리가 결국(n 이 충분히 커지면) '원하는 만큼 얼마든지 적게' 될 수 있음을 의미한다.
- ③ '원하는 만큼 얼마든지 적게'란 '가까움'의 기준을 얼마든지 까다롭게(즉, 얼마든지 가깝게) 정할 수 있음을 의미한다.

예컨대, 가까움의 기준을 우선 $\varepsilon=0.001$ 로 잡아보자. 그러면, n 이 충분히 커지면(보다 구체적으로, n 이 1000보다 더 커지면) 그 이후 수열의 모든 값은

$$\frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \frac{1}{1003}, \dots$$

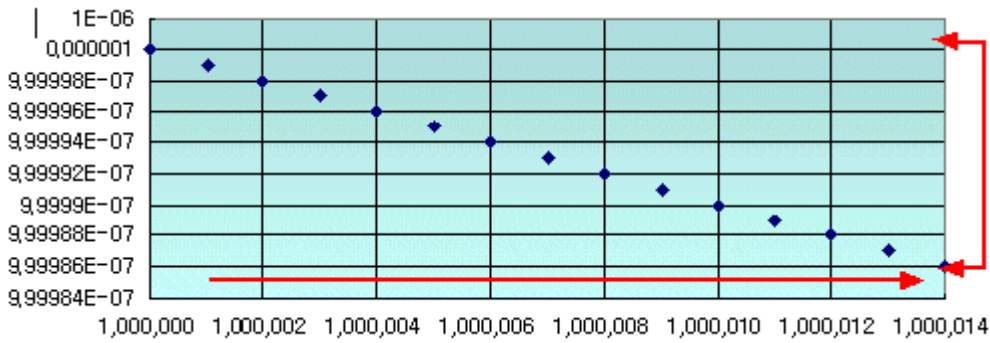
등이 되며, 이들과 극한 $L=0$ 간의 거리는 $\varepsilon=0.001$ 보다 작아진다. 이 점은 아래 그림에서도 바로 확인된다.



다음으로, 가까움의 기준을 더 엄격하게 $\varepsilon=0.000001$ 로 잡아보자. 그러면, n 이 충분히 커지면(보다 구체적으로, n 이 1,000,000보다 더 커지면) 그 이후 수열의 모든 값은

$$\frac{1}{1000001}, \frac{1}{1000002}, \frac{1}{1000003}, \dots$$

등이 되며, 이들과 극한 $L=0$ 간의 거리는 $\varepsilon=0.000001$ 보다 작아진다.



④ 수열의 극한은, 그 수열의 처음 몇 항들의 값에 구애받지 않으며 n 이 충분히 커진 후의 값들에 의해 좌우된다. 따라서, 수열 $\left\{ \frac{1000}{n} \right\}$, 즉

$$\dots 1000, \frac{1000}{2}, \frac{1000}{3} \dots$$

의 극한도 역시 0이다. 그리고 수열 $\left\{ \frac{1000000000000}{n} \right\}$ 의 극한 역시 0이다.

➔ 극한과 비극한

위 논의를 보면, 아주 작은 수, 예컨대, $a=0.00000000000000000001$ 은 어떻게 보면 0과 크게 다르지 않으며, 따라서 수열 $\frac{1}{n}$ 의 극한이 될 수 있을 것 같이 생각되기도 한다. 즉, n 이 무한히 커질 때 수열 $\frac{1}{n}$ 이 결국 이 작은 수 $a=0.00000000000000000001$ 에 가까이 간다고 말할 수 없을까? 그 답은 “그렇게 말할 수 없다”이다.

이 점을 증명하기 전에 이보다 좀 큰 수 $a=0.001$ 에 대해 생각해 보자. 우리는

$$“a=0.001은 수열 \frac{1}{n}의 극한이 아니다.”$$

라는 점을 아래와 같이 보일 수 있다.

[설명]

어떤 작은 값 ε 을 잡아보면, 어떤 n 값 이후의 수열의 값들이 모두 0.001에서 ε 보다 더 떨어져 있게 됨을 의미한다.

예컨대, 가까움의 기준으로서 우선 $\varepsilon=0.0005$ 를 잡아 보자. 이 경우, n 이 2000 ($=\frac{1}{\varepsilon}$)보다 커지면(즉, $n=2001$ 부터) 수열의 값 $\frac{1}{n}$ 과 $a=0.001$ 간의 거리는 바로 이 기준 $\varepsilon=0.0005$ 보다 더 커진다. 왜냐하면

$$n > 2000 \rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{2000} \rightarrow -\frac{1}{n} > -\frac{1}{2000} = -0.0005 \text{ 이므로}$$

$$a - \frac{1}{n} > 0.001 - \frac{1}{2000} = 0.001 - 0.0005 = 0.0005 = \varepsilon \text{ 이기 때문이다.}$$



예시 답안

[풀어 보기 1]

$a_{n+1} = pa_n + q$ 를 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 바꾸면

$a_{n+1} = pa_n + (1-p)\alpha$ 이므로 $(1-p)\alpha = q$ 에서 $\alpha = \frac{q}{1-p}$ 가 구해진다. ... ①

한편, 수열 $\{a_n - \alpha\}$ 는 초항이 $a_1 - \alpha$ 이고 공비가 p 인 등비수열이므로,

$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1}$, 즉, $a_n = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} + \alpha$ 가 얻어진다.

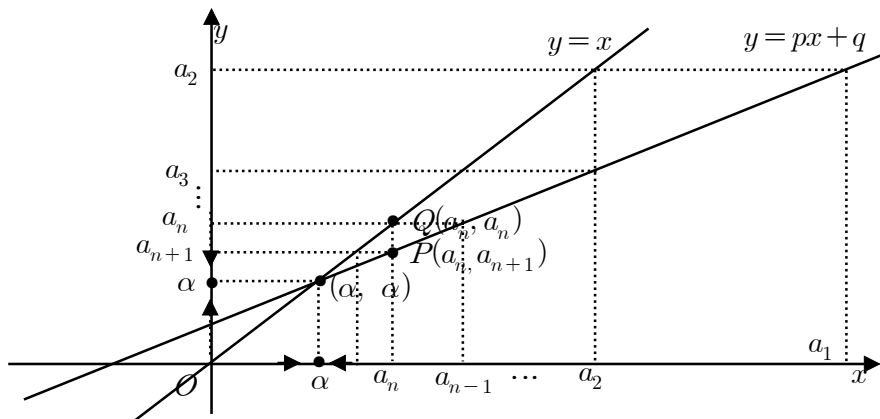
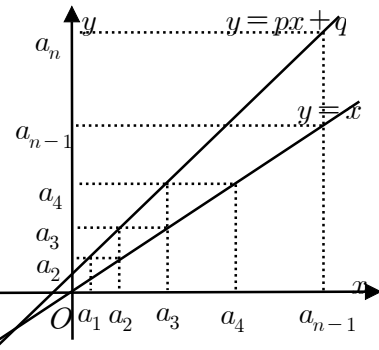
①에서 구한 α 의 값을 대입하면, $a_n = (a_1 - \frac{q}{1-p}) \cdot p^{n-1} + \frac{q}{1-p}$ 이 된다.

이것은 수열 $\{a_n\}$ 을 자연수를 정의역으로 하는 함수의 그래프로 표현한 후 y 축 방향으로 α 만큼 평행이동하였더니 새로운 수열 $\{a_n - \alpha\}$ 는 등비수열이 됨을 알 수 있고, 등비수열 일반항을 통해 $a_n - \alpha$ 를 구한 후 다시 y 축 방향으로 $-\alpha$ 만큼 평행이동하면 a_n 을 구할 수 있다.

[풀어 보기 2]

$|p| > 1$ 인 경우 $x = a_1$ 일 때의 $y = px + q$ 의 함수값이 a_2 가 되고, 이 값을 $y = x$ 의 그래프를 이용하여 x 축으로 옮겨올 수 있고, $x = a_2$ 일 때의 $y = px + q$ 의 함수값이 a_3 가 되고, 이와 같은 과정을 반복하면 a_n 은 한없이 커진다. 따라서 a_n 의 극한은 존재하지 않는다.

$|p| < 1$ 인 경우 $x = a_1$ 일 때의 $y = px + q$ 의 함수값이 a_2 가 되고, 이 값을 $y = x$ 의 그래프를 이용하여 x 축으로 옮겨올 수 있고, $x = a_2$ 일 때의 $y = px + q$ 의 함수값이 a_3 가 되고, 이와 같은 과정을 반복하면 a_n 은 두 직선의 교점으로 한없이 접근한다. 따라서 $x = px + q$ 의 근이 a_n 의 극한값이 된다.





[풀어 보기 3]

$(n+1)$ 개의 계단을 한 계단 또는 2 계단씩 올라가는 방법의 총 수는 처음에 한 계단 올라간 뒤 나머지 n 개의 계단을 올라가는 방법의 수와, 처음에 두 계단을 올라간 뒤 나머지 $(n-1)$ 개의 계단을 올라가는 방법의 수의 합으로 나타낼 수 있다. 즉, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 이다. 여기서 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 의 양변을 a_n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ 이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \text{ 라고 하면 } \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad \therefore \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \alpha > 0) \quad \text{따라서 수열 } \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \dots$$

은 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 로 수렴한다.

[문제 1-1]

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 하였으므로 그 극한값을 α 라 하자. 그러면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

이고, ①의 양 변에 극한을 취하면 $\alpha = \alpha + \beta\alpha(K - \alpha)$ 이다.

이를 정리하면 $\alpha\beta(\alpha - K) = 0$ 이므로 $\alpha = 0$ 또는 $\alpha = K$ 이다.

이 때, $a_n \geq 0$ 이어야 하므로 $0 \leq a_0 \leq K + \frac{1}{\beta}$ 이어야 한다. 여기서 $a_0 = 0$ 또는 $a_0 = K + \frac{1}{\beta}$ 일 때만 $\alpha = 0$ 이고, $0 < a_0 < K + \frac{1}{\beta}$ 일 때는 $\alpha = K$ 가 된다.

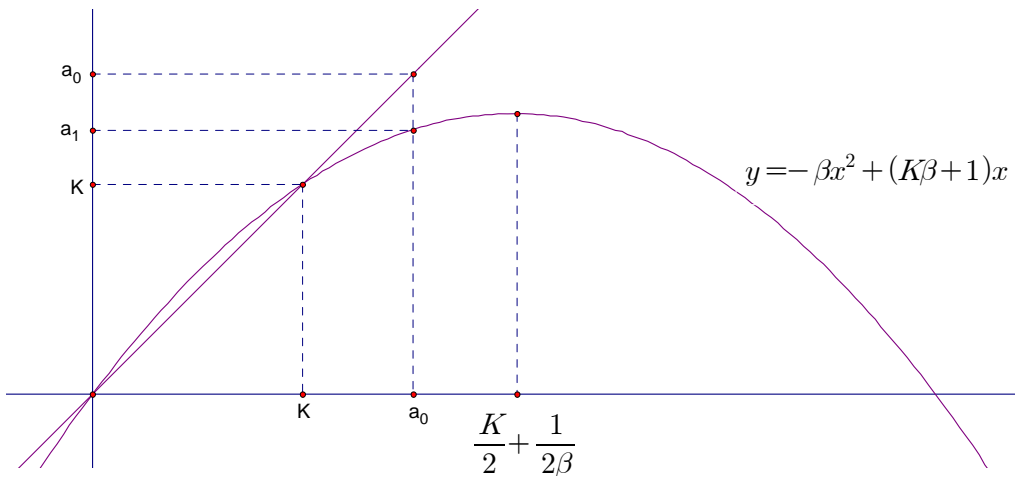
[문제 1-2]

함수 $y = -\beta x^2 + (K\beta + 1)x$ 와 $y = x$ 를 생각하자. 여기서 $x = a_0$ 일 때, $y = a_1$ 이 된다.

이 때, 교점의 좌표는 (K, K) 이고, 꼭짓점의 x 좌표는 $\frac{K}{2} + \frac{1}{2\beta}$ 이다. 여기서

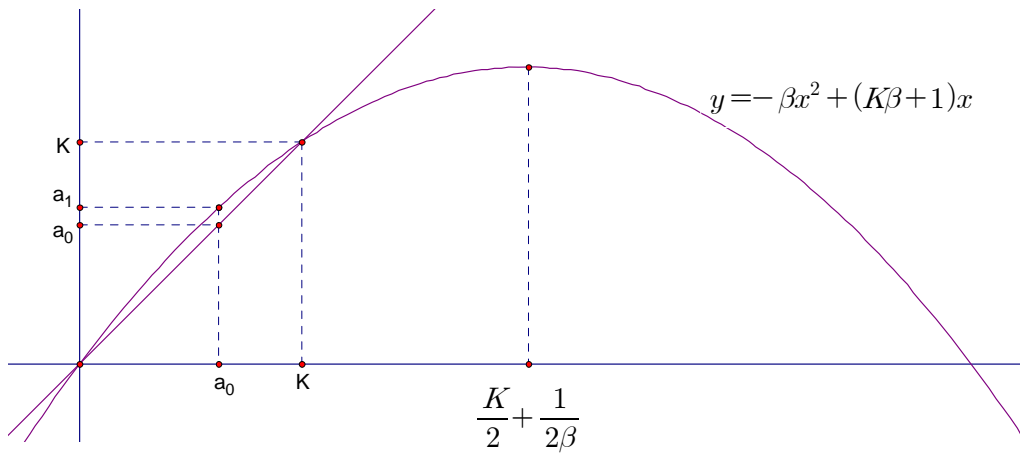
$0 < \beta < \frac{1}{2K}$ 이므로 $\frac{1}{\beta} > 2K$ 이고, $\frac{K}{2} + \frac{1}{2\beta} > \frac{3}{2}K > K$ 이다. 즉, 포물선의 꼭짓점이 두 함수의 교점보다 우측에 있게 된다. ([그림 1] 참조)

먼저 초기 개체수가 $K < a_0 < 2K$ 이면 a_0 는 K 보다 우측에 있게 되므로 [그림 1]에 의해서 부등식 $K < a_1 < a_0$ 를 만족한다.



[그림 1]

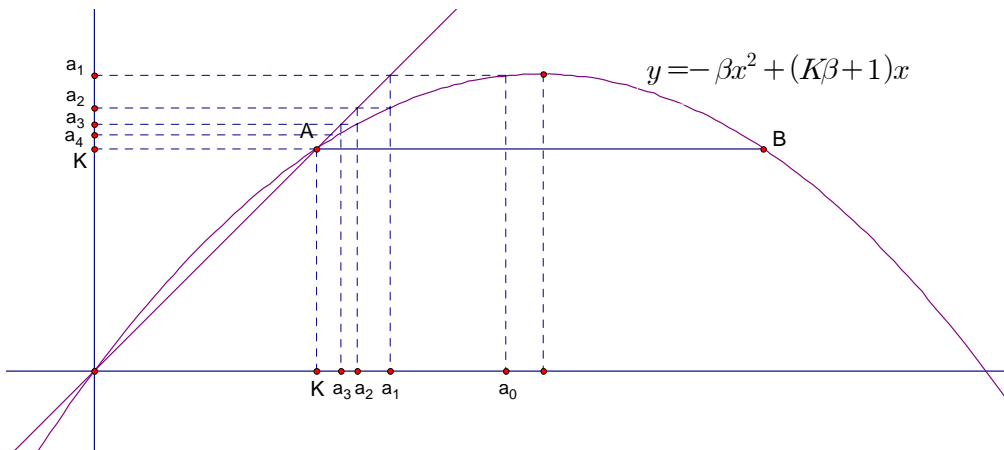
또, $0 < a_0 < K$ 이면 a_0 는 0과 K 사이에 존재하므로 [그림 2]에 의해 $a_0 < a_1 < K$ 이다. ([그림 2] 참조)



[그림 2]

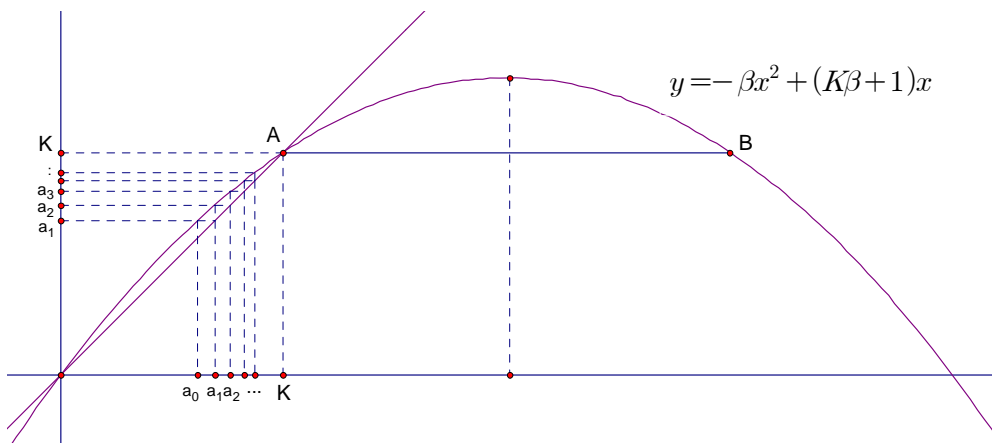
[문제 1-3]

함수 $y = -\beta x^2 + (K\beta + 1)x$ 와 $y = x$ 의 교점을 A, 점 A의 포물선의 축에의 대칭점을 B라 하자. 포물선의 꼭짓점의 x 좌표가 $\frac{K}{2} + \frac{1}{2\beta}$ 이고 $\frac{K}{2} + \frac{1}{2\beta} > \frac{3}{2}K$ 이므로 점 B의 x 좌표는 $2K$ 보다 크다. 따라서 초기 개체수가 $K < a_0 < 2K$ 이면 a_0 는 점 A의 x 절편과 점 B의 x 절편 사이에 있게 되므로 [그림 3]과 같이 개체수 a_n 의 값이 K 가 될 때까지 감소한다.



[그림 3]

또 $0 < a_0 < K$ 이면 a_0 는 원점과 점 A의 x 절편 사이에 존재하므로 [그림 4]에서와 같이 개체수가 K 가 될 때까지 증가한다.



[그림 4]



연세대학교 수시 2

제시문

xy 평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원 C 가 있다. 고정점 $A(-1,0)$ 부터 시계 방향으로 원 C 위의 한 점 P 까지의 호의 길이를 $l(P)$ 라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1 과 P_2 에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$ 를 점 P_1 부터 원 C 를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자. 그러면 이 연산은 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

[문제 1-1] 점 P 가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 \oplus 에 대하여 P 의 항등원과 역원을 나타내는 점은 어떠한 점인지 각각 설명하시오. (5점)

[문제 1-2] 원 C 위의 점으로 이루어진 수열 $\{P_n\}$ 이 $P_0, P_1, P_n = P_{n-1} \oplus P_{n-2}$ (단, $n=2,3,4,\dots$)로 정의된다.

(a) $P_0 = A$ 이고, P_1 은 $l(P_1) = \frac{\pi}{3}$ 인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. (5점)

(b) k 가 임의의 자연수이고, $P_0 = A$ 이며, P_1 은 $l(P_1) = \frac{2\pi}{k}$ 인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 방법에 대하여 논하시오. (15점)

[문제 1-3] 원 C 위의 서로 다른 네 점 P_1, P_2, Q_1, Q_2 가 관계식 $P_1 \oplus P_2 = Q_1 \oplus Q_2$ 를 만족한다면, 두 점 P_1 과 P_2 를 지나는 직선과 두 점 Q_1 과 Q_2 를 지나는 직선이 평행임을 논리적으로 설명하시오. (15점)



제시문 분석

① 단위원에서 각의 크기와 호의 길이

단위원에서 동경 OP가 시초선 OA와 시계 방향으로 이루는 각을 θ 즉, $\angle AOP = \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 라고 하면 $l(P) = \theta$ 이다.

② 회전변환에서 교환법칙과 결합법칙의 성립

연산 $P_1 \oplus P_2$ 에 대한 $\angle AOP_n = \theta_n$ (n 은 자연수)라 두면

※ 교환법칙이 성립한다.

$$P_1 \oplus P_2 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = P_2 \oplus P_1$$

※ 결합 법칙이 성립한다.

$$(P_1 \oplus P_2) \oplus P_3 = (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 = \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3) = P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3)$$



논제 분석

① 회전변환에서 항등원과 역원을 구할 수 있는가?

단위원에서 회전으로 이루어지는 변환에서 항등원은 회전각이 $0(\text{rad})$ 이고 역원은 $-\theta$ 가 된다.

② 주어진 연산에서 피보나치 수열을 발견하고 피보나치수의 규칙성을 발견할 수 있는가?

제시문에서 주어진 연산은 피보나치 수열의 배수가 됨을 확인할 수 있고, 피보나치수에서 약수 배수 관계를 파악하여 논제를 해결한다.

③ $P_1 \oplus P_2 = Q_1 \oplus Q_2$ 의 의미를 기하학적 의미를 이해하는가?

회전변환의 결과가 같다는 의미는 회전각이 같다는 의미이고 이것의 기하학적 의미를 원주각을 사용하여 설명할 수 있다.

**배경지식 쌓기****1. 항등원과 역원**

집합 A 의 임의의 두 원소 a, b 와 연산 \circ 에 대하여 $a \circ b \in A$ 일 때, 집합 A 는 연산 \circ 에 대하여 닫혀있다고 한다.

집합 A 가 연산 \circ 에 대하여 닫혀있을 때, 집합 A 의 모든 원소 a 에 대하여

$$a \circ e = e \circ a = a$$

를 만족하는 집합 A 의 원소 e 가 존재하면, e 를 연산 \circ 에 대한 항등원이라고 한다.

또 집합 A 의 한 원소 a 에 대하여

$$a \circ x = x \circ a = e$$

를 만족하는 A 의 원소 x 가 존재하면, x 를 연산 \circ 에 대한 a 의 역원이라 한다.

2. 피보나치(Fibonacci) 수열의 정수적 특징**- 피보나치 수열의 정의**

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 의 형태의 수열.

즉, 첫 번째 항의 값은 0이고 두 번째 항의 값은 1일 때 이후의 항들은 이전의 두 항을 더한 값으로 만들어지는 수열

즉, $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$ 을 피보나치 수열이라 한다.

- 피보나치 수열의 정수적 특징

① 자연수 n 이 m 으로 나누어 떨어지면, 피보나치수 f_n 도 f_m 으로 나누어 떨어진다.

② 임의의 자연수 m 에 대하여, 첫 번째 m^2 개의 피보나치수 가운데 m 의 배수를 적어도 하나 찾을 수 있다.

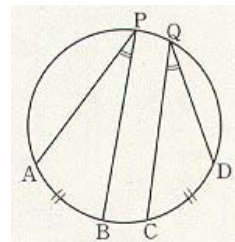
3. 원주각과 호

한 원 또는 합동인 두 원에서

- 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.
- 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow \angle APB = \angle CQD$$

- 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 비례한다.





풀어 보기

1. 모든 실수에서 연속인 함수 f, g 에 대하여 함수 $f * g$ 를 얻는 연산 $*$ 를 다음과 같이 정의한다. $(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$. 이때, 연산 $*$ 에 대한 항등원이 있는가를 조사하여라. [2002 서울대]

2. 위에서 설명한 피보나치 수열

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

에서 다음 표를 완성하여 보아라.

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	1	1	2	3	5					
f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}

- (1) 피보나치 수가 2의 배수인 n 값을 구하면?
 피보나치 수가 3의 배수인 n 값을 구하면?
 피보나치 수가 5의 배수인 n 값을 구하면?
 피보나치 수가 8의 배수인 n 값을 구하면?

- (2) 위에서 발견한 규칙을 설명하여 보아라.

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시킨다. 이 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} \text{의 값은?}$$



읽기 자료

어떤 수열의 약수, 배수 관계를 흔히 정수적 특성이라고 한다. 피보나치 수열에는 매우 특이한 정수적 특성이 있다. 예를 들어 이웃하는 두 항은 서로소인 관계라든가, 첨수(index)가 배수 관계이면 피보나치수에도 배수 관계가 존재한다. 그런데 정수적 성질을 이해하려면, 유클리디언 알고리즘(Eucidean Algorithm), 즉, 최소공배수를 구하는 가장 효율적인 방법을 먼저 이해해야 한다. 따라서 최소공배수를 효과적으로 구하는 유클리드 호제법(Eucidean Algorithm)을 먼저 이해하고 이것을 활용하여 피보나치 수열의 정수적 특성을 파악할 필요가 있다.

① 유클리디언 알고리즘

두 정수 $a, b(a > b)$ 를 생각해 보자.

$a = bq_0 + r_1, b = r_1q_1 + r_2, r_1 = r_2q_2 + r_3, \dots, r_{n-1} = r_nq_n$ 일 때, r_n 이 a, b 의 최대공약수가 된다.

② 자연수 n 이 m 으로 나누어 떨어지면, 피보나치 수열 f_n 도 f_m 으로 나누어 떨어진다.

(증명) 만약 n 이 m 으로 나누어 떨어지면, $n = mm_1$ 으로 나타낼 수 있다. 이제 m 에 대하여 귀납법으로 증명할 것이다. $m_1 = 1$ 인 경우, $n = m$ 이므로 f_n 은 f_m 으로 나누어 떨어진다.

이제 f_{mm_1} 이 f_m 으로 나누어 떨어진다고 가정하고, $f_{m(m_1+1)}$ 에 대하여 생각하자.

$f_{m(m_1+1)} = f_{mm_1+m}$ 이고 피보나치 수열의 특징에 의하여

$f_{m(m_1+1)} = f_{mm_1+m} = f_{mm_1-1}f_m + f_{mm_1}f_{m+1}$ 이 성립한다.1) 위의 식의 우변의 첫 번째 항은 분명히 f_m 으로 나누어 떨어지고, 두 번째 항은 수학적 귀납법의 가정에 의하여 나누어 떨어진다. 따라서 그들의 합 $f_{m(m_1+1)}$ 은 분명히 f_m 으로 나누어 떨어진다.

이것으로 증명은 완성된다.

이상의 사실에서 우리는 다음과 같은 구체적인 사례를 들 수 있다. $f_3 = 2$ 이므로 피보나치 수열의 첨수(index)가 3의 배수인 수열은 모두 짝수임을 알 수 있다. 즉,

1) ※ $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} \dots$ (1)을 증명하여 보자.

(증명) m 에 대한 귀납법으로 증명할 것이다.

$m = 1$ 이면 $f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} + f_n$ 으로 성립한다.

$m = 2$ 이면 $f_{n+2} = f_{n-1}f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = f_{n-1} + f_n + f_n = f_{n+1} + f_n$ 이다.

이제 (1)식이 $m = k, m = k+1$ 일 때 성립한다고 가정하고 $m = k+2$ 일 때 성립함을 보이면 된다. 따라서 $f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1}$ 와 $f_{n+k+1} = f_{n-1}f_{k+1} + f_n f_{k+2}$ 가 성립한다. 이 두 식을 변변 더하면 $f_{n+k+2} = f_{n-1}f_{k+2} + f_n f_{k+3}$ 을 얻는데 이것은 $m = k+2$ 일 때 성립함을 의미하는 것이다.



$f_6, f_9, f_{12} \dots$ 등은 짝수이다. 피보나치수가 3의 배수일 필요충분조건은 그 첨수가 4의 배수라는 것이다. 피보나치수가 5의 배수일 필요충분조건은 그 첨수가 5의 배수라는 것이고, 피보나치 수가 8의 배수일 필요충분조건은 그 첨수가 6으로 배수라는 것이다.

③ 임의의 자연수 n, m 에 대하여 $\gcd(f_m, f_n) = f_{\gcd(m, n)}$ 이 성립한다.

(증명) 일반성을 잃지 않고 $m > n$ 이라고 가정하자. 이제 m, n 에 대하여 유클리디언 알고리즘을 적용하면 $m = nq_0 + r_1, n = r_1q_1 + r_2, r_1 = r_2q_2 + r_3, \dots, r_{t-1} = r_tq_n$ 이 될 것이다. 여기서 $r_t < r_{t-1} < \dots < r_2 < r_1$ 이다. 이 때 r_t 는 m, n 의 최대공약수이다.

위에서 알 수 있듯이 $m = nq_0 + r_1$ 이므로

$$\gcd(f_m, f_n) = \gcd(f_{nq_0+r_1}, f_n) \text{이고 이것은 (1)식에 의하여 다음과 같이 변형된다.}$$

$$\gcd(f_{nq_0+r_1}, f_n) = \gcd(f_{nq_0-1}f_{r_1} + f_{nq_0}f_{r_1}, f_n) \text{이고}$$

즉, b 가 c 의 약수이면 $\gcd(a, b) = \gcd(a+c, b)$ 가 성립한다. 또 ②에 의하여

$$\gcd(f_m, f_n) = \gcd(f_{nq_0-1}f_{r_1}, f_n) \text{이고 } b \text{와 } c \text{가 서로소이면 } \gcd(a, b) = \gcd(ac, b) \text{이므로}$$

$$\gcd(f_m, f_n) = \gcd(f_{r_1}, f_n) \text{가 될 수 있다. 이와 같은 방법으로}$$

$$\gcd(f_{r_1}, f_n) = \gcd(f_{r_2}, f_{r_1}) \dots, \gcd(f_{r_{t-1}}, f_{r_{t-2}}) = \gcd(f_{r_t}, f_{r_{t-1}}) \text{가 성립함을 알 수 있다.}$$

위의 식을 결합하면 $\gcd(f_m, f_n) = \gcd(f_{r_t}, f_{r_{t-1}})$ 이 성립하며 r_{t-1} 이 r_t 로 나누어 떨어지므로 $f_{r_{t-1}}$ 또한 f_{r_t} 로 나누어 떨어진다. $\gcd(f_{r_t}, f_{r_{t-1}}) = f_{r_t}$ 이다. 마지막으로 $r_t = \gcd(m, n)$ 이므로 증명이 완성된다.

이상의 사실을 구체적으로 보여주는 예는 다음과 같다.

$\gcd(f_{20}, f_{15}) = \gcd(6765, 610) = f_{\gcd(15, 20)} = f_5 = 5$ 이다. 이것을 유클리디언 호제법으로 확인해 보자. $6765 = 610 \times 11 + 55, 610 = 55 \times 11 + 5, 55 = 5 \times 11$ 에서 $\gcd(6765, 610) = 5$ 임을 알 수 있다.

한편, 피보나치수를 구체적으로 나열해 보면, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ...로 이웃하는 두 수는 서로소임을 알 수 있다. 이제 이것을 구체적으로 증명해 보자.

④ 이웃하는 피보나치수들은 서로소이다.

(증명) 귀류법으로 증명한다.

먼저 이웃하는 두 수가 최대공약수 $d(d > 1)$ 를 가진다고 가정하자.

즉, $\gcd(f_{n+1}, f_n) = d$ 가 된다. 그런데 최대공약수의 성질에서

$\gcd(f_{n+1} - f_n, f_n) = d$ 이고 이것은 $\gcd(f_{n-1}, f_n) = d$ 를 의미한다. 이와 같은 방법을 계속 적용하면 $f_{n-2}, f_{n-3}, f_{n-4} \dots$ 도 최대공약수 d 를 가지게 되어 결국은 $f_1 = 1$ 에 이르게 되어 최대공약수가 1보다 크다는 사실에 모순이 된다.

따라서 위의 가정은 거짓이다. 이것은 이웃하는 피보나치수는 서로소라는 사실이 참임을 의미하는 것이다.



피보나치 수열에서 이웃하는 두 수는 서로소라는 사실은 피보나치 수열에 다양한 종류의 배수가 들어 있음을 암시하고 있다. 이제 임의의 자연수 m 에 대하여 m 의 배수가 피보나치 수열에 존재하는지 알아보자.

⑤ 임의의 자연수 m 에 대해, 첫 번째 m^2 개의 피보나치수 가운데 m 의 배수를 적어도 하나 찾을 수 있다.

(증명) 피보나치수 f_n 을 m 으로 나눈 나머지를 $\overline{f_n}$ 으로 표시하자.

이제 이런 나머지로 구성된 순서쌍의 수열을 다음과 같이 나타내 보자.

$$(\overline{f_1}, \overline{f_2}), (\overline{f_2}, \overline{f_3}), (\overline{f_3}, \overline{f_4}), \dots, (\overline{f_n}, \overline{f_{n+1}}) \dots (2)$$

위의 두 순서쌍이 같다는 것은 다음과 같은 의미이다.

$$\text{즉 } (\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}}) = (\overline{f_t}, \overline{f_{t+1}}) \text{은 } \overline{f_k} = \overline{f_t} \text{이고 } \overline{f_{k+1}} = \overline{f_{t+1}} \text{을 의미한다.}$$

이제 피보나치수를 m 으로 나누었을 때 나머지가 서로 다른 쌍의 개수는 m 개이므로 순서쌍의 개수를 m^2+1 개 잡는다면 그 안에는 반드시 같은 것들이 있게 될 것이다.

수열(2)에서 반복하는 첫 번째 수열을 $(\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}})$ 라고 하자. 이제 첫 번째 반복하는 쌍이 $(\overline{1}, \overline{1})$ 임을 보일 것이다.

첫 번째 반복하는 수열의 순서쌍은 $(\overline{1}, \overline{1})$ 이 아니라고 가정하자. 이것은 $(\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}})$ 은 $(k > 1)$ 이 처음으로 반복하는 수열의 쌍임을 의미한다.

수열(2)에서 $(\overline{f_l}, \overline{f_{l+1}})$ 은 $(l > k)$ $(\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}})$ 와 같다. $f_{l-1} = f_{l+1} - f_l$ 이고 $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$ 이고 $\overline{f_{l-1}} = \overline{f_{k-1}}$ 이고 $\overline{f_l} = \overline{f_k}$ 이므로, m 으로 f_{l-1} 과 f_{k-1} 을 나누었을 때, 나머지는 같다. 즉, $\overline{f_{l-1}} = \overline{f_{k-1}}$ 이다. 이것으로부터 $(\overline{f_{l-1}}, \overline{f_l}) = (\overline{f_{k-1}}, \overline{f_k})$ 임을 알 수 있고 $(\overline{f_{k-1}}, \overline{f_k})$ 가 수열(2)에서 $(\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}})$ 보다 앞에 위치해 있으므로 $(\overline{f_k}, \overline{f_{k+1}})$ 이 처음으로 반복되는 쌍은 아니다. 이것은 가정에 모순이다. 즉, $k > 1$ 이라는 가정이 잘못되었음을 의미한다. 따라서 $k=1$ 을 의미한다. 즉, 처음으로 반복하는 순서쌍은 $(\overline{1}, \overline{1})$ 임을 의미한다.

이제 $(\overline{1}, \overline{1})$ 이 수열(2)에서 처음으로 반복되는 순서쌍이다. t 번째 위치에 반복되는 순서쌍을 놓자. 앞에서 언급한 것에 따라 $1 < t < m^2+1$ 로 생각할 수 있다. 즉, $(\overline{f_t}, \overline{f_{t+1}}) = (\overline{1}, \overline{1})$ 라고 생각하자. 이것은 f_t 과 f_{t+1} 을 m 으로 나누었을 때 둘 모두가 나머지를 1로 가진다는 것을 의미한다. 이것으로부터 두 수의 차는 정확하게 m 으로 나누어 떨어진다. 그런데 $f_{t+1} - f_t = f_{t-1}$ 이므로 $(t-1)$ 째 피보나치수는 정확하게 m 으로 나누어 떨어진다. 즉, m 의 배수임을 의미한다.

참고로 위의 명제는 어떤 피보나치수가 m 으로 나누어 떨어지는가에 대하여 정확하게 밝히지는 않는다. 다만, m 의 배수는 처음부터 m^2 개 안에 존재한다는 것만을 알 수 있다.

— 출처 : Vorob'ev. N. N. (1961). Fibonacci Numbers. Blaisdell Pub Co. New York.



예시 답안

[풀어 보기 1]

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt = \int_0^x g(t)f(t)dt = (g * f)(x) \text{ 이므로 교환법칙이 성립한다.}$$

연산 *의 항등원을 $I(x)$ 이라 하면

$$(f \times I)(x) = (I * f)(x) = f(x) \text{ 에서 } I(x) \text{ 를 구하면 된다.}$$

$$\int_0^x f(t)I(t)dt = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)I(t)dt = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\therefore f(x)I(x) = f'(x) \Rightarrow I(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

 $I(x)$ 는 $f(x)$ 에 따라 변하므로 연산 *에 대한 항등원은 존재하지 않는다.

[풀어 보기 2]

(1) $f_3 = 2$ 의 배수인 n 의 값은 $n = 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$ $f_4 = 3$ 의 배수인 n 의 값은 $n = 4, 8, 12, 16, 24, 28, \dots$ $f_5 = 5$ 의 배수인 n 의 값은 $n = 5, 10, 15, 20, \dots$ $f_6 = 8$ 의 배수인 n 의 값은 $n = 6, 12, 18, \dots$ (2) n 의 배수 번째 피보나치수는 f_n 의 배수이다.

[풀어 보기 3]

 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 의 양변을 $a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ 로 나누면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{a_n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{2}$$



[문제 1-1]

점 P 가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 \oplus 의 항등원을 I 라 하면

$$P \oplus I = I \oplus P = P$$

가 되어야 한다. 그러면 $l(I) = 0$ 이어야 하므로 항등원을 나타내는 점은 A 이다.

또, 점 P 의 연산 \oplus 에 대한 역원을 P^{-1} 라 하면

$$P \oplus P^{-1} = P^{-1} \oplus P = A$$

가 되어야 한다. 그러면 $l(P) + l(P^{-1}) = 2\pi$ 이므로 $l(P^{-1}) = 2\pi - l(P)$ 이다.

따라서 연산 \oplus 에 대한 P 의 역원을 나타내는 점은 P 의 x 축 대칭점이다.

즉, 점 P 는 단위원 위의 점이므로 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ 라고 하면 $P^{-1} = (\cos\theta, -\sin\theta)$ 이다.

[문제 1-2-(a)]

수열 $\{a_n\}$ 을 $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{3}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (단, $n = 2, 3, 4, \dots$)라 하면 이는 다음과 같다.

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{21\pi}{3}, \frac{34\pi}{3}, \dots$$

이 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = 2k\pi + b_n$ (단, k 는 정수, b_n 은 $0 \leq b_n < 2\pi$ 인 실수)의 꼴로 나타내면, $l(P_n) = b_n$ 이 된다. 이때, $P_n = A$ 가 되려면 $l(P_n) = 0$ 즉 $b_n = 0$ 이 되어야 하고 따라서 $a_n = 2k\pi$ (k 는 정수)의 꼴이 되어야 한다. 그러한 n 의 최솟값은 위의 수열 a_n 에서 분자가 처음으로 6의 배수가 되는 항을 찾으면 된다.

수열 a_n 을 $\frac{\pi}{3}$ 으로 나눈 값을 생각하면 첫째 항이 0이고 둘째 항이 1인 피보나치 수열이 되어 다음과 같이 전개된다.

$$f_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

이를 6으로 나눈 나머지를 생각하면 다음과 같은 수열을 얻는다.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, \dots$$

따라서 $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

(별해) 피보나치 수열의 정수적 특성을 이용하면 다음과 같이 풀이할 수도 있다. 피보나치수가 6의 배수가 되려면 2의 배수인 동시에 3의 배수가 되어야 한다. 그런데 2의 배수인 피보나치 수열의 첨자는 3, 6, 9 등으로 3의 배수이고 3의 배수인 피보나치 수열의 첨자는 4의 배수인 4, 8, 12 등이다. 따라서 2와 3의 공배수는 첨자가 3과 4의 최소공배수인 12부터 가능하다. 즉, $P_{12} = A$ 가 된다. 따라서 n 의 최솟값은 12이다. 참고로 $f_{12} = 144$ 이므로 6의 배수이다.

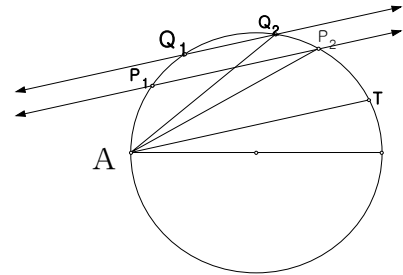


[문제 1-2-(b)]

수열 $\{a_n\}$ 을 $a_0 = 0, a_1 = \frac{2\pi}{k}, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (단, $n = 2, 3, 4, \dots$)라 하면 이는 다음과 같다.

$$0, \frac{2\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}, \frac{10\pi}{k}, \frac{16\pi}{k}, \dots$$

이 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = 2m\pi + b_n$ (단, m 는 정수, b_n 은 $0 \leq b_n < 2\pi$ 인 실수)의 꼴로 나타내면, $l(P_n) = b_n$ 이 된다. 이때, $P_n = A$ 가 되려면 $l(P_n) = 0$ 즉 $b_n = 0$ 이 되어야 하고 따라서 $a_n = 2m\pi$ (m 는 정수)의 꼴이 되어야 한다. 즉, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 수열 a_n 의 분자가 처음으로 $2k$ 의 배수가 되는 항에서 찾을 수 있다. 따라서 그 값은 수열 a_n 을 $\frac{2\pi}{k}$ 로 나눈 피보나치 수열 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ 을 k 로 나눈 나머지를 값으로 하는 수열을 생각하여 처음으로 그 값이 0이 되는 항을 찾으면 된다.



(별해) 피보나치 수열의 정수적 특성을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다. 위의 수열 a_n 의 분자는 $2k$ 의 배수가 되므로 일단 2의 배수가 되어야 한다. 따라서 첨자가 3의 배수인 항에서 $2k$ 의 배수를 구할 수 있다. 그 다음 처음으로 k 의 배수가 나오는 항의 첨자를 l 이라고 하면 $2k$ 의 배수는 l 의 배수인 항에서 구할 수 있다. 따라서 l 과 3의 최소공배수가 되는 항을 구하면 $2k$ 의 배수가 된다.

즉, $P_{lcm(3,l)} = A$ 이다. 이 때 $lcm(3,l)$ 은 3과 l 의 최소공배수를 의미한다.

[문제 1-3]

$P_1 \oplus P_2 = Q_1 \oplus Q_2 = T$ 라 하자.

그러면 $l(T) = l(P_1) + l(P_2)$ 이므로 $l(P_1) = l(T) - l(P_2)$ 이고 따라서 $\widehat{AP_1} = \widehat{TP_2}$ 이다.

같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle P_1P_2A = \angle P_2AT$$

$$\therefore \overline{P_1P_2} \parallel \overline{AT} \dots\dots\dots ①$$

같은 방법으로 $\angle Q_1Q_2A = \angle Q_2AT$

$$\therefore \overline{Q_1Q_2} \parallel \overline{AT} \dots\dots\dots ②$$

$$①, ②에서 \therefore \overline{P_1P_2} \parallel \overline{Q_1Q_2}$$

제 2 부



- ➡ 경북 대학교
- ➡ 경희 대학교
- ➡ 서강 대학교
- ➡ 서울시립대학교
- ➡ 성균관 대학교
- ➡ 숙명여자대학교
- ➡ 아주 대학교
- ➡ 인하 대학교
- ➡ 한국외국어대학교
- ➡ 한양 대학교



경북대학교 수시 2-2

제 시 문

집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 원소들이 집합 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 의 원소들과 일대일 대응될 때 B 의 원소의 개수를 n 이라 한다.

이를테면, 집합 $A = \{1, 2, \dots, n+1\}$ 의 원소들이 함수 $f(x) = x-1$ (x 는 A 의 원소)에 의하여 집합 $B = \{0, 1, \dots, n\}$ 의 원소들과 일대일 대응되므로 0에서 자연수 n 까지 정수의 개수는 $n+1$ 이다.

조금 더 일반화하면, 두 정수 m, n ($m \leq n$)에 대하여,

집합 $A = \{1, 2, \dots, n-m+1\}$ 의 원소들이 함수 $f(x) = x+m-1$ (x 는 A 의 원소)에 의하여 집합 $B = \{m, m+1, \dots, n\}$ 의 원소들과 일대일 대응되므로 m 에서 n 까지 정수의 개수는 $n-m+1$ 이다.

[문제 1-1] 201에서 565까지의 자연수에서 7의 배수는 몇 개인지 답하고, 그렇게 답한 이유를 일대일 대응 함수를 사용하여 논술하시오.

[문제 1-2] 301에서 665까지의 자연수에서 7의 배수는 몇 개인지 답하고, 그렇게 답한 이유를 일대일 대응 함수를 사용하여 논술하시오.

[문제 2] 1년은 365일이다. 이 중에서 토요일은 몇 번 있는가? 가능한 경우들을 모두 답하고 그 이유를 논술하시오.



제시문 분석

→ 유한집합의 일대일 대응과 규칙성

집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 원소들이 집합 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 의 원소들과 일대일 대응될 때 B 의 원소의 개수를 n 이라 한다. 이를 이용하여 어떤 것의 자연수의 개수를 엄밀히 셀 수 있다.



논제 분석

① 유한집합의 일대일 대응을 이용하여 어떤 것의 개수를 셀 수 있는가?

주어진 집합과의 일대일 대응을 찾아 그 집합의 원소의 개수를 셀 수 있다.

② 1년 365일 중에서 토요일은 몇 번이 있는지 논리적으로 설명 할 수 있는가?

일주일 중 토요일이 될 수 있는 날에 대한 조건(범위)를 설정하고 추론을 통해 일반화 과정을 보이고 1년 중 토요일의 개수가 52임을 설명하면 된다.



배경지식 쌓기

→ 일대일 대응

① 일대일 함수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 집합 X 의 임의의 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

즉, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 가 성립할 때 함수 f 를 일대일 함수라 한다.

② 공역(Y)=치역($f(X)$)

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 $f(X) = Y$ 즉, '집합 Y 의 임의의 원소 y 에 대하여 $f(x) = y$ 를 만족시키는 집합 X 의 원소 x 가 존재한다.'가 성립할 때 함수 f 를 Y 위로의 함수라 한다.

조건 ①과 ②를 동시에 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 **일대일 대응**이라 한다.

→ 나눗셈 정리

임의의 양의 정수 a 와 b 에 대해서, 다음을 만족하는 정수 q 와 r 이 유일하게 존재한다.

$b = qa + r$ (단, $0 \leq r < a$, $r = 0$ 일 때 a 는 b 로 나누어 떨어진다.)



풀어 보기

1. 자연수 n 에 대하여 n 의 약수의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때,
 집합 $A = \{n \mid f(n) = 3, n \text{은 } 1 \leq n \leq 100 \text{인 자연수}\}$ 의 원소의 개수를 구하시오.


2. 고대 중국의 문헌인 『손자산경(孫子算徑)』에는 다음과 같은 문제가 기록되어 있다.

3으로 나누면 1이 남고 5로 나누면 3이 남으며 7로 나누면 2가 남는 수를 구하여라.

1000 이하의 자연수 중에서 위 문제의 답이 될 수 있는 수의 개수를 구하시오.

— 자료 출처 : 『수학거미』 (안재찬)



 **입기 자료**

➔ **최소공배수와 최대공약수, 12간지**

공통의 배수, 즉 공배수의 가장 오래된 예는 '십간십이지(十干十二支)'라는 것일 게다. 이 십간십이지는 옛날부터 중국에서 쓰여 왔고, 지금도 우리나라에서 사람의 나이를 말할 때, '갑자생(甲子生)'이니 '무술생(戊戌生)'이니 하는 말을 자주 쓴다.

십간(十干)은,

갑 을 병 정 무 기 경 신 임 계
(甲) (乙) (丙) (丁) (戊) (己) (庚) (辛) (壬) (癸)

십이지(十二支)는,

자 축 인 묘 진 사 오 미 신 유 술 해
(子) (丑) (寅) (卯) (辰) (巳) (午) (未) (申) (酉) (戌) (亥)

십간은 10년에 1번, 그리고 십이지는 12년에 1번 되돌아오게 되어 있다. 그렇다면 '갑자(甲子)'의 해가 한 번 지난 다음에 다시 돌아오려면 몇 년 후가 될까?

'갑'은 10년에 1번 돌아오기 때문에 10의 배수이고, '자'는 12의 배수가 된다. 따라서 '갑자'는 10과 12의 공통의 배수가 되는 해에 찾아온다. 즉,

십 간 : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, ……

십이지 : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ……

이 중에서 공통의 수를 찾으면 먼저 60이 눈에 띈다. 이 60은 10과 12의 공통의 배수 중에서 가장 작은 것이다. 즉 최소공배수이다. 만 60세를 환갑이니 회갑이니 하는 것은 이런 뜻에서이다.

그 다음에 '갑자'의 해가 찾아오는 것은, 120년째, 다음에는 180년째, ……, 그러니까 10과 12의 공배수는 60, 120, 180, 240……과 같이 60의 배수가 된다.

이러한 규칙이 있기 때문에, 공배수를 구하기 위해서는 먼저 최소공배수를 찾으면 된다.

공배수 중에서는 가장 작은 최소공배수가 중요하지만, 공통의 약수 즉, 공약수에서는 반대로 가장 큰 최대공약수가 중요하다. 공약수에서는 최소의 것은 언제나 1이어서 별로 뜻이 없기 때문이다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

$1 \leq n \leq 100$ 인 자연수 중에서 약수의 개수가 3개인 자연수를 구하는 문제이다. 약수의 개수가 3개이므로 n 은 소수가 아니다. 따라서 n 은 합성수이고 $n = pk$ (p 는 소수, k 는 1이외의 자연수)로 나타낼 수 있다. 만일 $k \neq p$ 이면 n 은 적어도 1, p , k , pk 의 4개의 양의 약수를 가지므로 약수의 개수가 3개라는 조건에 부적합하다. 따라서 $k = p$, 즉 $n = p^2$ 이다. 즉, n 은 소수의 제곱수이므로 $1 \leq n \leq 100$ 에서 n 은 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 으로 4개가 있다.

[풀어 보기 2]

7로 나누어 2가 남는 수를 $7k+2$ 라 두면

$$k = 5m \text{ 일 때, } 7k+2 = 35m+2$$

$$k = 5m+1 \text{ 일 때, } 7k+2 = 35m+9$$

$$k = 5m+2 \text{ 일 때, } 7k+2 = 35m+16$$

$$k = 5m+3 \text{ 일 때, } 7k+2 = 35m+23$$

$$k = 5m+4 \text{ 일 때, } 7k+2 = 35m+30$$

이 중에서 5로 나누면 3이 남는 수는 $35m+23$ 뿐이다. 또,

$$m = 3n \text{ 일 때, } 35m+23 = 105n+23$$

$$m = 3n+1 \text{ 일 때, } 35m+23 = 105n+58$$

$m = 3n+2$ 일 때, $35m+23 = 105n+93$ 이므로 1000 이하의 자연수 $n = 0, 1, 2, \dots, 8$ 인 경우다. 그러므로 9개가 있다.

[문제 1-1]

201이상의 7의 배수 중 가장 작은 것은 $203 = 7 \times 29$, 565이하의 7의 배수 중에서 가장 큰 것은 $560 = 7 \times 80$ 이다. 201이상 565 이하의 7의 배수의 집합 $\{7 \times 29, 7 \times 30, \dots, 7 \times 80\}$ 을 B라 놓으면 이 집합의 원소의 개수는 29에서 80까지의 정수의 개수와 같을 것이므로 $80 - 29 + 1 = 52$ 가 된다. 즉, 집합 $A = \{1, 2, \dots, 52\}$ 의 원소들이 함수 $f(x) = 7(x+28)$ (x 는 A의 원소)에 의하여 집합 B의 원소들과 일대일 대응되므로 201 이상 565 이하의 7의 배수의 개수는 52이다.

[문제 1-2]

301 이상의 7의 배수 중 가장 작은 것은 $301 = 7 \times 43$, 665 이하의 7의 배수 중에서 가장 큰 것은 $665 = 7 \times 95$ 이다. 301이상 665 이하의 7의 배수의 집합 $\{7 \times 43, 7 \times 44, \dots, 7 \times 95\}$ 을 B라 놓으면 이 집합의 원소의 개수는 43에서 95까지의 정수의 개수와 같을 것이므로 $95 - 43 + 1 = 53$ 가 된다. 즉, 집합 $A = \{1, 2, \dots, 53\}$ 의 원소들이 함수 $f(x) = 7(x+42)$ (x 는 A의 원소)에 의하여 집합 B의 원소들과 일대일 대응되므로 301 이상 665 이하의 7의 배수의 개수는 53이다.

**[문제 2]**

1월 1일이 토요일이라면 12월 31일은 이로부터 $364=7 \times 52$ 일 뒤이므로 토요일이다. 이제 1월 1일= 7×0 , 1월 8일= 7×1 , ... , 12월 31일= 7×52 로 놓으면 토요일의 개수는 $52-0+1=53$ 임을 알 수 있다.

1월 1일이 토요일이 아니라면 첫 번째 토요일은 1월 n 일이 될 것이다. ($2 \leq n \leq 7$) 1월 n 일로부터 $364=7 \times 52$ 일 후는 다음 해가 되므로, 이번 해의 가장 마지막 토요일은 1월 n 일로부터 $257=7 \times 51$ 일 후가 되어야 한다. 그러므로 이 경우는 토요일의 개수가 $51-0+1=52$ 가 된다.



경희대학교 수시 2-1

제시문

[가] 현대 사회에서 은행예금은 개인들의 가장 기본적인 재테크 수단이다. 은행에 원금 P 를 예금하여 이자를 연이율 10%로 받기로 약정했을 때 단리인 경우와 복리인 경우로 나누어 생각할 수 있다. 단리인 경우 1년 후에는 원금과 이자 합계(이하 원리합계)가 $1.1P$, 2년 후에는 $1.2P$, 3년 후에는 $1.3P$ 가 될 것이다. 복리인 경우에는 1년 후에는 원리합계가 $1.1P$, 2년 후에는 $1.1P$ 에 대한 이자가 붙어 $1.21P$, 3년 후에는 $1.21P$ 에 대한 이자가 붙어 $1.331P$ 가 된다. 따라서 단리 예금보다는 복리 예금이 예금자에게 유리한 조건이다.

[문제 II-1] 제시문 [가]를 참조하여 다음 물음에 답하시오. (20점)

- (1) 원금 P 를 1년마다 이율 10%(복리 산정기간 1년), 6개월마다 이율 5%(복리 산정기간 6개월), 3개월마다 이율 2.5%(복리 산정기간 3개월)의 조건으로 1년 동안 복리 예금했을 때, 세 가지 경우에 대한 1년 후의 원리합계를 추정하시오.
- (2) 원금은 P 로 예금 기간은 1년으로 고정하고 (1)과 같은 방법으로 계속 복리 산정기간을 줄여 무한히 작게 하였을 때 1년 후의 원리합계가 얼마인지 e 를 사용하여 추정하고, 그 방법에 대하여 논술하시오.
단 e 는 $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ 이며, 복리 산정기간이 $\frac{1}{m}$ 년이면 매 $\frac{1}{m}$ 년마다 이율 $\frac{10}{m}\%$ 로 1년간 복리 예금하는 것으로 한다.
- (3) n 명이 똑같이 원금 1 ($P=1$)을 가지고 복리 산정기간은 모두 $\frac{1}{m}$ 년, 이율은 각각 $\frac{x}{m}\%$, $\frac{2x}{m}\%$, $\frac{3x}{m}\%$, ..., $\frac{nx}{m}\%$ 로 1년간 복리 예금에 가입한다고 가정하고, (2)와 마찬가지로 복리 산정기간을 무한히 작게 한다고 하자. 이때, 1년 후의 원리합계 금액을 각각 $Q(x)$, $Q(2x)$, $Q(3x)$, ..., $Q(nx)$ 라고 하면, n 명의 원리합계의 평균은 $\frac{Q(x)+Q(2x)+\dots+Q(nx)}{n}$ 가 된다. (2)의 결과를 참조하여 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\ln \left\{ \frac{Q(x)+Q(2x)+\dots+Q(nx)}{n} \right\} \right]$ 를 추정하고, 그 방법에 대해 논술하시오.
(단, $\ln x = \log_e x$)



제시문 분석

원금 P 에 대한 연이율 r 인 정기에금에서 n 년 후의 단리법에 의한 원리합계(원금과 이자 합계)는 $S_1 = P(1+nr)$ 이고 복리법에 의한 원리합계는 $S_2 = P(1+r)^n$ 이다.

제시문 [가]의 경우 단리법과 복리법의 의해 원리합계를 구하는 방법을 안내하고 있다. 또한 각각 같은 이율을 적용했을 때, 복리 예금이 단리 예금에 비해 예금자에게 유리함을 부연하고 있으며 논제 해결에 비교적 기초적인 자료를 제공하고 있다.

논제 분석

- ① 원금 P 에 대한 이율 10%(복리 산정기간 1년), 원금 P 에 대한 이율 5%(복리 산정기간 6개월), 원금 P 에 대한 이율 2.5%(복리 산정기간 3개월) 조건으로 1년간 복리 예금했을 때의 각각의 원리합계를 구할 수 있는가?

제시문의 내용을 활용하여 같은 일정기간(1년) 동안에 발생하는 연이율 r 을 복리 산정기간과 이율을 각각 1년마다 이율 10%, 6개월마다 이율 5%, 3개월마다 이율 2.5%로 달리했을 때, 원리합계에 대한 기준식을 세울 수 있도록 한다.

- ② [논제 II-1]의 (1)의 내용을 바탕으로 복리 산정기간을 무한히 줄여 나갈 때 나타나는 수학적 사실을 논제의 주어진 조건 하에서 논리적으로 서술할 수 있는가?

원금 P 에 대한 1년간 복리 산정기간을 $\frac{1}{m}$ 년, 이율 $\frac{10}{m}\%$ 로 했을 때의 원리합계에 대한 기준식을 세우고 복리 산정기간을 무한히 작게 하면($m \rightarrow \infty$) 원리합계가 어떻게 되는지 수리적 근거를 들어 서술하면 된다.

- ③ n 명이 원금 1을 가지고 복리산정기간이 $\frac{1}{m}$ 이며 매 $\frac{1}{m}$ 년 마다 이율을 $\frac{kx}{m}\%$

로 1년간 복리 예금했을 때 1년 후의

i) n 명의 원리합계 $Q(kx)$ ($1 \leq k \leq n$, k 는 자연수)를 추정하고, n 명의 원리합계의 평균에 대한 기준식 $\frac{Q(x) + Q(2x) + \dots + Q(nx)}{n}$ 을 구체화하여

ii) 논제 (2)의 결과를 참고하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\ln \left\{ \frac{Q(x) + Q(2x) + \dots + Q(nx)}{n} \right\} \right]$ 의 결과를 도출하고 그 과정을 수리적 근거를 들어 서술한다.



배경지식 쌓기

➔ 단리법

단리법은 원금에 대하여 일정한 기간에 약정된 이율을 적용하여 이자를 계산하는 방법으로 처음 빌린 원금에 대해서만 이자를 계산하는 방법이다.

일반적으로 단리법에 의한 이자와 원리합계는 다음과 같이 계산된다.

원금을 P , 이율을 r , 기간을 n 이라 할 때, 단리법에 의한 이자 R 와 원리합계 S 는 $R = Prn$, $S = P + R = P + Prn = P(1 + rn)$ 이다.

➔ 복리법

원금에 대하여 일정한 기간에 약정된 이율을 적용하여 이자를 계산할 때, 순차적으로 이자를 원금에 가산하여 최종 기말의 원리를 계산하는 방법을 복리법이라고 한다.

원금을 P , 이율을 r , 기간을 n 이라 할 때, 복리법에 의한 n 기 말의 원리합계 S_n 은 다음과 같다.

$$\text{제 1기 말의 원리합계 : } S_1 = P(1+r)$$

$$\text{제 2기 말의 원리합계 : } S_2 = S_1(1+r) = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$$

$$\vdots$$

$$\text{제 } n \text{기 말의 원리합계 : } S_n = P(1+r)^n \text{ 이 된다.}$$

➔ 평균변화율과 순간변화율

$$\text{평균변화율(기울기) : } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{순간변화율(미분계수) : } f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

($x = a$ 에서 접선의 기울기)

➔ 자연대수 e 의 정의

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \text{ 이고, } \lim_{h \rightarrow 0} (1+ah)^{\frac{1}{h}} \text{ 꼴은 } \lim_{h \rightarrow 0} \left((1+ah)^{\frac{1}{ah}} \right)^a = e^a \text{ 이 된다.}$$



풀어 보기

→ 다음 자료를 이용하여 문제 1, 2를 풀어 보시오.

○ Maclaurin 급수전개

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 n 차 미분가능하다고 할 때,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \text{가 성립한다.}$$

[예] $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

여기에 $x=1$ 을 대입하면 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 이 수렴함을 증명하시오.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 의 2와 3사이로의 수렴성을 증명하시오.



일기 자료

(1) 오일러 상수 e 의 유래

오일러 상수 e 는 18세기 전반에 오일러가 자연로그의 밑으로 사용하면서부터 미적분에서 핵심적인 역할을 하게 되었고, 이에 따라 ‘오일러 상수’로 불리게 되었다. 그러나 자료에 따르면 그 흔적은 미적분의 탄생보다 적어도 반세기 이상 거슬러 올라간다. 17세기 초 유럽은 상업이 크게 융성하여 여러 금융산업이 발달했는데, e 의 가장 유력한 기원도 금융 계산, 특히 ‘복리법’의 계산으로 추정된다.

예를 들어 은행에 원금 P 를 연이율 r 로 t 년 동안 복리로 맡겼을 때의 원리합계를 S 라 하면 $S = P(1+r)^t$ 이다. 그런데 이자를 1년이 아니라 반년에 한 번씩 계산한다면 식은 이와 좀 달라진다. 이때도 정확히 하자면 연이율 r 을 반년 단위로 환산한 ‘반기이율’을 다시 정해야 할 것이다. 하지만 은행에서는 업무상의 안전성을 고려해서 단순히 ‘연이율÷2’, 곧 $\frac{r}{2}$ 로 해서 $S = P(1 + \frac{r}{2})^{2t}$ 로 계산한다. 그런데 이자계산을 분기별, 곧 3달마다 하는 경우도 있으며, 나아가 1달, 일주일, 심지어 하루 단위로 계산하기도 한다. 따라서 만일 하루 단위로 이자를 계산하고 이율환산도 단순한 나누기로 한다면 원리합계는 $S = P(1 + \frac{r}{365})^{365t}$ 이다. 여기서 우리는 “이자계산을 1년에 한 번 할 때와 매일 할 때 원리합계의 차는 얼마일까?”라는 의문이 생기게 된다. 아래 <표>는 100만원을 연이율 5%로 하되 이자계산을 여러 다른 기간으로 했을 때 원리합계의 차를 보여준다.

<표> 계산 주기에 따른 원리합계 변화

계산 주기	계산 횟수(n)	$\frac{r}{n}$	원리합계(S)
1년	1	0.05	1,050,000
6달	2	0.025	1,050,625
3달	4	0.0125	1,050,945
1달	12	0.004166	1,051,154
1주	52	0.0009615	1,051,244
1일	365	0.0001370	1,051,273

위 표에서 보듯 계산주기를 짧게 할수록 조금씩이나마 원리합계가 늘어난다. 그런데 만일 이 값이 어떤 일정한 값에 수렴한다면 좋겠지만 조금씩 늘어난다 하더라도 결국 무한대로 발산한다면 은행으로서는 복리법에 대해서 근본적인 재검토를 해야 할 것이다. 이 값이 끝없이 발산할 경우 오랜 기간이 지나면 어떤 은행이든 결국 파산하고 만다. 그래서 이 문제는 이제 ‘복리법수열’의 발산 여부를 따지는 것으로 바뀌게 되는데, 이를 쉽게 판단하려면 문제의 형태를 단순화하는 것이 바람직하다.



이를 위해 다소 비현실적이기는 하지만 원금이 1원, 연이율 100%, 예금 기간이 1년인 경우를 살펴보자. 그러면 계산 주기에 따른 원리합계의 식은 $S = P(1 + \frac{1}{n})^n$ 으로 되며, 우리가 찾는 결론은 “과연 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 의 극한값은 얼마인가?”라는 문제가 된다.

(2) Maclaurin 급수전개

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 n 차 미분가능하다고 할 때,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

[예] $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

여기에 $x=1$ 을 대입하면 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

(3) e 는 무리수이다.

Maclaurin 급수전개에 의하면 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ 가 되므로 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ 가 무리수임을 증명하면 된다.

이 값이 유리수라 가정하자.

즉 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \frac{a}{b}$ (단, a, b 는 서로소인 자연수)라 하자.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{b!}\right) + \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \dots\right)$$

위 식의 양변에 $b!$ 를 곱해 주면

$$(\text{자연수}) = (\text{자연수}) + \left\{ \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots \right\}$$

이 된다.

그런데 자연수는 덧셈에 닫혀 있으므로

$$\left\{ \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots \right\}$$

도 자연수가 되어야 한다.

이 때,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{b+1} \left\{ 1 + \frac{1}{(b+2)} + \frac{1}{(b+2)(b+3)} + \dots \right\} \\ &< \frac{1}{b+1} \left\{ 1 + \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+1)} + \dots \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{b+1} \left\{ 1 + \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{(b+1)} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} \right] = \frac{1}{b} < 1
 \end{aligned}$$

따라서 $\left\{ \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots \right\}$ 는 자연수가 아니다.

이는 모순이므로 e 는 무리수이다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\
 &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots \\
 &\rightarrow 2 \text{에 수렴}
 \end{aligned}$$

[풀어 보기 2]

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ 에서 $2 < e$ 임이 분명하다. ([풀어 보기 1] 참고)

여기서 $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ (첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$)

인 무한등비급수의 합)이므로 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 3$ 이 성립한다.

따라서 $2 < e < 3$ 이다.

[별해] $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 의 2와 3사이로의 수렴성 증명

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sum_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!})$ 이 수렴함을 보이고

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 임을 보이는 2단계 과정으로 진행하자.

일반적으로 $n! > 2^{n-1}$ 이 성립하므로

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \dots \textcircled{1}$$

그런데 $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ 은 첫째항이 1이고 공비 $r = \frac{1}{2}$ 인 등비급수이므로

$n \rightarrow \infty$ 일 경우 그 합은 2이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 3$ 임을 알 수 있다.

이제 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 임을 보이자. 좌변을 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = T_n$ 이라 하자.

‘이항정리’ : $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$ 을 이용해서

$$T_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{n!} \frac{1}{n^n}$$



$$= 1 + 1 + (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2!} + \dots + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})\frac{1}{n!} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

②의 각 괄호 안의 값은 모두 1보다 작다.

따라서 이를 토대로 ①과②를 비교하면 $T_n \leq S_n$ 임을 알 수 있다. 다시 말해서 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이다. 이때, $T_n \geq S_n$ 이기도 하다는 점을 보일 수 있다면 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이란 결론을 얻을 수 있다.

이제 $n > m$ 인 자연수를 택하고 T_m 을 생각해 보자.

$$T_m = 1 + 1 + (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2!} + \dots + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{m-1}{n})\frac{1}{m!} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

T_n 의 모든 항은 양수이고 $n > m$ 이므로 $T_n > T_m$ 이다. 그런데 ③의 m 을 고정하고 $n \rightarrow \infty$ 로 하면 괄호 안의 값이 모두 1에 수렴하므로 ③과 ①을 비교할 때 T_m 은 곧 S_m 에 수렴함을 알 수 있다.

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_m \leq S_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 이라는 관계가 성립함을 알 수 있고, 이는 어떤 m 에서나 항상 성립한다. 곧 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 이라는 뜻이며, 이로써 증명은 완결된다.

이렇게 하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 의 극한값은 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828 \dots$

임을 알 수 있고 $0! = 1$ 을 이용하여 간단히 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828 \dots$ 로 쓸 수 있다.

[문제 1]

1년마다 이율 10%로 1년 동안 복리 예금했을 때, 1년 후 원리합계를 P_1 이라 하면 $P_1 = P(1+0.1)$

6개월마다 이율 5%로 1년 동안 복리 예금했을 때, 1년 후 원리합계를 P_2 이라 하면 $P_2 = P(1+0.05)^2$

3개월마다 이율 2.5%로 1년 동안 복리 예금했을 때, 1년 후 원리합계를 P_3 이라 하면 $P_3 = P(1+0.025)^4$ 이 된다.

[문제 2]

원금 P 로 $\frac{1}{m}$ 년마다 이율 $\frac{10}{m}\%$ 로 1년간 복리 예금하면 1년 후의 원리합계 S 는 $S = P(1 + \frac{1}{10m})^m$ 이 된다. 여기서 복리 산정기간을 줄여 무한히 작게 하면 $m \rightarrow \infty$ 가 되고 이 때 1년 후의 원리합계는



$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{1}{10m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \left(1 + \frac{1}{10m}\right)^{10m} \right\}^{\frac{1}{10}} = P e^{\frac{1}{10}}$$

이 된다.

[문제 3]

원금 1을 가지고 복리 산정기간이 $\frac{1}{m}$ 이며 매 $\frac{1}{m}$ 년 마다 이율을 $\frac{kx}{m}\%$ 로 1년간 복리예금하면 1년 후 원리합계는 $\left(1 + \frac{kx}{100m}\right)^m$ 이 되고, 이때 복리 산정기간을 무한히 작게 하면 $m \rightarrow \infty$ 이 되므로 1년 후의 원리합계는

$$Q(kx) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{100m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{kx}{100m}\right)^{\frac{100m}{kx}} \right\}^{\frac{kx}{100}} = e^{\frac{kx}{100}}$$

이다.

여기서 $f(x) = \ln\{Q(x) + Q(2x) + \dots + Q(nx)\} = \ln\left\{e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{2x}{100}} + \dots + e^{\frac{nx}{100}}\right\}$
라 하면 $f(0) = \ln n$ 이다. 그리고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{100}e^{\frac{x}{100}} + \frac{2}{100}e^{\frac{2x}{100}} + \dots + \frac{n}{100}e^{\frac{nx}{100}}}{e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{2x}{100}} + \dots + e^{\frac{nx}{100}}}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left\{ \frac{Q(x) + Q(2x) + \dots + Q(nx)}{n} \right\} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\{Q(x) + Q(2x) + \dots + Q(nx)\} - \ln n}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{n}{100} \right) = \frac{n+1}{200} \end{aligned}$$

이 된다.



3

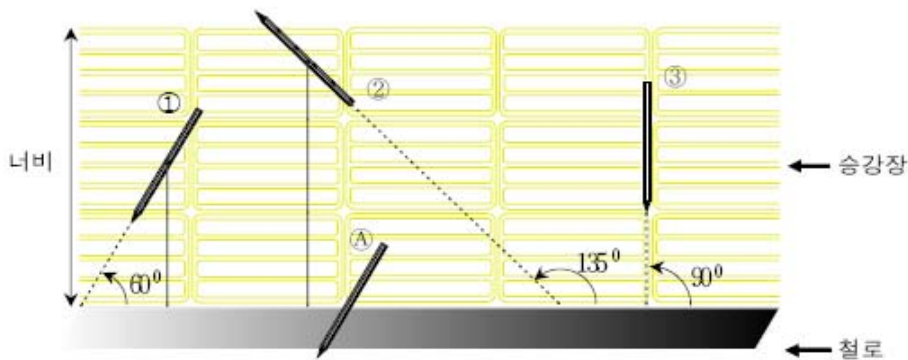
서강대학교 수시 2-1

제시문

[가] 우리는 대부분의 경우 사람들과 사회적 관계 속에서 일어나는 여러 가지 사건(현상)을 경험하며 살고 있다. 이러한 관계는 구성원 간의 약속을 통하여 만들어지곤 한다. 약속의 연속이 매일을 이룬다고 하여도 무방할 것이다. 다음에 제시되는 이야기는 흔히 우리가 경험하는 것인데, 이를 과학적으로 접근하여, 호기심을 가질 만한 수치를 얻고 그 의미를 찾아보기로 하자.

진우와 서희는 친구 사이로 서울의 다른 지역에 거주한다. 일요일인 오늘 진우는 서희에게 전화를 하여 지하철 신촌역 근처에 있는 서점에 들러 미분적분학 교재를 사기로 약속한다. 그들은 만남의 편리함 때문에 자주 이용하던 신촌역에서 만나기로 정한다.

[나] 두 사람은 정오부터 오후 1시 사이에 신촌역 앞에서 만나 같이 서점에 가기로 하였다. 지하철 도착시각표를 모두 잘 알고 있는 그들은 기다리는 시간을 줄이기 위하여 먼저 도착한 사람이 도착한 직후부터 정확히 10분만 기다린 후 서점으로 향하기로 하였다. 서희는 약속 장소인 신촌역으로 가기 위하여 집 근처 역에서 지하철을 기다리다가 아래 그림 ㉠와 같이 철로변 승강장 가장자리에 걸쳐 있는 연필 한 자루를 발견하였다.



[다] 얼마 후 신촌역에서 만난 두 사람은 그들이 만날 수 있다는 사실에 놀랐다. 왜냐하면 서로 10분만 기다리기로 하였기 때문에 역에서 만날 가능성이 낮을 것이라고 생각하였기 때문이다. 두 사람은 그들이 실제로 만날 수 있을 확률을 계산해 보기로 하였다. 그들은 x -축, y -축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본 공간을 구성하고 둘이 만날 수 있는 경우를 생각해 보았다.



[라] 서희가 승강장의 연필 모양을 진우에게 자세히 설명하자, 두 사람은 모양 ㉠처럼 연필이 철로 변 승강장 가장자리에 걸쳐있을 가능성을 조사해 보기로 하였다. 이 경우 연필은 부피가 없는 길이 L 인 단순 선분이라 하고, 승강장의 너비를 D 라 하고, 철로 변 승강장 가장자리 직선을 시초선으로 정하였다. ①, ②, ③의 예처럼, 연필의 중심으로부터 시초선까지의 거리와 연필과 시초선이 이루는 각으로 이루어진 좌표들을 표본 공간으로 고려하였다. 단 연필의 중심은 항상 승강장에 놓인다고 가정한다.

[문제 1] [다]를 이용하여, 두 사람이 실제로 만날 수 있는 확률 값에 대하여 논술하라.

[문제 2] [라]를 이용하여 표본 공간을 구성하고, 연필이 승강장 가장자리에 걸쳐 있을 확률 값에 대하여 논술하라.

[문제 3] 만약 제시문들의 내용을 서로 다른 곳에 살고 있는 세 친구의 만남으로 바꾸어 좀더 일반적인 경우로 확장하면, 그들 모두가 역에서 만날 수 있는 확률 값이 어떻게 달라지는지 적절한 표본 공간을 사용하여 구체적으로 논술하라.



제시문 분석

- ① 제시문 [가]에서는 학생들이 일상적으로 경험할 수 있는 약속과 만남이라는 상황을 소개하고 있다. 이어지는 제시문을 통해 학생들이 수학적 관계로 모델링할 수 있는 친숙한 소재이다.
- ② 제시문 [나]는 실제로 문제에서 요구하는 확률 값에 대한 실제적 상황을 설명하고 있다. 첫 부분은 두 사람이 약속한 시간과 도착 직후 정확히 10분만 기다리기로 한 상황을 설명하고 있고, 두 번째 부분은 승강장에 떨어져 있는 연필에 대한 여러 가지 상황의 그림을 보여주고 있다.
- ③ 제시문 [다]에서는 제시문 [나]의 첫 번째 상황을 기하적 확률로 모델링 할 수 있도록 진우와 서희가 도착 가능한 시간을 x 축과 y 축으로 설정하도록 정보를 제공하고 있다.
- ④ 제시문 [라]에서는 제시문 [나]의 두 번째 상황을 기하적 확률로 모델링 할 수 있도록 연필의 중심으로부터 시초선까지의 거리와 연필과 시초선이 이루는 각을 좌표로 설정하도록 정보를 제공하고 있다. 뱀뿔의 바늘 문제를 접해 본 경험이 있는 학생이라면 쉽게 이해할 수 있었을 것이다.



문제 분석

- ① 주어진 정보를 이용하여 두 사람이 만날 수 있는 확률 값을 기하적 모델링을 통해 계산할 수 있는가?

진우와 서희가 신촌역에 도착하는 시각을 각각 x , y 로 하도록 제시문을 통해 정보를 제공하고 있다. 이를 근거로 하여 표본공간을 구성하고, 진우와 서희가 만나는 상황을 식으로 표현하여 부등식의 영역을 좌표평면에 표본공간과 함께 표현하면 어렵지 않게 확률을 계산할 수 있을 것이다.

- ② 주어진 정보를 이용하여 연필이 승강장 가장자리에 걸쳐 있을 확률 값을 기하적 모델링을 통해 계산할 수 있는가?

제시문 [라]를 통해 연필의 중심에서 시초선까지의 거리와 연필과 시초선이 이루는 각을 좌표로 설정하도록 정보를 제공하고 있다. 연필의 중심에서 시초선까지의 거리가 연필과 시초선이 이루는 각에 대한 사인 함수로 표현되기 때문에 연필과 시초선이 이루는 각을 x , 연필의 중심에서 시초선까지의 거리를 y 로 설정하는 것이 좋다.

- ③ [문제 1]의 상황을 세 친구의 만남이라는 좀 더 일반적인 상황으로 확장할 수 있는가?

[문제 1]에서 좌표평면에 표본공간과 사건을 구성한 경험을 좌표공간으로 확장할 것을 요구하고 있다. 세 번째 친구가 도착하는 시간을 z 로 하여 식을 세우는 것은 어렵지 않으나 이를 좌표공간에 표현하기 위해서는 적절한 공간적 상상력을 요구한다.

**배경지식 쌓기****① 표본공간과 사건**

하나의 시행에서 가능한 결과 전체의 집합을 표본공간이라 하고, 그 표본공간의 부분집합을 사건이라 한다.

② 기하적 확률

연속적인 변량 a, b 를 크기로 갖는 영역 A, B 가 있어 점 P 는 이 영역 A 속의 어느 점이든 같은 정도로 잡을 수 있다고 하자. 이 때 영역 B 가 영역 A 에 포함되어 있을 때, 영역 A 속에 임의로 잡은 점 P 가 영역 B 에 포함될 확률을 $\frac{b}{a}$ 라 정한다.

다시 말하면, 표본공간과 사건을 길이, 넓이, 부피 등의 기하적 영역으로 표현할 수 있을 때, 사건 A 가 일어날 확률을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P(A) = \frac{A \text{가 일어날 수 있는 영역의 크기}}{\text{일어날 수 있는 전 영역의 크기}}$$

**풀어 보기**

1. 길이가 2인 선분 AB 위에 임의의 두 점 C, D 를 잡을 때, 선분 CD 의 길이가 1 이하가 되는 확률을 구하시오.
2. 한 변의 길이가 10인 정육면체가 있다. 이 정육면체의 내부에 중심을 갖는 반지름의 길이가 2인 구가 있다. 이 때, 구가 정육면체의 내부(경계 포함)에 포함될 확률을 구하시오.



입기 자료

➔ 뷔퐁의 바늘 문제(Buffon's Needle Problem)

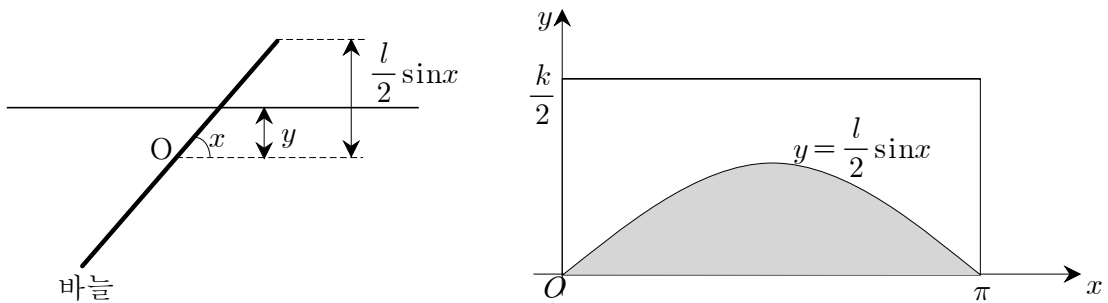
뷔퐁(프랑스 1707~1788)의 바늘문제는 확률에 관한 고전적인 문제 중의 하나로, 종이에 일정한 간격 k 로 평행한 직선을 긋고 그 위에 길이가 l 인 바늘(단, $l < k$)을 계속 떨어뜨릴 때 바늘이 한 직선과 만나는 확률을 구하는 문제이다.

이처럼 반복 실험의 통계로부터 어떤 값의 확률분포를 구하는 방법을 몬테 카를로 방법(Monte Carlo Method)이라고 한다. 오로지 확률에 의존하는 방법이기 때문에 모나코의 도박도시인 몬테 카를로의 이름을 따서 지은 것이다. 이 결과를 이용하면 원주율 π 의 근삿값을 알아낼 수 있다.

바늘의 중심 O 에서 가장 가까운 직선에 이르는 수직거리를 y 라 하고 바늘과 직선이 이루는 각을 x 라 하면

$$0 \leq y \leq \frac{k}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

가 된다.



따라서 바늘과 직선이 만날 조건은 $y \leq \frac{l}{2} \sin x$ 이므로 구하는 확률은

$$\therefore P = \frac{\text{색칠한부분의 넓이}}{\text{직사각형의 넓이}} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin x \, dx}{\frac{k}{2} \pi} = \frac{2l}{k\pi}$$

만일 바늘을 a 번 던져서 직선과 b 번 만났다고 하면

$$\frac{b}{a} = \frac{2l}{k\pi}$$

가 되어 $\pi = \frac{2al}{kb}$ 을 얻는다.

예를 들어 직선의 간격이 10이고, 바늘의 길이가 5이며 10,000번 던져 바늘이 직선과 3,200번 만났다면

$$\pi = \frac{2 \times 10000 \times 5}{3200 \times 10} = 3.12$$

의 근삿값을 얻는다.



뷔퐁의 초상화가 그려진 우표



예시 답안

[풀어 보기 1]

$AC=x, AD=y$ 라 하면

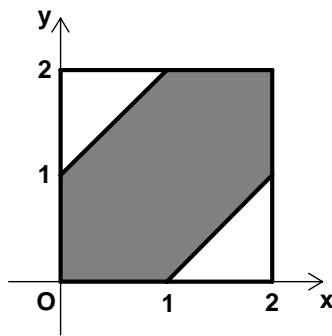
$$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

를 만족시키는 점 (x, y) 의 영역은 한 변이 2인 정사각형의 내부(경계 포함)이다.

한편, $CD \leq 1$ 인 경우는

$$|x-y| \leq 1$$

을 만족시키는 점 (x, y) 로 아래 그림의 어두운 부분이다.

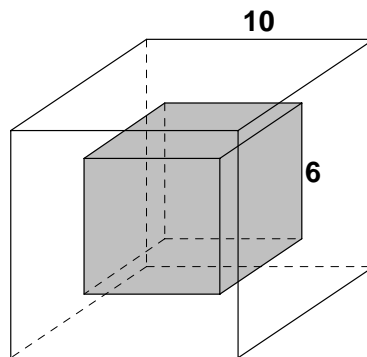


따라서 구하는 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\text{(어두운 부분의 넓이)}}{\text{(정사각형의 넓이)}} = \frac{3}{4}$$

[풀어 보기 2]

구의 중심이 정육면체의 내부에 있어야 하므로 표본공간의 크기는 정육면체의 부피와 같다. 또 반지름이 2인 구 전체가 정육면체의 내부(경계 포함)에 포함되기 위해서는 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정육면체의 내부에 구의 중심이 위치해야 한다.



따라서 구하는 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

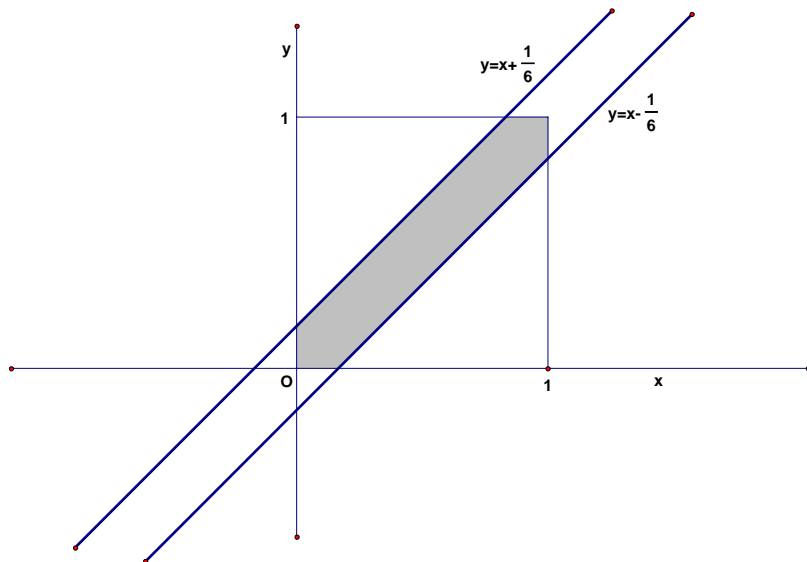
$$\frac{\text{(한 변의 길이가 6인 정육면체의 부피)}}{\text{(한 변의 길이가 10인 정육면체의 부피)}} = \frac{6^3}{10^3} = \frac{27}{125}$$

**[문제 1]**

정오와 오후 1시 사이에 진우와 서희가 신촌역에 도착하는 시각을 각각 x , y 라 하면, x 축, y 축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본공간을 아래 [그림1]과 같이 가로, 세로의 길이가 1인 정사각형으로 구성할 수 있다. 여기서 두 사람이 만날 경우는 도착 시각의 차이가 10분 즉 $\frac{1}{6}$ 시간 이하일 때이므로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$|x - y| \leq \frac{1}{6} \quad (\text{단, } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

위 식을 정리 하면 $-\frac{1}{6} \leq x - y \leq \frac{1}{6}$ 이고 이것을 좌표평면 위에 나타내면 두 사람이 만날 경우는 [그림1]의 색칠한 부분이 된다.

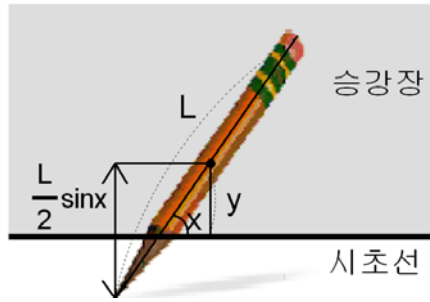


[그림 1]

따라서 두 사람이 만날 확률 $P = \frac{\text{색칠한부분의 넓이}}{\text{정사각형의 넓이}} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}$ 이다.

[문제 2]

제시문 [라]의 내용을 [그림 2]를 이용해서 다음과 같은 내용으로 재구성할 수 있다. 연필의 중심에서 시초선까지의 거리를 y 라 하고 연필과 시초선이 이루는 각을 x , 승강장 너비를 D 라 하면 $0 \leq y \leq D$, $0 \leq x \leq \pi$ 이다. 따라서 표본공간은 아래 [그림 3]과 같이 가로의 길이가 π , 세로의 길이가 D 인 직사각형으로 구성할 수 있다.

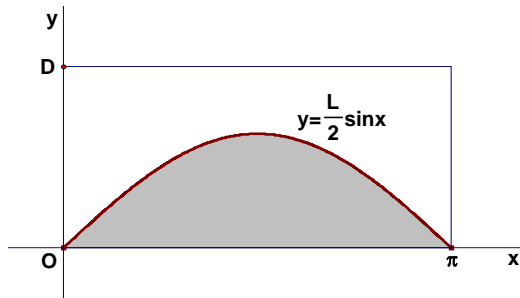


[그림 2]

이 때, 위 [그림 2]와 같이 연필이 승강장의 가장자리에 걸칠 경우는 연필의 중심에서 시초선까지의 거리가 연필 끝까지의 수직거리보다 짧을 때이므로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$y \leq \frac{L}{2} \sin x \quad (0 \leq y \leq D, 0 \leq x \leq \pi)$$

이를 바탕으로 승강장의 넓이를 표본공간으로 하는 연필이 승강장 가장자리에 걸치는 사건에 대한 확률을 [그림 3]과 같이 ‘기하적 확률’로 구할 수 있다.



[그림 3]

따라서 구하려는 확률 P 는 $P = \frac{\text{색칠한부분의 넓이}}{\text{직사각형의 넓이}} = \frac{\int_0^\pi \frac{L}{2} \sin x \, dx}{D\pi} = \frac{L}{D\pi}$ 이다.

[문제 3]

[문제 1]에서 두 사람이 만날 확률을 평면상 나타나는 표본공간에 대한 기하적 확률로 구한 것과 같은 방법으로 세 사람을 A, B, C라 하고, 각각이 약속 장소에 도착하는 시간을 x, y, z 라 하면 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 가 되고 이것이 공간상의 표본공간이다. 즉 표본공간은 한 변의 길이가 1인 정육면체가 된다.

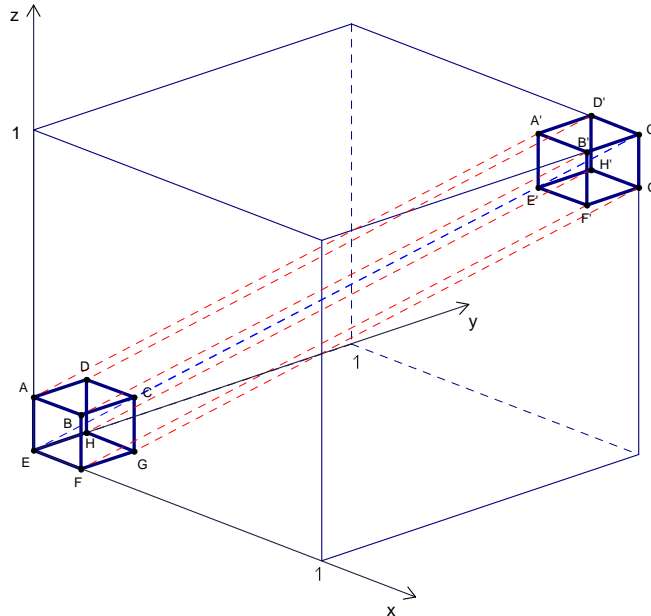
이 때 세 사람이 만날 경우는 $|x-y| \leq \frac{1}{6}, |y-z| \leq \frac{1}{6}, |z-x| \leq \frac{1}{6}$ 가 되므로 이것을 좌표공간에 나타내어 보면 아래의 [그림 4]에서 정육면체 $ABCD-EFGH$ 를 대각선 EC' 을 따라 정육면체 $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ 까지 평행이동하여 생긴 도형이 된다.



따라서 세 사람이 정오에서 오후 1시 사이에 약속된 장소에서 만날 확률은 ‘기하적 확률’로

정육면체를 평행이동하여 생긴 도형의 부피
한 변의 길이가 1인 정육면체의 부피

가 된다.



[그림 4]

이제 정육면체 $ABCD-EFGH$ 을 대각선을 따라 평행이동했을 때 생기는 입체의 부피를 구하자.

이 부피는

(정사각형 $ABCD$ 를 대각선을 따라 정사각형 $A'B'C'D'$ 까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피)

+ (정사각형 $DHGC$ 를 대각선을 따라 정사각형 $D'H'G'C'$ 까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피)

+ (정사각형 $BFGC$ 를 대각선을 따라 정사각형 $B'F'G'C'$ 까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피)

+ (정육면체 $ABCD-EFGH$ 의 부피)

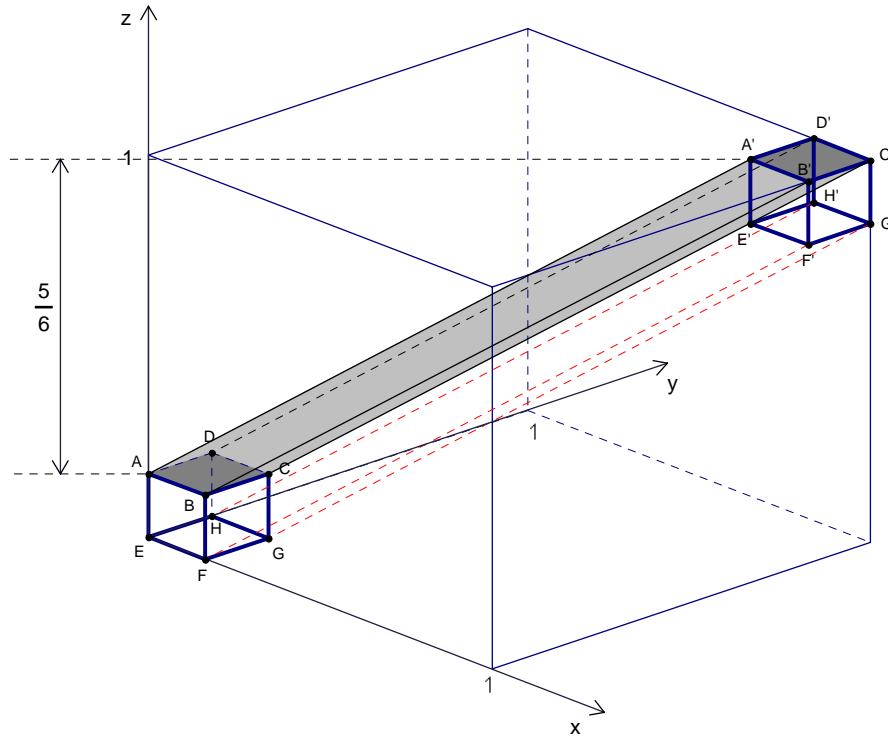
가 된다.

이 때, 정사각형 $ABCD$ 을 대각선을 따라 정사각형 $A'B'C'D'$ 까지 평행이동하여 생긴 입체의 부피는 아래 [그림5]와 같이 밑면적이 $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ 이고 높이가 $\frac{5}{6}$ 인 입체이므로

그 부피는 $\frac{5}{6^3}$ 가 된다.



마찬가지로 정사각형 $DHGC$ 을 대각선을 따라 정사각형 $D'H'G'C'$ 까지 평행이동 하여 생긴 입체의 부피와 정사각형 $BFGC$ 을 대각선을 따라 정사각형 $B'F'G'C'$ 까지 평행이동 하여 생긴 입체의 부피도 각각 $\frac{5}{6^3}$ 이다.



[그림 5]

따라서 구하려는 확률 P 는

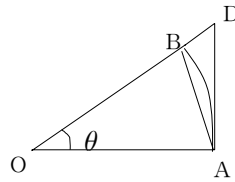
$$P = \frac{\text{정육면체를 평행이동하여 생긴 도형의 부피}}{\text{한 변의 길이가 1인 정육면체의 부피}} = \frac{3 \times \frac{5}{6^3} + \frac{1}{6^3}}{1^3} = \frac{2}{27} \text{ 이다.}$$



서울시립대학교 모의논술

제시문

1-1. 원주율 π 는 주어진 반원의 호의 길이와 반지름과의 비율을 말한다. 주어진 각에 해당하는 반지름 1인 부채꼴의 호의 길이를 각도로 정의할 수 있는데, 이때의 단위를 라디안(radian)이라고 부른다.



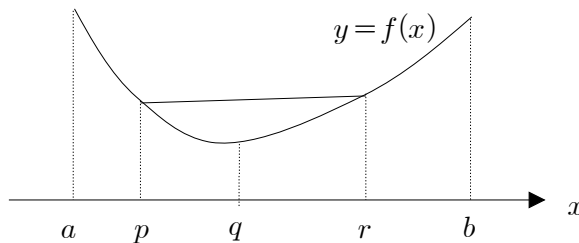
위 그림에서 주어진 세 개의 도형(삼각형 OAB, 부채꼴 OAB, 삼각형 OAD)의 면적을 비교해 보면 삼각함수와 관련된 중요한 극한중의 하나인 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 을 유도할 수 있다 (단, θ 의 단위는 라디안).

1-2. 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

를 만족하는 $c \in (a, b)$ 가 적어도 하나 존재한다. 평균값의 정리라 불리는 이 정리는 미분가능한 함수의 다양한 성질을 유도하는데 중요한 역할을 한다.

1-3. 함수의 볼록성에 대한 엄밀한 수학적 정의는 다음과 같다. $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수이다. 임의의 $p, q, r \in [a, b]$ ($p < q < r$)에 대해, 점 $(q, f(q))$ 이 두 점 $(p, f(p)), (r, f(r))$ 을 잇는 선분에 포함되거나 그 아래 (또는 위)에 있을 때 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 아래로 (또는 위로) 볼록이라고 부른다.



1-4. 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음의 극한

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(a + k\Delta x) \Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n} \right)$$



이 존재할 때, $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 적분가능하다고 하고, 그 때의 극한을 $f(x)$ 의 정적분이라고 부른다. 일반적으로 $f(x)$ 가 연속함수이면 적분가능하다는 것은 잘 알려진 사실이다.

1-5. 시소의 양끝에 질량이 m_1 과 m_2 인 두 사람이 앉아 있고, 중심으로부터 거리는 각각 d_1, d_2 이다. 시소가 한쪽으로 기울지 않고 평형이 되려면 $m_1d_1 = m_2d_2$ 를 만족하여야 한다(단, 시소의 질량은 무시한다). 이를 지렛대의 법칙이라고 부른다.

1-6. 평면 위에 면적이 A 인 도형이 있다. 도형을 지나지 않는 직선 l 을 축으로 도형을 360도 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피는 면적 A 와 도형의 중심이 움직인 거리 d 의 곱이다. 이를 파푸스의 정리라 부른다. 여기서 도형의 중심이란 밀도가 일정하다고 가정하였을 때 도형의 질량 중심을 말한다.

[문제 1-1] 제시문 1-1의 주장을 구체적으로 설명하여라. 그리고 부채꼴 OAB를 축 OA를 중심으로 360도 회전시켰을 때 나타나는 입체의 부피를

$$V(\theta)$$

라고 할 때 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V(2\theta)}{V(\theta)}$ 를 구하여라. (40점)

[문제 1-2] 함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능할 때, 평균값의 정리를 사용하여 다음의 사실들을 설명하여라. (50점)

(a) $f'(x) > 0$ ($x \in (a, b)$)이면 $f(x)$ 는 증가함수이다(즉, $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다). (20점)

(b) $f(x)$ 가 (a, b) 에서 두 번 미분가능하고, $f''(x) > 0$ ($x \in (a, b)$)이면 $f(x)$ 는 아래로 볼록이다. (30점)



[문제 1-3] 다음에 주어진 함수 $f(x)$ 가 아래로 (또는 위로) 볼록인지를 판별하고 그 이유를 설명하여라. (40점)

(a) $f(x) = \sum_{k=-100}^{100} |x-k|$ (x 는 실수). (20점)

(b) $y=f(x)$ ($0 \leq x, y \leq 1$)는 $x^a + y^a = 1$ 를 만족하는 함수 (단, a 는 0과 1사이의 유리수). (20점)

[문제 1-4] 다음 물음에 답하여라.

(a) 질량이 m_1, \dots, m_n 인 n 개의 물체가 수직선 위의 좌표 x_1, \dots, x_n 에 위치하고 있을 때의 질량 중심을 지렛대의 원리를 사용하여 유도하여라. (30점)

(b) 길이가 L (단위: m)인 선분이 있다. 위치 x ($0 \leq x \leq L$)에서의 밀도 함수가 $f(x)$ (단위: kg/m)로 주어졌을 때, 이 선분의 질량 중심 \bar{x} 는 다음과 같이 유도됨을 설명하여라. (단, $f(x)$ 는 연속함수이다). (20점)

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^L x f(x) dx \quad (\text{단, } M = \int_0^L f(x) dx)$$

(c) 곡선 $y=x^2(3-x)$ ($0 \leq x \leq 3$)와 x 축으로 둘러싸인 영역을 y 축을 중심으로 360도 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하여라. (20점)



제시문 분석

- ① [제시문 1-1]은 호도법의 정의와 제시한 그림에서 대표적인 삼각함수의 극한의 한 유형인 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 을 유도할 수 있다는 내용설명이다.
- ② [제시문 1-2]는 수학Ⅱ 교과서의 내용인 평균값의 정리를 그대로 제시문으로 옮겼다고 볼 수 있다.
- ③ [제시문 1-3]의 경우 함수의 볼록성에 대한 수학적 정의에 대한 설명을 하고 있는데 비록 교과서에서 구체적으로 언급하고 있지는 않지만 학생들이 비교적 많이 접해 본 문제 유형으로 제시문 파악에는 어려움이 없을 듯하다.
- ④ [제시문 1-4]는 정적분의 정의와 일반적인 연속함수의 적분가능성에 대한 간단한 내용을 설명하고 있다.
- ⑤ [제시문 1-5]는 지렛대의 법칙, [제시문 1-6]은 파푸스-굴딘의 정리가 제시되었다.

논제 분석

- ① [논제 1-1]은 삼각함수의 기본적 성질 이해 및 이를 이용한 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 이 성립함을 서술할 수 있는가? 입체의 부피를 활용한 극한값을 구할 수 있는가? 삼각함수의 미분과 적분을 이용하여 문제를 해결하면 된다.
- ② [논제 1-2]는 평균값 정리에 대한 이해 및 논리적 증명 능력을 측정하는 문제로 "(a) 평균값 정리를 사용하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 가 증가함수이다. (b) 평균값 정리를 이용하여 $f''(x) > 0$ ($x \in (a, b)$)이면 $f(x)$ 는 아래로 볼록이다."를 각각 증명할 수 있는가?
두 개의 소논제로 분리된 유형으로 평균값 정리를 이용하여 (단조)증가함수, 함수의 오목·볼록성을 증명하면 된다. 특히 (b)의 경우 귀류법으로 증명하는 것이 접근하기가 수월하다.
- ③ [논제 1-3]은 (a) 주어진 함수의 기울기의 변화를 통해 아래로 볼록임을 증명할 수 있는가? (b) 주어진 함수의 1계 도함수 및 2계 도함수를 이용하여 아래로 볼록임을 증명할 수 있는가?
함수의 그래프 및 도함수 계산 능력 측정을 측정하는 문제로 (a)는 정수 n 에 대해 주어진 구간 $[n, n+1]$ 에서 일차함수 $f(x)$ 의 기울기 변화를 통해 각각의 함수가 주어진 구간 내에서 연속임을 추론해서 설명해야 하고 (b)는 $f(x)$ 의 그래프 형태를 개괄해 내고 아래로 볼록임을 설명해야 한다.



④ [문제 1-4]의 경우 지렛대의 원리를 이용한 질량중심 공식 유도 및 정적분을 이용한 연속체에서의 질량중심 유도 능력이 있는가?

- (a) 수직선 위에 무작위로 위치하는 n 개 질점에 대한 질량중심(수학 교과에서 무게중심)을 주어진 문제 상황에서 지렛대의 원리를 이용해서 유도하는 과정 및 무게중심의 좌표가 자연수 n 에 대한 명제 형태로 제시되고 n 개 대한 일반화 과정을 수학적 귀납법에 의한 방법으로 일반화
- (b) 길이가 L 인 선분에 대한 위치 $x(0 \leq x \leq L)$ 의 밀도함수 $f(x)$ 가 주어질 때, 제시된 조건을 이용해서 질량중심 \bar{x} 를 수식으로 유도
- (c) 주어진 제시문이나 문제 간의 연결성을 충분히 고려하여 [제시문 1-6]의 파푸스-굴딘 정리와 [문제 1-4]의 (a), (b)를 바탕으로 회전체의 부피를 구하는 과정을 설명하면 된다.



배경지식 쌓기

① 삼각함수의 극한

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

② 미분에 관한 평균값 정리(mean value theorem)

함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

가 되는 c 가 a, b 사이에 적어도 하나 존재한다.

③ 함수의 오목과 볼록

함수 $f(x)$ 의 그래프가 그 구간에서 **아래로 볼록**하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ 이다.}$$

함수 $f(x)$ 의 그래프가 그 구간에서 **위로 볼록**하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ 이다.}$$

※ $f''(x)$ 의 곡선의 오목과 볼록

이계도함수를 갖는 함수가 어떤 구간에서

$f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 **아래로 볼록**하다.

$f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 **위로 볼록**하다.

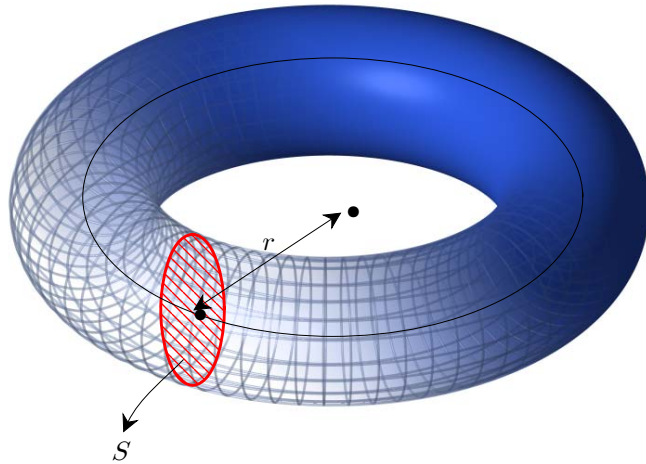


④ 파푸스- 굴딘의 정리(Pappus-Guldin's Theorem)

한 평면도형이, 같은 평면에 있는 이 평면도형과 만나지 않는 직선에 대해 360도 회전할 때 생기는 회전체의 부피는 그 평면도형의 넓이와 그 평면도형의 무게중심이 그리는 원둘레의 길이와의 곱과 같다.

부연하면 다음과 같다.

평면도형 A 와 직선 l 이 같은 평면에 있다. 평면도형의 넓이를 S , 평면도형의 무게중심에서 직선 l 까지의 거리를 r 이라 하자. 이때, 이 평면도형을 직선 l 을 기준으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 $V = S \cdot 2\pi r$ 이다.



 **풀어 보기**

1. 미분의 평균값의 정리를 이용하여 다음 부등식을 증명하시오.

$$4 - \frac{1}{27} < \sqrt[3]{63} < 4 - \frac{1}{48}$$

2. $f(x) = x^x$ ($x > 0$)의 그래프의 개형을 그리시오.



입기 자료

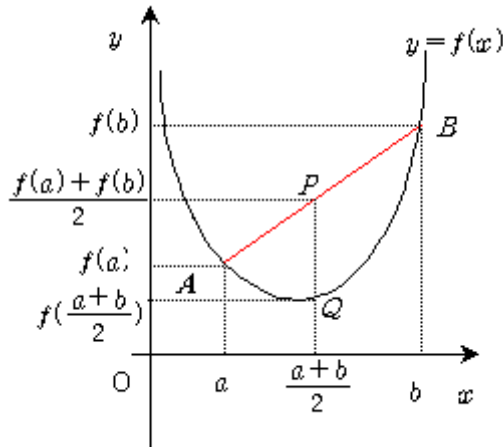
→ 오목 볼록에 대한 탐구

어떤 구간에 속하는 임의의 실수 a, b 와 $0 \leq t \leq 1$ 인 실수 t 에 대하여 $f[ta+(1-t)b] \leq tf(a)+(1-t)f(b) \cdots \cdots \textcircled{1}$ 이 성립하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

[증명]

①에서 $ta+(1-t)b = \frac{ta+(1-t)b}{t+(1-t)}$ 이므로 이것은 수직선 x 축 위의 두 수 a, b 에 대응하는 두 점을 $(1-t):t$ 로 내분하는 점이다.

또, $tf(a)+(1-t)f(b) = \frac{tf(a)+(1-t)f(b)}{t+(1-t)}$ 는 수직선 y 축 위의 두 수 $f(a), f(b)$ 에 대응하는 두 점을 이은 선분을 $(1-t):t$ 로 내분하는 점이다. 즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다. 이 때, ①에 $t = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 가 성립한다.

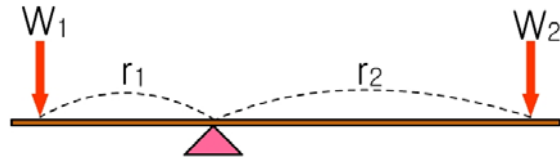


→ 아르키메데스의 평행법을 이용한 부피구하기

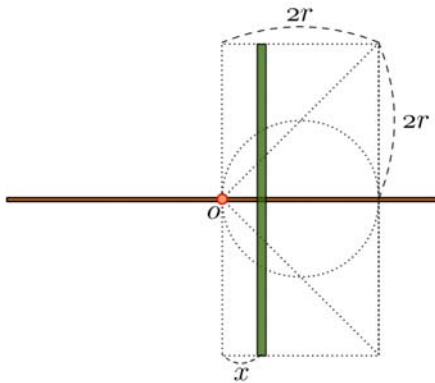
아래 그림에서 두 개의 질량 W_1 과 W_2 는 질량을 무시할 수 있는 막대기에 고정되어 있으며 서로 받침점에 대해 맞은 편 위치에 있다. 받침점으로부터의 거리를 각각 r_1, r_2 라고 하자. 이 막대는

$$W_1 r_1 = W_2 r_2$$

일 때 균형을 찾는다. 이것이 아르키메데스가 발견하고 공리적 방법으로 증명한 **지레의 원리**이다. (이 원리는 시소를 탈 때, 가벼운 사람이 무거운 사람과 균형을 맞추기 위해서는 받침점에서 더 멀리 앉아야 한다는 것을 말해 준다.)



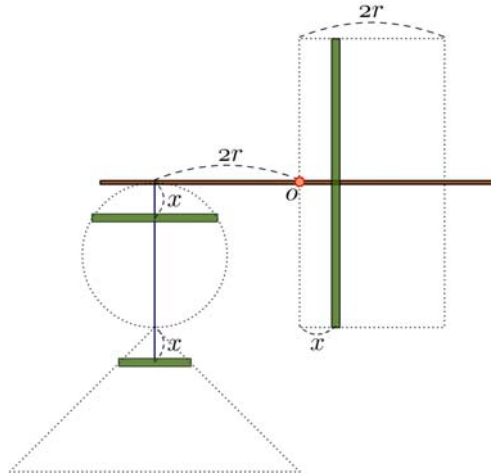
반지름 r 인 구의 부피는 $\frac{3}{4}\pi r^3$ 이다. 지금으로부터 무려 2000여 년 전에, 아르키메데스가 이 공식을 발견하고 증명했는데, 그는 구, 원뿔, 원기둥 형태의 기하학적 관계를 관찰하고, 지레의 원리를 적용하여 그 공식을 구할 수 있었다. 그의 방법을 따라가 보자.



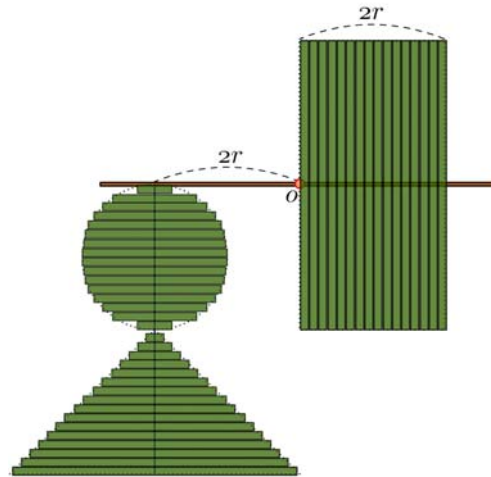
왼쪽의 그림에서, 점선으로 된 도형들은 각각, 구, 원뿔, 원기둥의 단면이다. 막대의 방향에 x -축이, O 를 지나고 x -축에 수직인 방향으로 y -축이 놓여 있다고 하면, 구의 단면(그림에서, 원으로 보이는 것)의 방정식은 $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ 이다. 이제, 녹색 판의 두께를 h 라 하고, h 가 매우 작은 값일 때 다음이 근사적으로 성립한다.

- 녹색 판의, 구에 속한 부분의 부피 : $\pi y^2 h = \pi r^2 - (x-r)^2 h = \pi(2xr - x^2)h \dots \textcircled{A}$
- 녹색 판의, 원뿔에 속한 부피 : $\pi x^2 h \dots \textcircled{B}$
- 녹색 판의, 원기둥에 속한 부피 : $\pi(2r)^2 h = 4\pi r^2 h \dots \textcircled{C}$

여기서 $\textcircled{A} + \textcircled{B} = 2\pi r h x$. 그런데, $(2\pi r h x) \times 2r = (4\pi r^2 h) \times x$ 이다. 따라서 기준점에서 x 만큼 떨어진 위치에 있는 녹색 판의, 원기둥에 속한 부분의 무게와 기준점에서 $2r$ 만큼 떨어진 위치에 있는 (녹색 판의, 구에 속한 부분의 무게)+(녹색 판의, 원뿔에 속한 부분의 무게)가 평형을 이루게 됨을 알게 된다. 즉 다음과 같은 상황일 때 지레는 평형이 될 것이다.



그런데, $0 < x < r$ 인 x 에 대해, 항상 이와 같이 성립하므로, 지레는, 기준점 왼쪽에 구와 원뿔이, 오른쪽에 원기둥이 아래와 같이 매달려 있을 때 평형을 이루게 될 것이다.



여기서, 원기둥의 부피는 $\pi(2r)^2 2r = 8\pi r^3$, 원뿔의 부피는 $(8/3)\pi r^3$. 원기둥의 무게 중심은 원점에서 r 만큼 떨어져 있고 저울은 평형을 이루어야 하므로, 구의 부피를 V 라고 할 때 다음이 성립한다.

$$(V + \frac{8}{3}\pi r^3) \times 2r = 8\pi r^3 \times r .$$

이제 간단한 계산을 통해 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 가 얻어진다.

이 아이디어에서 사용된 방법은 아르키메데스의 ‘평형법’이라고 불리는 것인데, 아르키메데스는 <방법론>이라는 책에서 이 방법을 기술했다. 이 방법은 현대의 극한이론의 뒷받침을 통해 완벽한 엄밀함을 가질 수 있으며, 결국 오늘날의 적분법과 본질적으로 동일시될 수 있다. [함수기하 수리논술 1단계, 서울대학교]



예시 답안

[풀어 보기 1]

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ 라 하면 이는 $x > 0$ 인 범위에서 미분가능 함수이다. $\sqrt[3]{63} = 3.9791$ 로 4와 상당히 가까운 숫자이다. 구간 $[63, 64]$ 에서 평균값 정리를 적용하면

$$f'(c) = \frac{f(64) - f(63)}{64 - 63} = 4 - \sqrt[3]{63} \text{ 을 만족하는 } c \text{가 존재한다. (단, } 63 < c < 64)$$

$$\text{한편, } f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ 은 감소함수이면 } f'(27) = \frac{1}{27}, f'(64) = \frac{1}{48}$$

$27 < c < 64$ 이므로 $f'(64) < c < f'(27)$ 이 성립한다.

$$\text{즉, } \frac{1}{48} < 4 - \sqrt[3]{63} < \frac{1}{27} \text{ 이다. 따라서, } 4 - \frac{1}{27} < \sqrt[3]{63} < 4 - \frac{1}{48}$$

[풀어 보기 2]

$$f(x) = x^x \quad (x > 0) \text{의}$$

양 변에 자연로그를 취한 다음 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

$$\therefore \begin{cases} x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow f'(x) > 0 ; f(x) \text{는 증가} \\ x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow f'(x) < 0 ; f(x) \text{는 감소} \end{cases}$$

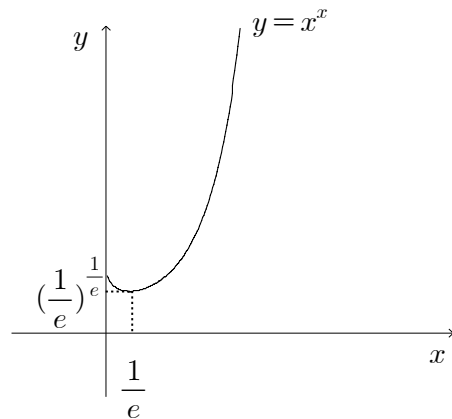
$$\text{최솟값 } f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{nx \rightarrow \infty} \frac{-\ln t}{t} = 0$$

$$(t = \frac{1}{x})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

\therefore 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.





[문제 1-1]

(a) 오른쪽 그림에서 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 이고 $\angle OAD = 90^\circ$ 이다.

먼저 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때를 생각하자.

$\triangle OAB$ 와 부채꼴 OAB 의 넓이를 비교하면 $\triangle OAB < (\text{부채꼴 } OAB)$ 이므로 $\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta$ 이다. 따라서 $\frac{\sin \theta}{\theta} < 1$ 을 얻는다.

또 부채꼴 OAB 와 $\triangle OAD$ 의 넓이를 비교하면 (부채꼴 OAB) $< \triangle OAD$ 이므로 $\frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$ 이다. 따라서 $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta}$ 를 얻는다.

두 식을 연립하면 다음과 같다.

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

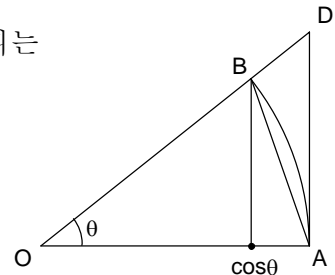
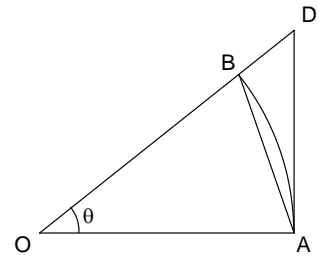
θ 가 음수인 경우에도 같은 식이 성립함을 알 수 있고, 극한 $\theta \rightarrow 0$ 을 취하면 $\cos \theta \rightarrow 1$ 이므로 $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ 임을 알 수 있다.

(b) 부채꼴 OAB 를 축 OA 를 중심으로 회전시킨 입체의 부피는

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \int_0^{\cos \theta} \pi (x \tan \theta)^2 dx + \int_{\cos \theta}^1 \pi (1-x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{2}{3} - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) = \frac{2\pi}{3} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V(2\theta)}{V(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2\theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2(\theta/2)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \frac{(\theta/2)^2}{\sin^2(\theta/2)} = 4 = 4 \text{ 이다. (반각 공식 } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \text{ 사용).}$$



[문제 1-2]

(a) 함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분 가능이므로 제시문 1-2의 평균값의 정리에 의하여 구간 $[a, b]$ 의 임의의 두 점 $x_1 < x_2$ 에 대하여 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3)$

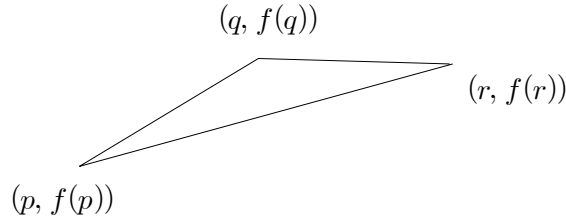
를 만족하는 x_3 가 구간 (a, b) 에 존재한다. 그런데 문제의 가정에 의하여 구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 $f'(x_3) > 0$ 이다. 따라서 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 이

고, $x_1 < x_2$ 이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 증가함수이다.

(b) $f''(x) > 0$ 이므로 (1)에 의하여, $f'(x)$ 는 증가함수이다.



다음으로 $f(x)$ 가 아래로 볼록이 아니라고 가정해 보자. 그러면 적당한 $p, q, r \in [a, b]$ ($p < q < r$)에 대해, 점 $(q, f(q))$ 이 두 점 $(p, f(p)), (r, f(r))$ 을 잇는 선분의 위쪽에 있게 된다.



위 그림의 세 선분의 기울기를 비교하면

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} > \frac{f(r)-f(p)}{r-p} > \frac{f(r)-f(q)}{r-q}$$

가 성립함을 알 수 있다.

한편 평균값의 정리에 의해 적당한 $u \in (p, q), v \in (q, r)$ 에 대하여

$$f'(u) = \frac{f(q)-f(p)}{q-p} > f'(v) = \frac{f(r)-f(q)}{r-q}$$

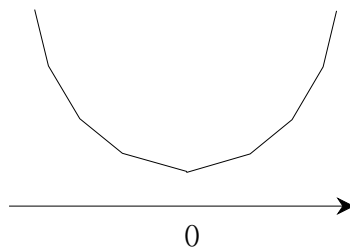
가 된다. $u < v$ 이므로 이는 $f'(x)$ 가 증가함수라는 사실에 모순이 된다. 그러므로 $f(x)$ 는 아래로 볼록인 함수이다.

[문제 1-3]

(a) 정수 n 에 대하여 구간 $[n, n+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 일차함수이고 그 때의 기울기 m 은 다음과 같다.

$$m = \begin{cases} 2n+1 & (-100 \leq n \leq 100), \\ 201 & (n \geq 101), \\ -201 & (n \leq -101). \end{cases}$$

한편, 각각의 함수 $|x-k|$ ($-100 \leq k \leq 100$)가 연속이므로, $f(x)$ 는 연속이다. 그러므로 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 형태이고, 아래로 볼록이다.



(b) $y = (1-x^a)^{\frac{1}{a}}$ 이므로 $y = f(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다. $x \in (0, 1)$ 에서 ($0 < y < 1$) 식 $x^a + y^a = 1$ 의 양변을 미분하면 $ax^{a-1} + ay^{a-1}y' = 0$ 이다. 즉, $y' = -\frac{x^{a-1}}{y^{a-1}}$ 이다. 그리고 y' 을 다시 미분하면



$$y'' = -(a-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{a-2} \left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)$$

$$= -(a-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{a-2} \left(\frac{y-x(-x^{a-1}/y^{a-1})}{y^2}\right) = (1-a)\left(\frac{x}{y}\right)^{a-2} \left(\frac{1}{y^{a+1}}\right)$$

이다. 여기서 $x, y > 0$ 이고, $0 < a < 1$ 이므로, $y'' > 0$ 이다. 그러므로 문제 1-2의 (b)에 의해 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록이다.

[문제 1-4]

(a) 질량중심의 위치는

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 이를 수학적 귀납법을 사용하여 증명하자.

(i) $n=2$ 인 경우를 먼저 생각해 보자. 무게중심의 좌표 \bar{x} 는 지렛대의 원리에 의해

$$m_2(x_2 - \bar{x}) = m_1(\bar{x} - x_1)$$

를 만족해야 한다. 그러므로 $\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ 로 ①을 만족한다.

(ii) $n=k-1$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하자. (k 는 3 이상의 자연수)

즉, 처음 $k-1$ 개의 물체의 무게중심 \bar{x}' 이 다음과 같다고 하자.

$$\bar{x}' = \frac{m_1x_1 + \dots + m_{k-1}x_{k-1}}{m_1 + \dots + m_{k-1}}$$

한편 전체 k 개의 질량중심 \bar{x} 는 \bar{x}' 과 x_k 의 위치에 질량이 각각 $m_1 + \dots + m_{k-1}$, m_k 인 두 물체가 있을 때의 질량중심과 같다. 그러므로 지렛대의 원리를 다시 한 번 적용하면

$$\bar{x} = \frac{(m_1 + \dots + m_{k-1})\bar{x}' + m_kx_k}{(m_1 + \dots + m_{k-1}) + m_k} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_kx_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

을 얻게 된다. 즉 $n=k$ 일 때도 ①이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 질량중심의 위치는

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

가 된다.

(b) 임의의 자연수 n 에 대하여 주어진 선분을 길이가 $\frac{L}{n}$ 인 선분으로 n 등분 하자.

n 이 충분히 크다고 가정하면 선분의 질량중심 \bar{x} 는 $k\frac{L}{n}$ ($1 \leq k \leq n$)에 위치한 질량

이 $\frac{L}{n}f(k\frac{L}{n})$ 인 n 개의 물체의 질량중심에 근사하다고 할 수 있다. 즉,



$$\bar{x} \simeq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{L}{n} f\left(k\frac{L}{n}\right) k\frac{L}{n}}{\sum_{k=1}^n \frac{L}{n} f\left(k\frac{L}{n}\right)}$$

이다. 가정에 의해 $f(x)$ 는 연속함수이므로 극한 $n \rightarrow \infty$ 을 취하면 위 식의 분모, 분자는 각각 $\int_0^L f(x)dx$ 와 $\int_0^L xf(x)dx$ 로 수렴을 하고 따라서 질량 중심 \bar{x} 는 다음과 같게 된다.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L xf(x)dx}{\int_0^L f(x)dx} = \frac{1}{M} \int_0^L xf(x)dx$$

(c) 곡선 $y = x^2(3-x)$ 과 x 축으로 둘러싸인 영역의 질량은 길이가 3이고 밀도가 $x^2(3-x)$ 인 선분의 질량과 같다.

주어진 영역의 질량중심의 x 축 성분 \bar{x} 는 선분의 질량 중심과 같고 (b)에 의해

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 x \cdot x^2(3-x)dx}{\int_0^3 x^2(3-x)dx} = \frac{9}{5} \text{이다.}$$

주어진 영역의 넓이 A 는 $\int_0^3 x^2(3-x)dx = \frac{27}{4}$ 이고, 중심이 이동한 거리는 $2\pi\bar{x}$ 이므로

제시문 1-6의 파푸스의 정리에 의해 회전체의 부피는

$$V = 2\pi\bar{x}A = 2\pi \times \frac{9}{5} \times \frac{27}{4} = \frac{3^5}{10}\pi \text{이다.}$$



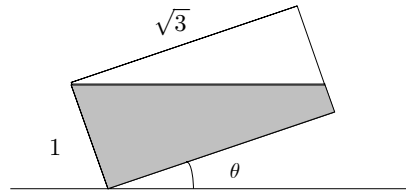
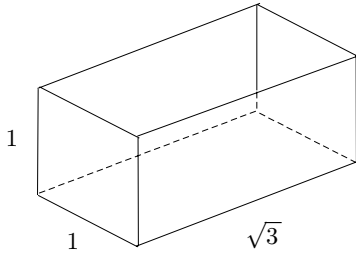
5

서울시립대학교 수시 2-1

제시문

[문제 1-1]

가로, 세로, 높이가 각각 $\sqrt{3}$, 1, 1 인 직육면체 모양의 그릇이 지면 위에 놓여 있고 그 안에는 물이 가득 차 있다. 아래의 그림과 같이 길이가 1인 밑변 하나가 지면에 고정된 채 천천히 기울여져서 물이 밖으로 흘러나가고 있다. 밑면과 지면이 이루는 각이 θ 일 때, 그릇에 남아있는 물의 양과 수면의 면적을 각각 $V(\theta)$, $S(\theta)$ 라고 하자. θ 에 관한 함수 $V(\theta)$, $S(\theta)$ 의 미분가능성을 조사하고 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 미분 가능한 θ 의 범위에서 각 함수의 미분계수를 구하여라.



[문제 1-2]

평면 위의 세 점 P, Q, R 이 각각 등속도 운동을 하고 있다.

(a) 세 점이 만드는 삼각형의 면적은 시각 t 의 함수로

$$A(t) = |lt^2 + mt + n|$$

와 같이 나타낼 수 있음을 설명하여라. (단 l, m, n 는 적당한 실수).

(b) 시각 $t=0, 1, 2$ 에서 삼각형의 면적이 아래와 같이 주어졌을 때, $A(3)$ 의 값을 구하여라.

t	0	1	2
$A(t)$	2	0	4

[문제 1-3]

(제시문)

실수의 곱셈에 관한 성질 중에는 행렬의 곱셈에서는 성립하지 않는 것들이 있다. 대표적인 예로 행렬의 곱셈은 교환법칙을 만족하지 않는다. 그 결과 임의의 실수 a, b 에 대하여 등식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 은 항상 성립하는 반면, 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 은 항상 성립하지는 않는다.



또 다른 예로서 0이 아닌 두 실수의 곱은 항상 0이 아니지만, 영행렬이 아닌 두 정사각행렬의 곱은 영행렬이 될 수 있다. 따라서 $a^2 - 1 = (a-1)(a+1) = 0$ 을 만족하는 실수 a 는 1, -1 밖에 없지만, $A^2 - I = (A-I)(A+I) = O$ 을 만족하는 정사각행렬 A 는 I 와 $-I$ 외에 다른 것이 존재할 수 있다(I 는 항등행렬, O 는 영행렬).

(문제)

다음 물음에 답하여라. 아래에서 A, B 는 이차 정사각행렬을 나타낸다.

- (a) 임의의 B 에 대하여 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 를 만족하는 A 는 kI (k 는 임의의 상수) 형태임을 보여라.
- (b) $AB = O$ 이 되는 영행렬이 아닌 B 가 존재하기 위해서는 A 가 어떤 조건을 만족해야 하는지 알아보고, 이를 행렬을 이용한 연립방정식의 문제와 연관하여 유도하여라.

**제시문 분석**

- ① [문제 1-1]에서는 안에 물이 가득 차 있는 직육면체 모양의 그릇이 점점 기울어짐에 따라 변하는 수면의 넓이와 남은 물의 양을 함수로 모델링할 수 있는 상황을 제시하고 있다. 세로의 길이가 1이므로 제시문의 우측 그림에서 주어진 단면의 모습을 잘 활용하면 함수식을 만들 수 있다.
- ② [문제 1-2]에서는 등속도 운동을 하고 있는 세 점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 나타내는 식을 제시하고 있다.
- ③ [문제 1-3]에서는 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다는 것, 영행렬이 아닌 두 정사각행렬의 곱이 영행렬이 될 수도 있다는 것 등의 실수의 연산과는 다른 행렬의 연산의 성질을 설명하고 있다.

**논제 분석**

- ① 주어진 상황을 구간별로 정의되는 함수식으로 만들고 그 미분가능성을 조사할 수 있는가?

수면의 넓이와 남은 물의 부피를 밑면과 지면이 이루는 각인 θ 에 대한 함수식으로 만들면 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 을 경계로 하는 구간별 함수를 만들 수 있다. 여기서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수를 비교하여 그 미분가능성을 조사하면 된다.



- ② 등속도 운동을 하는 세 점의 좌표를 t 에 대한 함수로 설정하여 이 세 점이 만드는 삼각형의 넓이를 식으로 표현할 수 있는가? 또, 특정한 t 의 값에 대한 넓이가 주어졌을 때, 이를 이용하여 다른 시간에서의 넓이를 구할 수 있는가?

평면 위의 점이 등속도 운동을 하고 있다면 그 x 좌표와 y 좌표를 각각 t 에 대한 일차함수로 표현할 수 있다. 따라서 (a)에서는 세 점이 모두 x, y 좌표가 각각 t 에 대한 일차함수인 좌표로 표현되므로 이를 이용하여 다양한 방법으로 삼각형의 넓이를 식으로 만들 수 있다. 이 때, 세 점 중 하나를 원점으로 옮기는 평행이동을 생각하면 식을 좀 더 간단하게 만들 수도 있다. (b)에서는 시각 $t=0, 1, 2$ 에서 주어진 넓이를 이용하여 부정방정식을 풀면 $t=3$ 에서의 넓이를 계산할 수 있다.

- ③ 임의의 행렬 B 에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는 행렬의 형태를 유도할 수 있는가? 또 영행렬이 아닌 두 행렬이 곱이 영행렬이 되는 상황을 연립방정식과 관련하여 설명할 수 있는가?

(a)에서는 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 가 되려면 $AB = BA$ 가 되어야 함을 파악하고, 또 임의의 행렬 B 에 대해 성립한다고 하였으므로 두 행렬을 성분으로 표현하여 항등식의 성질을 이용하여 문제를 해결하면 된다. (b)에서는 대우명제를 이용하여 증명하면 논리적으로 설명할 수 있으며, 연립방정식과 관련해서는 해의 존재성 여부와 함께 설명하면 될 것이다.

배경지식 쌓기

- ① 미분가능

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 가 존재하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

- ② 평면 위의 운동에서의 속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x 좌표와 y 좌표가 각각 시각 t 의 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 로 나타내어질 때 시각 t 에서의 점 P의 속도 \vec{v} 와 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

이다. 따라서 등속도 운동을 하는 점의 x 좌표와 y 좌표는 각각 시각 t 에 대한 일차함수로 표현되어야 한다.

- ③ 행렬의 곱셈에 대한 성질

- ▶ 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.
- ▶ 행렬의 곱셈에서 결합법칙은 성립한다.
- ▶ 행렬에서 ' $AB=O$ 이면 $A=O$ 또는 $B=O$ '는 성립하지 않는다.
- ▶ $AB=AC, A \neq O$ 이라도 $B=C$ 라고 말할 수 없는 경우가 있다.



풀어 보기

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x < 0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 $x=0$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

2. 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표가 $(t^3 - 3t, 3t^2)$ 으로 나타내어질 때, t 초 후의 속도와 속력을 구하시오.

3. 2×2 행렬 A, B 에 대하여

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

이 성립하기 위한 필요충분조건은 $AB=BA$ 임을 밝히시오.



예시 답안

[풀어 보기 1]

(i) $f(0) = 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x = 0$ 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} 1 = 1$$

즉, $f'(0)$ 이 존재하지 않으므로 미분가능하지 않다.

[풀어 보기 2]

$x = t^3 - 3t$, $y = 3t^2$ 이므로

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3, \quad \frac{dy}{dt} = 6t$$

따라서 t 초 후의 속도는

$$\vec{v} = (3t^2 - 3, 6t)$$

t 초 후의 속력은

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + (6t)^2} = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9} = 3(t^2 + 1)$$

[풀어 보기 3]

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\Leftrightarrow (A+B)(A-B) - A^2 + B^2 = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 - AB + BA - B^2 - A^2 + B^2 = O$$

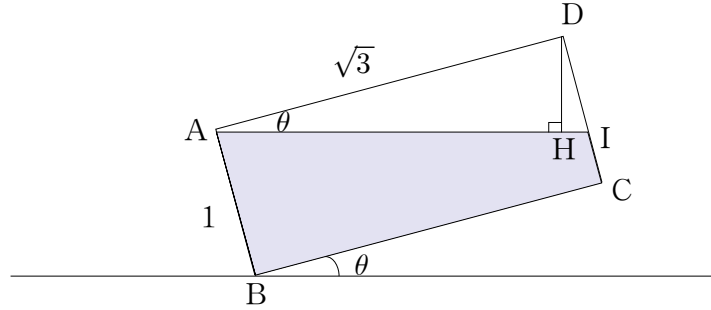
$$\Leftrightarrow -AB + BA = O$$

$$\Leftrightarrow AB = BA$$



[문제 1-1]

i) $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 일 때,



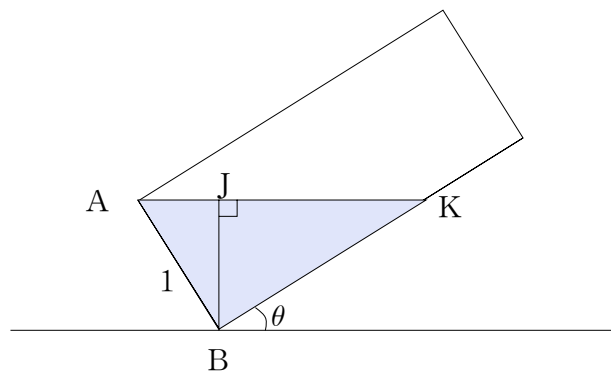
수면은 가로, 세로가 각각 1, \overline{AI} 인 직사각형 모양이므로 그 넓이 $S(\theta)$ 는 위 그림의 \overline{AI} 의 길이와 같게 된다. 따라서 그 넓이 $S(\theta)$ 는 $\triangle AID$ 가 직각삼각형임을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{S(\theta)} \quad \therefore S(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} = \sqrt{3} \sec\theta$$

또한 점 D에서 \overline{AI} 에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직각삼각형 ADH에서 $\overline{DH} = \sqrt{3} \sin\theta$ 이므로 밖으로 흘러나간 물의 부피는 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \sec\theta \cdot \sqrt{3} \sin\theta$ 가 된다. 따라서 그릇에 남아있는 물의 부피 $V(\theta)$ 는

$$V(\theta) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \sec\theta \cdot \sqrt{3} \sin\theta = \sqrt{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\theta \right) \text{ 이다.}$$

ii) $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,



앞에서와 마찬가지로 용기의 세로의 길이가 1이므로 선분 AK의 길이가 수면의 넓이 $S(\theta)$ 가 된다. 여기서 $\angle BAK = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 직각삼각형 ABK에서

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{S(\theta)}, \quad \therefore S(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$$



또한 점 B에서 \overline{AK} 에 내린 수선의 발을 J라 하면 직각삼각형 ABJ에서

$\overline{BJ} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ 가 되므로 용기에 남아있는 물의 양 $V(\theta)$ 는

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \cos\theta \cdot S(\theta) = \frac{1}{2} \cot\theta$$

가 된다.

따라서 i)과 ii)에서

$$S(\theta) = \begin{cases} \sqrt{3} \sec\theta & (0 < \theta < \frac{\pi}{6}) \\ \operatorname{cosec}\theta & (\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}, \quad V(\theta) = \begin{cases} \sqrt{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\theta\right) & (0 < \theta < \frac{\pi}{6}) \\ \frac{1}{2} \cot\theta & (\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

각 삼각함수는 주어진 영역에서 미분가능하므로 경계점인 $\frac{\pi}{6}$ 에서의 미분가능성만 조사하면 된다. $S(\theta)$ 와 $V(\theta)$ 를 각각 θ 에 대해 미분하면

$$S'(\theta) = \begin{cases} \sqrt{3} \sec\theta \cdot \tan\theta & (0 < \theta < \frac{\pi}{6}) \\ -\operatorname{cosec}\theta \cdot \cot\theta & (\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}, \quad V'(\theta) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \sec^2\theta & (0 < \theta < \frac{\pi}{6}) \\ -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2\theta & (\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서 $S(\theta)$ 의 좌미분계수는 $S'_-\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sec\frac{\pi}{6} \cdot \tan\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이고 우미분계수는 $S'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} \cdot \cot\frac{\pi}{6} = -2\sqrt{3}$ 이므로 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서 미분불가능하다.

같은 방법으로 $V(\theta)$ 의 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서의 좌미분계수는 $V'_-\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} \sec^2\frac{\pi}{6} = -2$ 이고 우미분계수는 $V'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6} = -2$ 이므로 $V(\theta)$ 는 주어진 영역에서 미분가능하다.

[문제 1-2]

(a) 평면 위에서 세 점 P, Q, R 이 등속도 운동을 하고 있으므로 t 초 후 세 점은 다음과 같이 시각 t 에 관한 일차식으로 표시된다.

$$P(at+a', bt+b'), \quad Q(ct+c', dt+d'), \quad R(et+e', ft+f')$$

이 때 삼각형 PQR 의 넓이는 점 P 가 원점 O 가 되도록 세 점을 평행 이동하여 생긴 삼각형 $OQ'R'$ 의 넓이와 같다. 또 Q 와 R 을 평행이동한 점 Q' 와 R' 도 다음과 같이 시각 t 에 관한 일차식으로 표시된다.

$$Q'(pt+p', qt+q'), \quad R'(rt+r', st+s') \quad (\text{단, } p, p', q, q' \text{ 는 실수})$$

따라서 삼각형 $OQ'R'$ 의 넓이 $A(t)$ 는



$$A(t) = \frac{1}{2} abs \left| \begin{matrix} pt+p' & qt+q' \\ rt+r' & st+s' \end{matrix} \right| \quad (\text{단, } abs \text{는 절댓값을, } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \text{를 나타낸다.})$$

이것을 풀어 정리하면 다음과 같이 삼각형의 넓이 $A(t)$ 는 시각 t 에 관한 이차식으로 표시된다.

$$\therefore A(t) = |lt^2 + mt + n| \quad (\text{단 } l, m, n \text{는 적당한 실수})$$

(b) $A(0) = 2$ 이므로 $|n| = 2 \therefore n = \pm 2$

i) $n = 2$ 일 때,

$$A(1) = |l+m+n| = 0 \text{ 이므로 } l+m = -2 \cdots \textcircled{1}$$

$$A(2) = |4l+2m+n| = 4 \text{ 이므로 } 4l+2m+2 = \pm 4 \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②를 연립하여 풀면 $(l, m, n) = (3, -5, 2)$ 또는 $(-1, -1, 2)$

ii) $n = -2$ 일 때,

$$A(1) = |l+m+n| = 0 \text{ 이므로 } l+m = 2 \cdots \textcircled{3}$$

$$A(2) = |4l+2m+n| = 4 \text{ 이므로 } 4l+2m-2 = \pm 4 \cdots \textcircled{4}$$

③과 ④를 연립하여 풀면 $(l, m, n) = (-3, 5, -2)$ 또는 $(1, 1, -2)$

그러므로 i) 과 ii)에서 $A(3) = |9l+3m+n| = 14$ 또는 10 이다.

[문제 1-3]

(a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 가 만족하려면 $AB = BA$ 가 되어야 한다. 두 이차정사각행렬 A, B 를 각각

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

라 하면

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

$AB = BA$ 이므로

$$ax+bz = ax+cy \cdots \textcircled{1}$$

$$ay+bw = bx+dy \cdots \textcircled{2}$$

$$cx+dz = az+cw \cdots \textcircled{3}$$

$$cy+dw = bz+dw \cdots \textcircled{4}$$

①과 ④에서 임의의 y, z 에 대해 $cy-bz=0$ 이므로 $b=c=0$ 이다. 또, ②와 ③에서 임의의 z 에 대해 $(d-a)z=0$ 이므로 $a=d$ 이다. 따라서

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

이므로 A 는 kI (k 는 임의의 상수) 형태다.

(b) $AB = O$ 일 때 만일 행렬 A 가 역행렬을 갖는다면

$$A^{-1}AB = A^{-1}O$$

$$B = O$$



이므로 행렬 B 는 영행렬이 될 수밖에 없다. 따라서 영행렬이 아닌 B 가 존재하기 위해서는 행렬 A 가 역행렬을 갖지 않아야 한다.

이를 행렬을 이용한 연립방정식의 문제와 연관하여 설명하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \text{ 꼴의 연립방정식을 행렬로 나타내면}$$

$$AB=O \text{ (단, } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{이다.)}$$

이런 방정식은 첫째, $x=y=0$ 라는 자명한 해(trivial solution)를 항상 갖는 경우, 둘째, 무수히 많은 해를 갖는 경우의 두 가지 경우만 가능하다. 따라서 $AB=O$ 이 되는 영행렬이 아닌 B 가 존재하기 위해서는 연립방정식 $AB=O$ 의 해가 무수히 많아야 하므로 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

즉, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에서 $ad-bc=0$ 이 되어야 한다.



6

성균관대학교 예시 문항

제 시 문

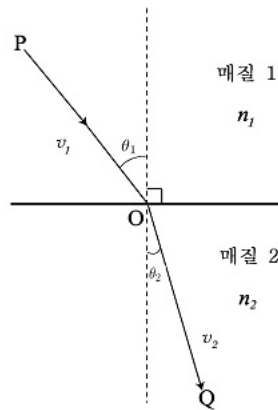
[제시문 3-가] 17세기에 페르마는 "빛이 주어진 한 지점에서 출발하여 다른 지점에 도착할 때, 이 빛은 가장 최소시간이 걸리는 경로를 따라간다"는 페르마 원리를 이야기했다.

[제시문 3-나] 스넬의 법칙이란 <그림1>처럼 굴절율이 각각 n_1 과 n_2 로 서로 다른 균일한 매질 1과 매질 2를 빛이 통과할 때, 경계면에서 입사각 θ_1 과 굴절각 θ_2 사이의 관계가 다음과 같은 식으로 표현된다는 것이다.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

단, v_1 과 v_2 는 각각 매질 1과 매질 2에서 빛의 진행속력으로, 빛의 진공 중 속력을 c 라 하면 각 매질에서의 속력은 $v_1 = c/n_1$ 과 $v_2 = c/n_2$ 가 된다.

[제시문 3-다] <그림1>에서 빛이 P점을 출발하여 O점을 거쳐 Q점에 도착하므로 빛이 이동한 거리는 선분 \overline{PO} 와 \overline{OQ} 의 길이를 더한 것이다.



[문제 3-i] [제시문 3-다]를 참고하여 [제시문 3-가]의 페르마 원리로부터 [제시문 3-나]의 스넬의 법칙이 성립하는 이유를 설명하시오.

[문제 3-ii] 이 문제에서 얻은 과학적 지식을 활용하여, 호숫가 모래사장에 있는 사람이 호수에 빠진 다른 사람을 어떻게 최단시간에 구출할 수 있는지 논하시오.



제시문 분석

① 페르마 원리에 대한 설명

제시문 [3-가]는 "빛이 주어진 한 지점에서 출발하여 다른 지점에 도착할 때, 이 빛은 가장 최소시간이 걸리는 경로를 따라 간다." 는 페르마 원리에 대한 설명이다.

② ‘굴절의 법칙’이라 일컫는 ‘스넬의 법칙’에 대한 일반적인 원리

제시문 [3-나]는 ‘굴절의 법칙’이라 일컫는 ‘스넬의 법칙’에 대한 일반적인 원리와 결과를 설명한 내용으로 제시되었고, 제시문[3-다]의 <그림1>을 통해 구체적인 예시를 보여주고 있다.



논제 분석

① [제시문 3-다]를 참고하여 [제시문 3-가]의 페르마 원리로부터 [제시문 3-나]의 스넬의 법칙이 성립하는 이유는 무엇인가?

논제해결을 위해 제시문간의 내용과 관계를 충분히 파악하여 페르마 원리를 통해 ‘스넬의 법칙’이 성립하는 과정을 설명하면 된다. 선분 \overline{PO} 와 \overline{OQ} 의 정보를 좌표평면에 나타내면 각각 거리를 속력으로 나눈 값들의 합이 최소시간이 되므로 관계식을 미분에 최솟값이 되는 조건으로 의해 구할 수 있다.

② 제시문과 [논제3- i]에서 얻은 과학적 지식을 활용하여, 호숫가 모래사장에 있는 사람이 호수에 빠진 다른 사람을 어떻게 최단시간에 구출할 수 있는지 논하라.

주어진 문제 상황을 실생활 내용으로 재해석하여 호수에 빠진 사람을 어떻게 최단시간에 구출할 수 있는지를 논리적으로 서술하면 된다.

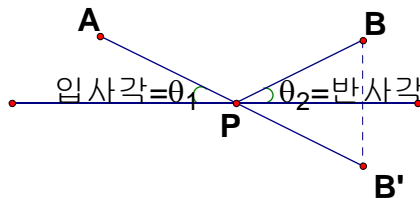


배경지식 쌓기

➔ 페르마(Fermat)의 원리

페르마(Fermat)는 빛이 최단거리로 진행된다고 추측하였다. 그는 빛의 성질에서 입사각은 반사각과 같다는 사실을 근거로 하여 이 추측의 타당성을 확인하였다. 아래 그림은 페르마의 생각을 구체적으로 설명한 것이다.

점 A를 지난 빛이 직선 l과 같은 거울에 반사되어 B를 지났다고 하자. 빛은 최단거리로 가기 때문에 점A와 직선l, 점B를 지나는 최단거리로 지나갈 것이다. 따라서 최단거리를 구하는 문제는 빛의 경로를 구하는 문제와 일치한다. 이 때, 최단거리는 $\overline{AB'}$ 과 같다. (참고, 물리에서 입사각은 반사면의 법선과 빛의 경로가 이루는 각이지만 아래의 그림과 수학적인 의미는 동일하다.)



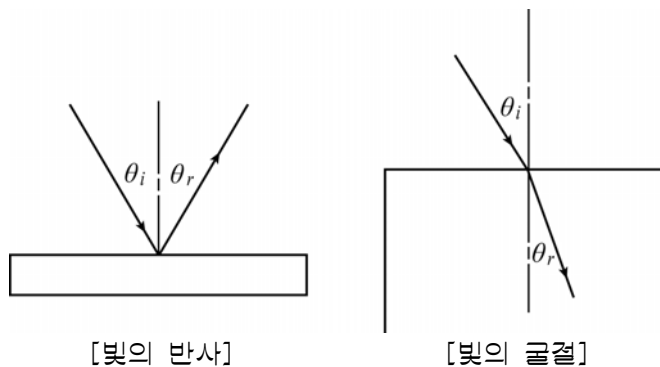
➔ 스넬의 법칙

스넬의 법칙(Snell's law)은 굴절에 관한 물리 법칙이다. 네덜란드의 수학자 빌러브로어트 스넬리우스(Willebrord Snellius)를 따라 이름 붙여졌다. 프랑스에서는 데카르트의 법칙(la loi de Descartes) 또는 스넬-데카르트의 법칙(la loi de Snell-Descartes)라고도 부른다.

입사각과 굴절각의 관계는 1621년에야 독일의 과학자인 스넬에 의해 처음으로 밝혀졌다. 그가 알아낸 법칙은 다음과 같다. 입사각을 θ_i 라 하고 굴절각을 θ_r 이라 했을 때, $\sin\theta_i$ 는 $\sin\theta_r$ 에 어떤 상수를 곱한 것과 같다.

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r$$

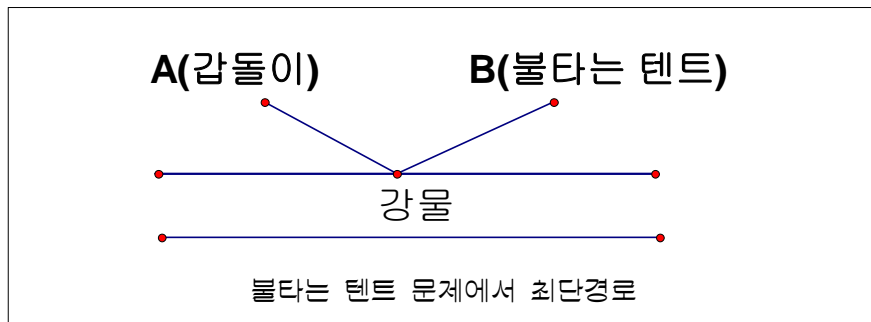
이 식을 ‘스넬의 법칙’ 또는 ‘굴절의 법칙’이라고 하며, 상수 n 을 굴절률이라고 한다. 물의 경우 n 값은 1.33이다.





풀어 보기

1. 좌표평면 위의 점 $P(2,3)$ 이 있고, 직선 $y=x$ 위에 점 A가 있다. 점 B의 좌표가 $(1, 3)$ 일 때, $\overline{PA} + \overline{AB}$ 의 최솟값을 구하시오.
2. 갑돌이는 야영을 갔다가 갑자기 텐트가 불타는 장면을 목격하였다. 그래서 그는 강물을 길어서 불을 끄려면 가장 빠른 길로 가는 것이 최선이라고 판단하였다. 그런데 그 순간 갑돌이 머릿속에는 또 다른 생각이 들었다. 단순히 거리의 합이 최소가 되는 것만이 아니라 물을 들고 달리면 속도가 떨어지므로 물을 들고 가는 거리가 짧아야 할 텐데... 그래서 그는 대충 감으로 물을 들고 가는 길이 짧은 쪽으로 선택하여 불을 껐다. 불을 끈 후에 그는 이 문제의 올바른 답이 무엇일까 고민하였지만 쉽게 떠오르지 않았다. 아래 그림과 같은 상황에서 갑돌이가 가장 빠른 시간에 불을 끌 수 있는 경로는 무엇일까? 단, 갑돌이가 그냥 달릴 때 속도는 v_1 이고 물을 들고 달리는 속도는 v_2 로 일정하다고 가정한다.



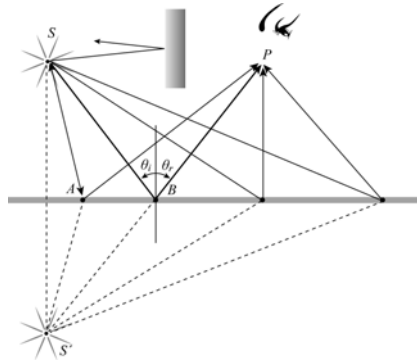


입기 자료

➔ 페르마의 원리와 반사와 굴절의 법칙

(1) 헤론의 최단경로의 원리와 반사의 법칙

고대 그리스의 헤론은 ‘빛이 어떤 점 S 에서 다른 점 P 로 움직일 때 빛은 최단경로로 진행한다.’ 라는 최단경로의 원리를 이용하여 반사의 법칙을 설명하였다. 점광원 S 에서 나온 여러 광선이 반사되어 점 P 로 갈 때, 광선들이 S' (S 의 상)에서 나온다고 하면 S' 에서 P 까지의 최단경로는 S' 와 P 를 직선으로 연결한 광선이 될 것이다. 이 경우 삼각형의 합동조건으로부터 $\theta_i = \theta_r$ 임을 알 수 있으며, 이것으로 반사의 법칙을 설명할 수 있다. 헤론의 최단경로의 원



리는 빛의 반사의 법칙은 설명할 수 있으나 굴절의 법칙은 설명할 수 없다. 1657년 페르마는 ‘광선이 지나는 두 지점 사이의 실제 경로는 최소시간 동안 통과하는 경로이다’ 라는 최소시간의 원리(principle of least time)를 제안한다. 페르마의 최소시간의 원리는 같은 매질에서 빛이 반사하는 경우 최단경로가 최단시간이므로 반사의 법칙을 설명할 수 있다.

(2) 최단시간의 원리와 굴절의 법칙

헤론의 최단경로 원리는 굴절의 법칙을 설명할 수 없으나 페르마의 최소시간의 원리로는 굴절의 법칙을 유도할 수 있다.

그림에서 S 에서 출발한 빛이 P 점에 도착할 때의 최단시간 경로를 미분을 이용하여 구해보자. 먼저 S 에서 P 점에 이르는 광선의 소요시간 $t(x)$ 를 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$t = \frac{SO}{v_i} + \frac{OP}{v_t} = n_i \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{c} + n_t \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{c}$$

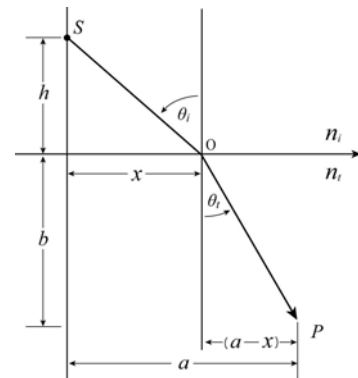
시간이 최소라는 것은 $t(x)$ 를 x 에 대해 미분한 값이 0 이므로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{xn_i}{c\sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)n_t}{c\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{x}{SO} n_i = \frac{(a-x)}{OP} n_t$$

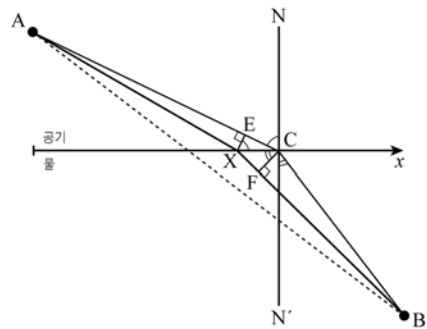
이 식에서 $\frac{x}{SO} = \sin\theta_i$, $\frac{(a-x)}{OP} = \sin\theta_t$ 이므로 스넬의 법칙 $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$ 을 얻을 수 있다.



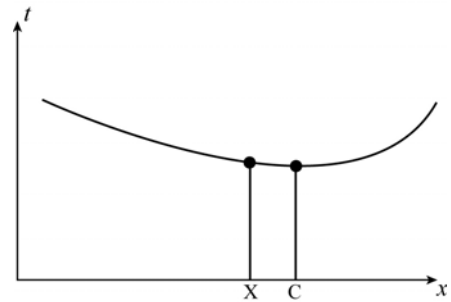


(3) 기하학적 해석을 이용한 굴절의 법칙

옆의 그림과 같이 공기 중의 A 점에서 출발한 빛이 물속의 B점에 갈 때, 최소시간 경로를 찾으려면 굴절의 법칙을 유도할 수 있다. 물속에서의 빛의 속도는 공기 중의 속도를 n 으로 나눈 값이라고 하자.



만일 경로 ACB 가 최소시간 경로라면, 여기서 조금만 벗어나도 소요 시간이 길어질 것이다. 이제 임의의 경로가 x 축과 만나는 지점을 X 라 하고, 빛의 진행 시간을 x 의 함수로 나타내어 그래프를 그려 보면 아래 그림과 같은 곡선이 얻어진다. $X=C$ 일 때 곡선은 최솟값을 갖는데, 곡선의 최소지점에서는 기울기가 0이기 때문에 그 근방에서 X 를 C 근처로 조금 이동해도 소요 시간에는 거의 차이가 없다. 그러므로 임의의 지점 X 를 잡은 후에, 이 위치를 아주 조금 이동시켰을 때 소요 시간의 변화가 나타나지 않는다는 조건을 부가하면 C 를 찾을 수 있다. 즉, 임의의 지점 X 를 잡아서 빛이 AXB 를 이동하는데 걸리는 시간을 계산한 후,



그 근방의 새로운 경로를 다시 잡아서 이전의 경로와 소요 시간을 비교하는 것이다. X 가 C 근처에 있으면 둘 사이의 시간차는 거의 0이다. 먼저, 공기 중에서의 경로를 살펴보자. X 에서 최소시간 경로에 내린 수선을 XE 라 하면, 공기 중에서 X 를 지나는 경로는 C 를 지나는 경로보다 \overline{EC} 만큼 짧다. 그러나 물속에서 수선 \overline{CF} 를 그려놓고

보면, X 를 지나는 경로가 C 를 지나는 경로보다 XF 만큼 길다. 그런데 방금 위에서 말한 바와 같이 C 를 지나는 경로는 최소시간 경로이고 X 는 C 와 아주 인접해 있으므로 두 경로의 소요 시간은 1차 근사 이내에서 같아야 한다. 또한, 물속에서 빛의 속도는 공기 중의 속도보다 $\frac{1}{n}$ 만큼 느리다고 했으므로, 이로부터 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\overline{EC} = n \cdot \overline{XF} \quad \overline{EC} = \overline{XC} \sin(\angle EXC) \quad \text{이고} \quad \overline{XF} = \overline{XC} \sin(\angle XCF) \quad \text{이므로}$$

$$\sin(\angle EXC) = n \sin(\angle XCF) \quad \text{이다. 여기에 } \angle EXC = \angle ECN = \theta_i, \quad \angle XCF = \angle BCN' = \theta_r$$

을 이용하면 $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$ 이다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

점 P 의 $y=x$ 대한 대칭점을 P' 을 (a,b) 라 놓자. 이때 $\overline{PP'}$ 의 기울기는

$$\frac{b-3}{a-2} = -1 \dots \textcircled{1}$$

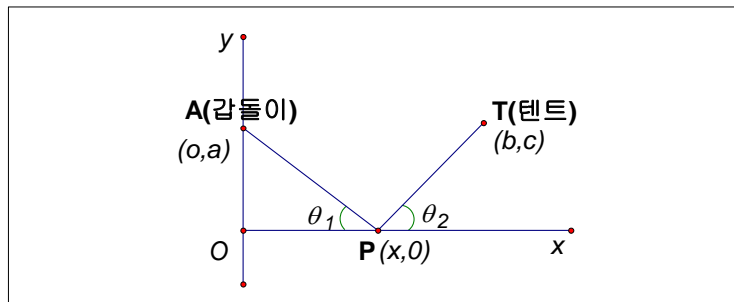
점 P 와 점 P' 의 중점 $(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2})$ 는 $y=x$ 위에 있다.

따라서 $\frac{3+b}{2} = \frac{2+a}{2} \dots \textcircled{2}$ 이다. $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의해 $P(3,2)$, 그러므로 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟

값은 $\overline{BP'}$ 이다.

따라서 $\overline{BP'} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

[풀어 보기 2]



위의 그림처럼 갑돌이 있는 위치를 A, 강물을 구하는 위치를 P, 텐트의 위치를 T라 하면, $A \rightarrow P \rightarrow T$ 로 가는 총시간을 $T(x)$ 라 하면

$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2}$ 이고 $T(x)$ 의 최솟값을 구하기 위하여 양변을 미분

하여 극솟값을 구하면 $T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{v_2 \sqrt{(b-x)^2 + c^2}} = 0$ 이다.

여기서 $\cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $\cos \theta_2 = \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}$ 이다.

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$ 가 되는 점 P를 찾아야 한다. 이것은 스넬의 법칙을 활용한 것이다.



[문제 3-i]

[제시문 3-가]의 페르마 원리에 의하여 빛이 움직이는 경로는 걸리는 시간을 최소로 하는 경로로 움직인다. 시간은 거리를 속력으로 나누면 얻어지므로 선분 \overline{PO} 의 길이를 속력 v_1 으로 나눈 것과 선분 \overline{OQ} 의 길이를 속력 v_2 로 나눈 것의 합을 최소가 되도록 하는 경로가 페르마의 원리에 의한 빛이 움직이는 경로다. 이러한 최솟값은 미분에 의해 구할 수 있는데 $P(0, a), O(x, 0), Q(b, c)$ 라 두면 이동하는데 걸리는 시간은 $t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$ 이 되고 최소시간을 구하기 위해서 미분을 하면

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{v_2\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$

따라서 $\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$ 인 x 에서 최솟값을 갖는다. 이 식을 정리

하면 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$ 를 만족하는 x 를 지나게 된다.

[문제 3-ii]

만약에 호수의 경계면이 평평하다고 가정하고 P 위치에 모래사장에 있는 사람이, Q의 위치에 호수에 빠진 다른 사람이 있다고 하면 이 사람을 최단시간에 구출하기 위해서는 이동하는데 걸리는 시간이 최소가 되는 경로를 따라서 이동해야 한다. 그러므로 P에서 호수와 땅의 경계면 위의 점 O까지의 거리를 모래 위에서 뛰는 속도로 나눈 것과 O에서 Q까지의 거리를 호수에서 수영하는 속도로 나눈 것을 합한 것이 최소가 되는 경로를 따라 움직여야 최단시간에 구출할 수 있을 것이다. 즉 v_1 을 모래 위에서 뛰는 속도라 하고, v_2 를 호수에서 수영하는 속도라 할 때, 스넬의 법칙과 같이 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$ 를 만족하는 경로를 지나야 한다. 예를 들어 뛰는 속도가 수영하는 속도보다 빠르다면 $v_1 > v_2$ 이고 따라서 $\theta_1 > \theta_2$ 를 만족한다. 그러므로 뛰는 속도가 수영하는 속도보다 빠르다면 [그림 1]과 같은 경로로 이동하면 최단시간 안에 그 사람을 구출 수 있다.

[답안 작성시 유의점]

- ① 빛이 움직이는 경로는 걸리는 시간을 최소로 하는 경로에서 시간, 거리, 속력 간의 관계 설정을 분명히 서술하도록 한다.(시간은 거리를 속력으로 나누면 얻어지므로 선분 \overline{PO} 의 길이를 속력 v_1 으로 나눈 것과 선분 \overline{OQ} 의 길이를 속력 v_2 로 나눈 것의 합)
- ② 미분을 이용한 최솟값을 구하는 원리를 분명히 밝히도록 한다.



7

숙명여자대학교 수시

제시문

각종 데이터베이스, 주식 시세표, 인구 통계, 회계 자료 등의 통계 자료에 나타나는 수들의 첫째 자리의 숫자를 살펴보면 독특한 패턴을 발견할 수 있다.

어떤 수 x 의 첫째 자리의 숫자를 d 라고 했을 때, 부등식 $d \times 10^n \leq x < (d+1) \times 10^n$ 이 성립하고, 10을 밑으로 하는 로그를 이용하면 이 부등식은 $n + \log_{10}d \leq \log_{10}x < n + \log_{10}(d+1)$ 이 된다. 이 부등식에서 $\log_{10}x$ 의 소수 부분은 $\log_{10}d$ 보다 크거나 같고 $\log_{10}(d+1)$ 보다 작다.

$\log_{10}x$ 의 소수 부분을 k 라 하자. 이때 k 는 확률변수로 생각할 수 있으며 0과 1 사이에 있다. 또한 확률변수 k 가 균등하게 분포되어 있다고 가정하면 k 가 0과 1 사이의 특정 구간에 있을 확률은 그 구간의 길이에 비례한다. 이로부터 x 의 첫째 자리의 숫자가 d 가 될 확률 $P(d)$ 는 다음의 식으로 표시할 수 있다.

$$P(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

이 식에 따르면 첫째 자리의 숫자가 3일 확률은 약 12.5%, 6일 확률은 약 6.7% 정도가 된다. 이처럼 어떤 수의 첫째자리의 숫자가 1에서 9까지의 특정한 숫자일 확률이 모두 같을 것이라는 예상과는 달리, 실제로는 각기 다르게 나타난다는 것을 알 수 있다. 실제 인구 통계 자료에 나타난 3,261개의 수에서 그 첫째자리 숫자를 확인한 결과는 다음 표와 같다.

첫째자리의 숫자	1	2	3	4	5	6	7	8	9
빈도	1,105	665	463	264	235	202	134	121	72

(5-1) 다음 표의 ①, ②의 값을 구하는 과정과 그 값을 쓰시오.

(단, $\log_{10}2 = 0.301$, $\log_{10}3 = 0.477$ 로 한다.)

첫째 자리의 숫자(d)	1	2	3	4	5
$P(d)$	0.301	①	0.125	0.097	②

(5-2) 어떤 수의 둘째자리의 숫자가 2일 확률이 $\log_{10}X$ 일 때, X 를 구하는 과정과 그 값을 쓰시오.

(5-3) 제시문에서 알 수 있는 사실을 이용하여 회계 자료나 세금 자료의 조작 여부를 판별하는 방법을 서술하시오.



제시문 분석

임의의 양의 실수 x 의 첫째자리가 d 라 하면 $d \times 10^n \leq x < (d+1) \times 10^n$ 과 같이 쓸 수 있고 $\log_{10} x$ 의 가수는 확률변수가 될 수 있음을 이야기 하고 있다. 이 때 x 의 첫째자리가 d 가 될 확률을 x 가 포함되는 구간의 길이 $\log_{10}(1+d) - \log_{10}d = \log_{10}(1 + \frac{1}{d})$ 로 표시됨을 설명하고 있다

논제 분석

① 상용로그의 계산을 할 수 있는가?

제시문에 주어진 식을 이용하여 표의 데이터를 대입하여 상용로그의 계산을 할 수 있음을 보여 준다

② 제시문에 주어진 식을 이용하여 일반적인 식으로 응용할 수 있는가?

일의 자리에 적용했던 식 $d \times 10^n \leq x < (d+1) \times 10^n$ 을 적용하여 둘째자리에 2가 오는 확률식을 구하고 더 나아가 모든 자리에 0에서 9까지의 숫자가 오는 확률까지도 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

① 상용로그와 상용로그 지표, 가수

10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며, 밑 10을 생략하여 $\log N$ 으로 표현한다. 상용로그의 값은 정수부분과 소수부분을 나누어 지표와 가수라 하는데

$\log N = 10^n \times a$ (단, n 은 정수, $1 \leq a < 10$)일 때,

$$\log N = \log(10^n \times a) = n + \log a \quad (0 \leq \log a < 1)$$

에서 정수 n 을 $\log N$ 의 지표, $\log a$ 를 $\log N$ 의 가수라 한다.

② 통계적 확률

일정한 조건 밑에서 시행을 n 번 반복하였을 때, A 라는 사건이 r 번 일어났다고 하자. n 을 충분히 크게 할 때, 상대도수 $\frac{r}{n}$ 이 일정한 값 p 에 한없이 가까워지면,

즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = p$ (일정한 값)일 때, p 를 사건 A 가 일어날 확률이라 하고 $P(A) = p$ 라

둘 수 있다. 이를 사건 A 의 통계적 또는 경험적 확률이라 한다.



풀어 보기

1. $\log_2 14$ 의 소수 부분을 $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ 라 할 때, 2^α 의 값을 구하시오.
2. 어떤 농산물은 중간 상인을 한 번 거칠 때마다 일정한 비율로 그 가격이 인상된다고 한다. 중간 상인을 5번 거쳐서 소비자에게 판매되는 가격이 원산지 생산 가격의 4.05배가 되었다. 이제 유통 과정을 개선하여 중간 상인을 2번 거치게 하면 소비자에게 판매되는 가격은 종전의 소비자 가격의 몇 %나 되는지 구하시오.

x	1.62	1.75	2.43	2.54	4.05	8.10
$\log_{10} x$	0.2095	0.2430	0.3856	0.4050	0.6075	0.9085

3. 다음 세 조건을 동시에 만족시키는 양의 실수 x, y 가 있다. 이 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하시오.

- I. $\log_{10} x^2 y^3 = 12.5$ 이다.
- II. x 와 y 의 상용로그의 지표는 같다.
- III. x 와 $\frac{1}{y}$ 의 상용로그의 가수는 같다.



일기 자료

→ 로그의 실생활 활용

(1) 리히터 규모 1 차이는 에너지 32배

우리나라는 물론 세계 각지에서 발생하는 지진의 소식을 접할 때 꼭 따라붙는 용어가 있다. 그것은 바로 리히터 규모라는 말이다. 물론 리히터 규모 말고도 진도라는 표현을 쓰기도 한다.

진도는 지진에 대한 인간의 반응과 지진에 의한 피해의 정도를 기준으로 지진의 크기를 정한 오래된 척도다. 진도를 나타내는 방법은 여러 가지가 있

는데, 우리나라에서 이용하는 일본 기상청 진도 계급은 0부터 7까지 8등급으로 나뉘어져 있다. 예를 들어 진도 2는 창문이 약간 흔들리는 정도를, 진도 3은 유리창이 가볍게 흔들리거나 찻잔이 약간 덜그럭거릴 정도의 지진을 말한다.

그런데 진도는 각 지점에서 지진의 세기를 나타내기 때문에 똑같은 지진이라도 지역에 따라 다르다. 따라서 지진을 분류할 때는 지진 자체의 크기를 어떤 척도에 따라 정량적으로 나타낼 필요가 있다. 이를 위해 현재 보편적으로 이용하는 방법이 1935년 리히터가 개발한 척도인 규모(magnitude)다. 지진의 규모는 진원지에서 100km 떨어진 지점에서 지진계로 측정된 지진파의 최대 진폭에 따라 결정되는데, 지진파의 최대 진폭은 지진에 따라 대단히 큰 차이를 보인다. 이런 차이를 알기 쉽

게 축소해 나타낸 것이 로그다. 지진파의 최대 진폭이 A 미크론($1\text{미크론} = \frac{1}{1000}\text{mm}$)

인 지진의 규모 M 은 상용 로그를 이용해 $M \log_{10} A (= M \log A)$ 으로 정한다.

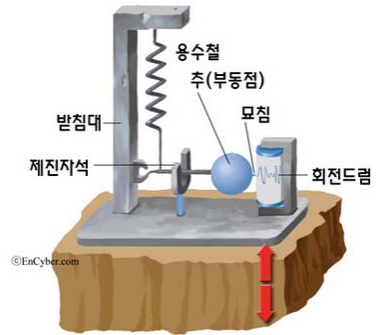
그러므로 지진의 최대 진폭이 10배씩 커질 때마다 지진의 규모는 1.0씩 증가한다($\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log 10^2 = 2, \dots, \log 10^n = n$). 그리고 지진의 규모(M)와 지진에 의해 발생하는 에너지(E) 사이에는 $\log E = 11.4 + 1.5M$ 라는 관계가 성립한다. 지진 규모의 값이 1 증가하면 에너지는 약 32배로 증가한다는 것을 의미한다.

$$10^{1.5} \approx 31.6227 \approx 32$$

(2) 자동차 내부 소음은 표준음의 1억 배

언제부터인가 도심의 전광판에는 소음 공해의 심각성을 보여주기 위해서 80데시벨(dB) 또는 100dB과 같은 수치가 등장했다. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기와 비교해서 나타낸다. 표준음(진동수 1천Hz)은 정상적인 청각을 지닌 사람이 겨우 들을 수 있는 소리로 그 세기는 1m^2 면적당 약 10-12W의 에너지를 나타낸다($10\text{-}12\text{ W/m}^2$). 표준음의 세기를 I_0 라 하고 어떤 소리의 세기를 I 라고 할 때, 이 소

리의 세기를 데시벨로 환산한 수치 L 은 상용로그를 이용해서 구한다($L = 10 \log \frac{I}{I_0}$).





일반적으로 대화를 나눌 경우가 60dB이고, 조용한 방은 30dB 정도가 된다. 자동차 내부에서 느끼는 소음의 정도인 80dB의 소리는 표준음의 세기의 1억 배(10^8)이고, 전기톱 소리를 나타내는 100dB의 소리는 1백억 배를 의미한다. 이 소리들이 얼마나 큰 소음인지 짐작할 수 있다.

(3) 산성, 염기성 알려주는 수소이온농도, pH

대기 오염의 결과로 산성비가 내리고, 토양이 산성화되고 있다는 소식을 종종 듣는데 이 때 pH4.5 pH5.2와 같은 수치를 접하게 된다. 또 비누 선전에도 pH가 등장한다. 이런 수치는 용액 속의 수소이온농도를 측정해서 얻는다. 그런데 수소이온농도는 용액에 따라 대단히 큰 차이를 보이기 때문에, 이를 상용로그를 이용해서 수소이온 지수(pH)로 바꾸어 0부터 14까지의 수로 나타낸다. 1L의 용액 속에 있는 수소 이온의 그램 이온수를 나타내는 수소이온농도 $[H^+]$ 를 pH로 바꾸는 공식은 $pH = -\log [H^+]$ 이다. 만약 수용액 중에 수소 이온이 $1.0 \times 10^{-7} g$ 있다면 이때의 pH는 7이다. pH가 7인 용액은 중성, 7보다 작으면 산성, 7보다 크면 염기성이다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

$\log_2 2^3 < \log_2 14 < \log_2 2^4$ 이므로 $\log_2 14$ 정수부분은 3이다.

$$\therefore \alpha = \log_2 14 - \log_2 8 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore 2^\alpha = 2^{\log_2 \frac{7}{4}} = \frac{7}{4} = 1.75$$

[풀어 보기 2]

원산지 생산 가격을 a (원), 중간 상인을 1번 거칠 때마다의 인상률을 r 이라 하면 $a(1+r)^5 = a \times 4.05$ 따라서 $(1+r)^5 = 4.05$

$$\therefore \log_{10} (1+r) = \frac{1}{5} \log_{10} 4.05 = 0.1215$$

유통과정 개선 후의 소비자 가격 p 는 $p = a(1+r)^2$ 이므로

$$\log_{10} p = \log_{10} a + 2 \log_{10} (1+r) = \log_{10} a + 0.2430 = \log_{10} a + \log_{10} 1.75 = \log_{10} 1.75a$$

$$\therefore p = 1.75a$$

따라서, $\frac{(\text{나중 가격})}{(\text{중전 가격})} = \frac{1.75a}{4.05a} \doteq 0.432$ 즉, 약 43%에 해당된다.

[풀어 보기 3]

II에서 $\log x = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$), $\log y = n + \beta$ (n 은 정수, $0 \leq \beta < 1$)라 하면 $\log \frac{1}{y} = -\log y = -n - \beta = -n - 1 + 1 - \beta$ 이므로 $\log \frac{1}{y}$ 의 가수는 $1 - \beta$ 이다. 따라서 III에 의해서 $\alpha + \beta = 1$ 이다. 한편 I에서 $2(n + \alpha) + 3(n + \beta) = 12.5$
 $5n + 2 + \beta = 12.5$ 이므로 $n = 2$, $\beta = \frac{1}{2} = \alpha$ 이다.

$$x = 10^{\frac{5}{2}}, y = 10^{\frac{5}{2}} \quad \therefore \frac{x}{y} = 1$$

[5-1]

$$P(2) = \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \log 3 - \log 2 = 0.477 - 0.301 = 0.176 \text{ 이고, 같은 방법으로}$$

$$P(5) = \log \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \log 6 - \log 5 = \log 3 + 2 \log 2 - 1 = 0.079 \text{ 가 된다.}$$

(단, 로그의 밑 10은 생략)



[5-2]

어떤 수의 둘째자리의 수가 2일 경우는

- 첫째자리의 수가 1이고 둘째자리의 수가 2인 경우,
- 첫째자리의 수가 2이고 둘째자리의 수가 2인 경우,
- 첫째자리의 수가 3이고 둘째자리의 수가 2인 경우,
- ⋮
- 첫째자리의 수가 9이고 둘째자리의 수가 2인 경우

와 같이 9가지가 있다.

첫째자리의 수가 1이고 둘째자리의 수가 2인 숫자를 x 라 하면

$$1.2 \times 10^n \leq x < 1.3 \times 10^n$$

가 되고 제시문과 같이 각 항에 로그를 취하여 확률을 구하면 첫째자리의 수가 1이고 둘째자리의 수가 2가 될 확률은

$$\log 1.3 - \log 1.2 = \log \frac{13}{12}$$

이 된다. 같은 방법으로 첫째자리의 수가 2이고 둘째자리의 수도 2인 경우, 첫째자리의 수가 3이고 둘째자리의 수가 2인 경우, ..., 첫째자리의 수가 9이고 둘째자리의 수가 2인 경우의 확률을 각각 구해보면 다음과 같다.

$$\log \frac{23}{22}, \log \frac{33}{32}, \dots, \log \frac{93}{92}$$

구할 확률은 확률의 합의 법칙에 의해서 이들 확률의 합이므로 어떤 수의 둘째자리의 수가 2일 확률은

$$\log \frac{13}{12} + \log \frac{23}{22} + \log \frac{33}{32} + \dots + \log \frac{93}{92} = \log \frac{13 \times 23 \times 33 \times \dots \times 93}{12 \times 22 \times 32 \times \dots \times 92}$$

이 된다. 따라서

$$X = \frac{13 \times 23 \times 33 \times \dots \times 93}{12 \times 22 \times 32 \times \dots \times 92}$$

이다. (단, 로그의 밑 10은 생략)

[5-3]

제시문에서 알 수 있듯이 불규칙적일 것 같은 회계 자료나 세금 자료도 각 자릿수가 어느 정도의 의미 있는 확률값을 가지고 각 자리가 다르게 나타나고 있다. 그렇다면 위의 제시문에 나와 있는 각 자리수의 확률식을 대입해 보면 회계 자료와 세금 자료가 조작이 되었는지 아닌지의 여부를 판별할 수 있을 것이다. 일례로 위의 제시문에서 1이 첫째자리에 올 빈도와 9가 첫째자리에 올 빈도는 10배 이상의 차이가 난다. 첫째자리 수뿐만 아니라 둘째자리 수 셋째자리수의 확률을 계속해서 확인한다면 조작 여부를 더 정확히 확인할 수 있을 것으로 생각된다.



8

아주대학교 예시 문항 (1)

제시문

제시문 1-1

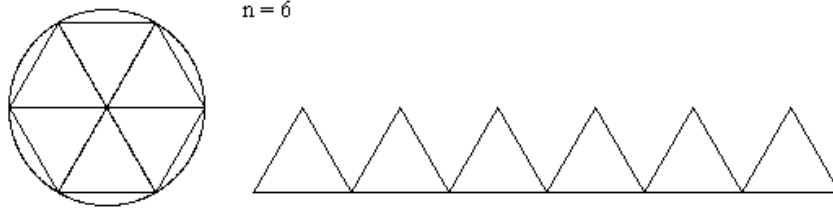
고대 그리스 최대의 수학자이며, 물리학자였던 아르키메데스는 고대 그리스의 식민지 시칠리아의 시라쿠사에서 천문학자인 피디아스의 아들로 태어났다. 당시 학문의 중심지였던 이집트의 알렉산드리아에 있는 왕립학교에서 공부한 그는 특히 이론과 실험 모두에 능했다고 한다.

지중해의 패권을 둘러싼 3차에 걸친 로마와 카르타고의 전쟁 중 제 2차 포에니 전쟁 때 시라쿠사는 카르타고의 편을 들어 로마 군의 공격을 정면으로 받게 되었다. 이 때, 아르키메데스는 이미 70세를 넘은 고령이었지만, 투석기와 기중기 등 지렛대를 응용한 신형무기를 고안하여 로마의 대군을 크게 괴롭혔다. 시라쿠사가 함락되던 날, 그는 죽는 순간까지도 단순한 기술자가 아닌 기하학자로서의 면모를 보여 주었다. 그날 아르키메데스는 뜰의 모래위에 도형을 그리며 기하학의 연구에 모두하고 있던 중, 다가오는 사람 그림자가 로마 병사인 줄도 모르고 “물러서거라, 내 도형이 망가진다”고 외쳤다. 그러나 로마 병사는 그를 몰라보고 그의 목을 내려침으로써 그는 생을 마감하게 된다. 생전 아르키메데스는 기하학의 증명, 특히 원과 구에 대한 문제를 좋아했다고 하며, 그의 비석에는 구와 원기둥의 모양이 새겨져 있다. 아르키메데스는 구와 원기둥의 부피와 넓이에 관한 발견을 가장 중요하고 아름다운 업적으로 여겼다고 한다. 구와 원기둥을 좋아한 이유는 무엇일까?

제시문 1-2

잘 알려진 바와 같이 수 π 는 “원의 둘레/지름”으로 정의 된다. 따라서 반지름이 r 인 원의 둘레 C 에 대한 공식 $C=2\pi r$ 이 성립한다. 원의 넓이는 어떻게 구할 수 있을까? 원의 넓이를 표현하기 위하여 새로운 수를 정의할 필요는 있을까? 아르키메데스는 이 질문에 능숙하게 접근하였다. 원주와 반지름을 이용하여 원의 넓이에 대한 적당한 부등식을 얻고 이를 통하여 원의 넓이를 구한 것이다.

반지름이 r 인 원의 넓이에 대한 한 부등식은 원에 내접하는 정 n -각형으로부터 얻어진다. 이 다각형은 원의 중심에서 만나는 n 개의 합동인 삼각형으로 분해할 수 있다. 아래 그림은 $n=6$ 인 경우를 보여주고 있다.



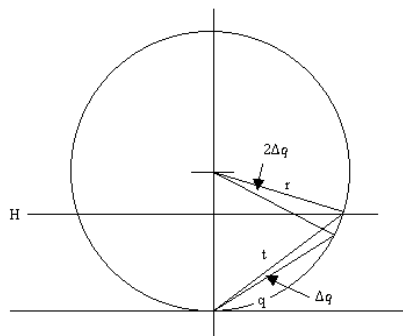
이 삼각형의 바깥쪽 선분들은 원의 둘레를 근사하게 된다. 선분은 주어진 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선이므로 이 바깥쪽 선분들의 합은 원의 둘레보다 작다. 바깥쪽 선분을 밑변으로 한 삼각형들의 높이는 원의 반지름보다 짧다. n 이 점점 커짐에 따라 바깥쪽의 선분들의 길이의 합은 원의 둘레에 한없이 가까워지며 높이는 반지름에 한없이 가까워진다. 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot (\text{밑변}) \cdot (\text{높이})$ 이므로 다각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot (\text{밑변의 합}) \cdot (\text{높이})$ 이다. 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 에 한없이 가까운 원에 내접하는 정 n 각형을 고려하면 원의 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 보다 작을 수 없음을 알 수 있다.

내접하는 정 n 각형 대신 외접하는 정 n 각형을 고려하면 비슷한 방법으로 원의 넓이가 $\frac{1}{2}rC$ 보다 클 수 없음을 알 수 있다.

이로부터 원의 넓이는 $\frac{1}{2}rC$ 가 됨을 알 수 있다. 원주의 길이에 대한 공식 $C=2\pi r$ 로부터 원의 넓이 A 에 대한 공식 $A=\pi r^2$ 을 얻는다.

제시문 1-3

이제 구에 대한 문제로 넘어가자. 구면의 넓이는 어떻게 주어지는가? 아르키메데스는 보다 일반적인 질문에 대한 답을 제시하였다. 이는 구면을 평면으로 잘라서 얻어진 부분의 넓이를 일반적으로 기술하는 것이다. 구체적으로, 평면에 의하여 잘린 구면 부분의 넓이는 영역의 중심으로부터 잘려서 생긴 원의 둘레에 이르는 거리를 반지름으로 갖는 원의 넓이와 같다는 것이다.





이를 증명하기 위하여 구면을 수평의 평면으로 자른 측면도를 살펴보자. 아르키메데스의 결과는 평면 H 아래쪽의 넓이가 반지름 t 인 원의 넓이와 같다는 것이다. 이 사실은 H 가 구면의 아래쪽에 접한다면 당연히 성립한다. 우리는 H 의 높이(또는 각 q)에 대한 넓이의 변화율을 이용하여 아르키메데스의 결과를 보이려고 한다. 원의 넓이를 이용하여 계산한 넓이의 공식을 $A(q)$, 구면의 넓이를 $S(q)$ 라고 하자.

㉠ 우선 $t = 2r \sin q$ 이다. 미분의 공식을 적용하여 $\frac{dt}{dq} = 2r \cos q$ 를 얻고 이로부터, 다음 식을 얻을 수 있었다.

$$\frac{dA}{dq} = 4\pi r t \cos q$$

평면에 의하여 잘려진 구면의 넓이가 각의 변화 Δq 에 따라 어떻게 변화하는지를 살펴보자. ㉡ 각이 Δq 만큼 변화하면 구의 중심으로부터 각의 변화는 $2\Delta q$ 가 된다. 각 $2\Delta q$ 에 대응하는 호의 길이는 $2r\Delta q$ 이 되고 이는 각의 변화에 대응하는 잘려진 띠 모양의 구면의 영역의 너비에 해당한다. 띠 모양의 둘레는 $2\pi t \cos q$ 로 근사되므로 넓이의 변화량에 대한 다음 근사식을 얻고

$$\Delta S = 4\pi t \cos q \Delta q$$

이로부터 다음 결론을 얻는다.

$$\frac{dS}{dq} = 4\pi t \cos q$$

한편, 평면이 구면의 아래에 접하는 경우는 당연히 $A = S = 0$ 이므로 $A(q) = S(q)$ 임을 알 수 있다. 특별히 평면 H 를 구면의 위쪽 끝점과 접하도록 잡으면 구면의 넓이 $4\pi r^2$ 을 얻게 된다. 이는 아르키메데스가 가장 중요하게 생각한 결과 중 하나인데, 구면의 넓이가 동일한 반지름을 가진 원의 넓이의 4배가 되기 때문이다. 물론, 오늘날에는 초등학교들도 이 결과를 알고 있지만 이 사실이 알려지지 않은 시대의 이 발견은 아름답다고 할 수 밖에 없다.

원기둥은 어디에 등장하는가? 밑면의 반지름이 r 이고 높이가 $2r$ 인 원기둥의 옆넓이는 $(2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$ 이므로 이는 내접하는 구면의 넓이와 같다. 아르키메데스는 넓이가 일치할 뿐 아니라 원기둥에 수직인 평면으로 잘린 넓이들이 같음을 보인 것이다.



[문제 1-1] 반지름이 r 인 원에 내접하는 정 n -각형과 외접하는 정 n -각형의 넓이를 각각 구하라. (10점)

[문제 1-2] 제시문의 내용을 이용하여 다음 식이 성립함을 보여라. (10점)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{\pi}{n} = \pi$$

[문제 1-3] 제시문의 밑줄 친 ㉠, ㉡ 부분을 간략히 설명하라. (10점)

[문제 1-4] 다음 영역의 넓이를 구하라. (10점)

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4^2, -2 \leq x + 2y + 2z \leq 4\}$$

[문제 1-5] 반지름 R 인 구면의 북극으로부터 높이 h 인 곳에서 구면을 바라보면 보이는 부분의 넓이는 얼마인가? (10점)



제시문 분석

- ① [제시문 1-1]에서는 아르키메데스의 생애와 업적을 간략히 소개하고, 특히 그가 원과 구에 대한 문제에 관심을 가졌음을 밝히고 있다.
- ② 아르키메데스가 원주와 반지름을 이용하여 원의 넓이에 대한 부등식을 얻고 이를 통해 원의 넓이를 구한 과정을 설명하고 있다. 즉, 원에 내접하는 정- n 각형을 n 개의 합동인 삼각형으로 쪼개면 이 삼각형의 바깥쪽 선분들이 원의 둘레에 가까워지고 이 삼각형의 높이는 원의 반지름에 가까워진다는 것을 이용하여 얻은 부등식과 외접하는 정- n 각형을 이용하여 마찬가지로 방법으로 얻은 부등식을 이용하여 원의 넓이가 πr^2 일 수밖에 없음을 설명하고 있다.
- ③ 평면에 의해 잘린 구면 부분의 넓이는 영역의 중심으로부터 잘려서 생긴 원의 둘레에 이르는 거리를 반지름으로 갖는 원의 넓이와 같다는 사실을 넓이의 변화율을 이용하여 증명하고, 특히 평면이 구면의 위쪽 끝점과 접하는 경우 구면의 넓이가 $4\pi r^2$ 임을 설명하고 있다.



논제 분석

- ① 원에 내접하는 정- n 각형과 외접하는 정- n 각형의 넓이를 구할 수 있는가?
 원에 내접 또는 외접하는 정- n 각형을 n 개의 이등변삼각형으로 등분하면 그 밑변의 길이와 높이를 삼각비를 이용하여 나타낼 수 있다.
- ② 제시문의 내용을 이용하여 삼각함수의 극한값에 대한 내용을 설명할 수 있는가?
 원에 내접 또는 외접하는 정- n 각형의 넓이가 n 이 점점 커짐에 따라 원의 넓이에 가까이 간다는 제시문의 내용과 [문제1-1]에서 얻은 두 정- n 각형의 넓이의 식을 이용하여 설명할 수 있다.
- ③ 제시문에서 설명하는 구면의 넓이를 찾는 과정을 이해하고 논리적으로 설명할 수 있는가?
 원과 접선, 원주각과 중심각 등의 성질을 이용하여 구면의 접점으로부터 평면에 의해 잘린 원까지의 거리를 각에 대한 식으로 만들 수 있다. 또한 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기는 중심각의 크기의 반이라는 성질을 이용하여 각의 변화에 대한 내용을 설명할 수 있다.
- ④ 방정식으로 주어진 구면 일부의 넓이를 계산할 수 있는가?
 문제에서 제시한 방정식과 부등식은 평행한 두 평면에 의해 잘린 구면을 말한다. 적절한 그림을 그려 구의 접점으로부터 평면에 의해 잘려서 생긴 원까지의 거리를



계산하고 제시문에서 주어진 내용(평면 아래쪽의 구면의 넓이는 점점으로부터 평면에 의해 잘려서 생긴 원까지의 거리를 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다)을 이용하면 그 넓이를 계산할 수 있다.

⑤ 구의 외부에서 구를 바라보았을 때 보이는 부분의 넓이를 계산할 수 있는가?

구를 바라보았을 때 생기는 접점과 북극을 지나는 선이 북극에서 구의 중심에 그은 반지름과 수직인 직선과 이루는 각을 높이 h 에 관한 식으로 표현할 수 있다. 따라서 [제시문 1-3]의 내용을 바탕으로 구면의 넓이를 계산하면 된다.



배경지식 쌓기

① 삼각함수의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{단, } x \text{는 라디안})$$

② 원의 접선과 원주각, 중심각 사이의 관계

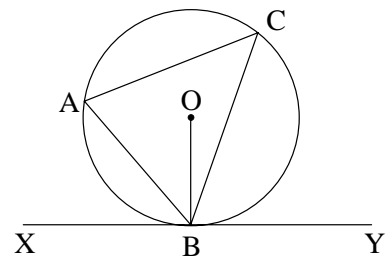
- 원 둘레 위에 세 점 A, B, P가 있을 때, $\angle APB$ 를 호AB(점 P가 속하지 않는 호)에 대한 원주각이라고 하고 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 같다.
- 원주각의 크기는 같은 호에 대한 중심각의 크기의 반이다.
- 반원에 대한 원주각은 직각이다.
- 원의 접선과 접점을 한 끝점으로 하는 현이 이루는 각은 그 현의 양 끝점을 공유하는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.



풀어 보기

1. 함수의 극한에 관한 성질을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 임을 증명하시오.

2. 오른쪽 그림에서 직선 XY는 원 O 위의 점 B에서의 접선이고 점 A, C는 원주 위의 점이다.
 $\angle ABX = \angle ACB$ 임을 증명하시오.





읽기 자료

➔ 아르키메데스의 업적 및 실생활에의 응용

아르키메데스는 부력의 원리, 원주율 π 및 그것을 이용한 원의 넓이, 구의 겹넓이, 구와 원기둥의 부피의 관계 등에 관한 많은 업적을 남겼다. 실생활에 많이 응용되는 아르키메데스의 원리들에는 다음과 같은 것이 있다.

1) 부력의 원리

① 잠수함

잠수함의 잠수 원리는 아르키메데스의 부력의 원리를 이용한 것으로, 한 물체의 일부 또는 전부가 어떤 액체 속에 잠겨 있으면 그 물체에 의해 밀려나온 액체의 중량과 크기가 같고 방향이 반대인 상향력(부력)이 그 물체에 걸리게 된다는 것이다. 즉, 잠수함은 바닷물 속에 잠수되어 있을 때 잠수함의 압력선체(사람이 활동하고 장비가 탑재되는 밀폐된 공간)의 체적만큼 가벼워지는데 이 부력이 잠수함의 무게와 같을 때 잠수함은 바닷물 속에서 뜨거나 가라앉지 않게 된다. 만약 이 상태에서 잠수함이 부력을 더 가지게 된다면 수면으로 떠오르게 될 것이다. 1620년도의 초기 잠수 개념으로는 밀폐된 함정 내에 가죽 격벽을 사용, 안쪽으로 이동시킴으로써 현측에 뚫린 관총구를 통해 물을 유입시켜 배를 무겁게 하여 잠수시키고 나사를 이용, 가죽 격벽을 밀어냄으로써 무게를 줄여서 부력을 가지도록 하였다. 현대 잠수함에서는 주로 공기탱크를 압력선체 외부에 설치하여 공기탱크 내에 물이 채워졌을 때 잠수함의 무게가 부력과 같아지도록 조정하고 수면으로 부상하기 위해 공기탱크 내에 압축공기를 공급하도록 하고 있다. 따라서 잠수는 공기탱크 내의 공기를 밖으로 배출할 수 있도록 공기탱크 상부에 있는 차단밸브를 열어서 이루어지며 이때 자유 충수구로 바닷물이 유입되어 공기탱크를 채우게 된다. 차단밸브의 개폐와 공기탱크 내로의 압축공기 공급은 압력선체 내에서 조작한다. 잠수함의 승선 인원 또는 장비가 추가되어 무거워질 경우 무거워진 만큼의 무게를 보상하기 위한 물탱크를 별도로 압력선체 내에 설치하여 물탱크 내의 물을 함 외로 배출하여 무거워진 무게를 조정한다.

② 놀이 시설

놀이공원 등에서 볼 수 있는 원형 보트는 스틸과 재미를 동시에 즐길 수 있는 놀이 시설이다. 이 원형 보트도 사실은 아르키메데스의 부력의 원리를 응용하여 만든 것이다. 원형 보트는 밑바닥이 평평하고 둥근 모양으로 수로의 폭이 넓으면 물이 느리게, 흐를 수로의 폭이 좁으면 물이 빠르게 흐른다. 보트가 물에 가라앉지 않고 뜨는 것은 바로 물이 물체를 떠받치는 힘인 부력 때문이다. 즉 물이 물체를 떠받치는 힘이 물체가 물에 가하는 힘보다 크기 때문에 원형 보트는 절대 뒤집히거나 곤두박질치지 않는다.



2) 지렛대의 원리

아르키메데스가 지구라도 움직여 보이겠다고 주장할 수 있었던 것은 바로 지렛대의 원리를 알았기 때문인데, 이 원리를 응용한 것이 바로 도르래이다. 도르래는 기본적인 기계요소들 가운데 하나로 바퀴에 기초를 두고 있다. 바퀴에 줄이나 벨트 또는 체인을 걸어 힘의 방향을 바꾸거나 힘의 효력을 확대할 수 있는 것이다.

① 엘리베이터

이러한 도르래를 이용한 것 중 하나가 바로 우리 주위에서 쉽게 찾아볼 수 있는 엘리베이터이다. 대부분의 사람들에게는 물체를 위로 끌어올리는 것보다 아래로 당기는 것이 더 쉽다. 고정 도르래는 운동의 방향을 바꿀 필요가 있는 기계에 쓰이는데 이 중 하나가 엘리베이터이다. 엘리베이터는 엘리베이터의 반대쪽에 평행추가 매달려 있어서 엘리베이터가 올라가면 평행추는 아래로 내려가며, 이 때 도르래의 밧줄을 당기는 데 드는 힘과 물체의 무게는 같다.

② 수원성

주위에서 볼 수 있는 오래된 건물들 역시 지렛대의 원리를 이용한 것이 많은데, 그 대표적인 예로 조선시대 정조 대왕 때에 건축된 수원성을 들 수 있다. 수원성은 조선시대 '성곽의 꽃'이라고 불리는데 1794년에 축조하기 시작하여 2년 반이나 걸려 1796년 완성되었다. 당시 수원성의 축조를 맡았던 정약용은(그가 아르키메데스의 원리를 서학을 통해 접했는지는 알 수 없지만) 축성 과정에서 전혀 새로운 차원의 개념을 도입하였다. 우선 작업 과정에서 인부들의 일정한 작업량에 따라 임금을 받을 수 있도록 하여 작업 능률을 올렸고, 자재를 운반하는 새로운 수레와 거중기라는 돌을 들어 올리는 첨단기계까지 고안해 냈다. 거중기뿐 아니라 녹로, 유형거 등을 고안하여 40근의 힘으로 25000근의 무게를 움직일 수 있게 된 것이었다. 이러한 기계들은 바로 아르키메데스의 '지렛대의 원리'와 일맥상통하는 것이다.

3) 원과 구의 원리

아르키메데스는 기하학 중에서도 특히 원, 구에 대하여 많은 고심을 하였고, 그 결과 원주율, 원의 넓이, 구의 겹넓이, 그리고 그가 죽는 순간까지 고심하던 구와 원기둥의 관계 등에 대하여 많은 법칙을 발견할 수 있었다. 이러한 법칙들을 정리하여 가던 중에 그는 지금의 축구공 모양과 비슷한 형태의 다면체는 정이십면체의 꼭짓점을 깎아서 만든다는 것을 발견하였다. 정이십면체의 열두 개 꼭짓점이 깎여서 열두 개의 정오각형이 되고, 정이십면체의 스무 개의 면은 깎여서 스무 개의 정육각형이 된다. 아르키메데스의 다면체 이론은 크리스털 등의 결정이론, 바이러스나 생명체 연구, 재료공학, 금속공학, 신소재 연구, 건축 이론 등이나, 예술 작품, 달력 제작, 주사위 등의 놀이 기구를 만드는 데에 많이 활용된다.

— 출처 : <http://home.ewha.ac.kr/~mkkim/sc/archimedes.htm>

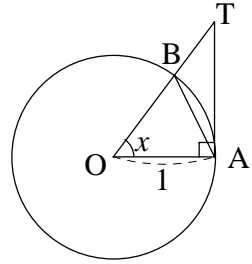


 예시 답안

[풀어 보기 1]

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O의 둘레 위에 $\angle AOB$ 의 크기가 x 라디안인 두 점 A, B를 잡고, 원 O 위의 점 A에서의 접선과 직선 OB가 만나는 점을 T라고 하자.



($\triangle OAB$ 의 넓이) < (부채꼴 OAB의 넓이) < ($\triangle OAT$ 의 넓이)

이므로 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$

따라서, $\sin x < x < \tan x$

그런데 $\sin x > 0$ 이므로 각 변을 $\sin x$ 로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

즉, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

여기서, $x \rightarrow +0$ 일 때 $\cos x \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

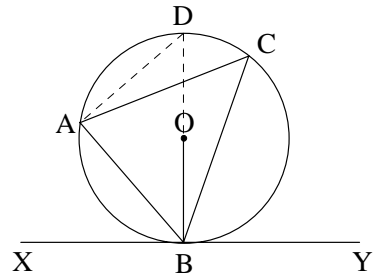
$x = -t$ 로 놓으면, $x \rightarrow -0$ 일 때 $t \rightarrow +0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

[풀어 보기 2]

(i) 오른쪽 그림과 같이 반지름 OB의 연장선이 원과 만나는 점을 D라 하면 \overline{BD} 는 원 O의 지름이므로 $\angle DAB$ 는 직각이다. 따라서 $\angle ADB = 90^\circ - \angle ABD$ 이다. 또, 점 B는 직선 XY와 원 O의 접점이므로 \overline{BD} 는 직선 XY와 수직이다. 따라서 $\angle ABX = 90^\circ - \angle ABD$ 이다. 그러므로 $\angle ADB = \angle ABX$ 이다.

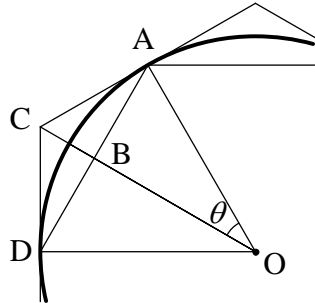


또한 같은 호에 대한 원주각이므로 $\angle ADB = \angle ACB$ 이다.

따라서 $\angle ACB = \angle ABX$ 이다.

**[문제 1-1]**

아래 그림과 같이 반지름이 r 인 원에 내접하는 정 n -각형과 외접하는 정 n -각형을 생각하자.



$\angle AOC = \theta$ 라 두면 $\theta = \frac{\pi}{n}$, $\angle OAC = \angle ABO = \angle R$ 이므로 $\overline{AD} = 2r\sin\theta$, $\overline{OB} = r\cos\theta$, $\overline{AC} = r\tan\theta$ 가 된다. 따라서 내접하는 정 n -각형의 넓이 S 는

$$S = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r\sin\theta \cdot r\cos\theta = nr^2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} \text{이다.}$$

또, 외접하는 정 n -각형의 넓이를 S' 라 하면

$$S' = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r\tan\theta \cdot r = nr^2 \tan\frac{\pi}{n} \text{이다.}$$

[문제 1-2]

n 을 점점 크게 하면 내접하는 정 n -각형의 한 삼각형의 높이 $\overline{OB} = r\cos\frac{\pi}{n}$ 는 반지름 r 에 한없이 가까이 가고, 내접하는 정 n -각형의 넓이 S 는 원의 넓이 πr^2 에 가까이 간다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} nr^2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \pi r^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \pi$$

마찬가지로 외접하는 정 n -각형의 넓이 S' 도 n 을 점점 크게 하면 원의 넓이 πr^2 에 가까이 가므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S' = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\frac{\pi}{n} = \pi r^2, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\frac{\pi}{n} = \pi$$

이다. 따라서

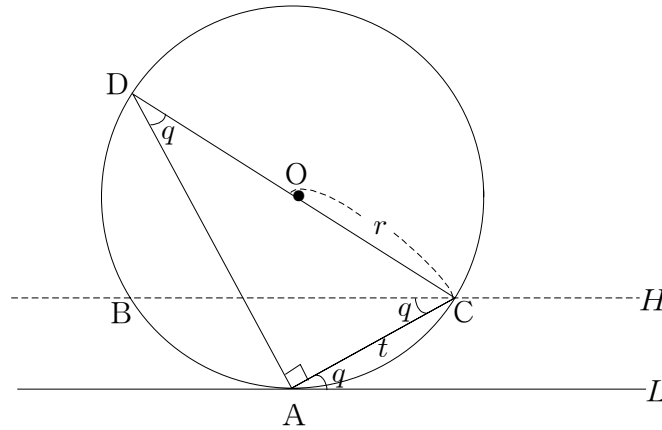
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\frac{\pi}{n} = \pi$$

가 된다.



[문제 1-3]

㉠

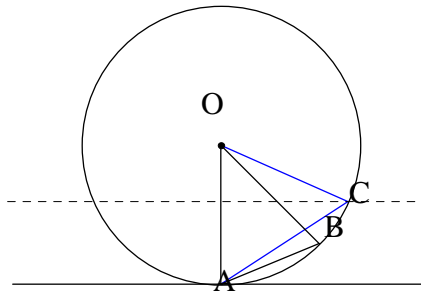


원 O와 직선 H가 만나는 점을 각각 B와 C, 원 위의 점 A에서 원에 그은 접선을 L이라 하자. 또 원의 한 지름을 CD라 하면 $\angle CAL = \angle BCA = q$ (\because 맞꼭지각)이고 $\widehat{AC} = \widehat{AB}$ 이므로 $\angle ADC = \angle BCA = q$ (\because 원주각)이다. $\angle DAC = \angle R$ 이므로 직각 삼각형 DAC에서

$$t = 2r \sin q$$

㉡ $\angle CAB = \Delta q$ 라 하면 $\angle BOC$ 는 호 BC에 대한 중심각이므로 $\angle CAB$ (호 BC에 대한 원주각)의 크기의 2배이다.

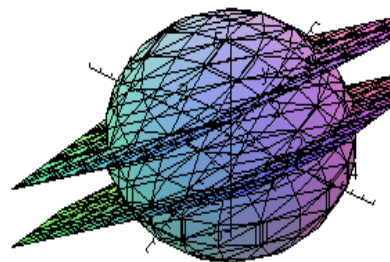
$$\therefore \angle BOC = 2\Delta q$$



[문제 1-4]

두 평면을 각각 $\alpha: x+2y+2z-4=0$, $\beta: x+2y+2z+2=0$ 라 두면 두 평면의 법선 벡터가 $(1, 2, 2)$ 로 같으므로 서로 평행하고, 구의 중심을 기준으로 서로 반대쪽에 있는 평면이다. 따라서 구하려는 영역은 오른쪽 그림과 같이 두 평면의 사이에 있는 구면의 넓이다.

구의 중심에서 평면 α 까지의 거리는 $\frac{4}{3}$ 이고 평면



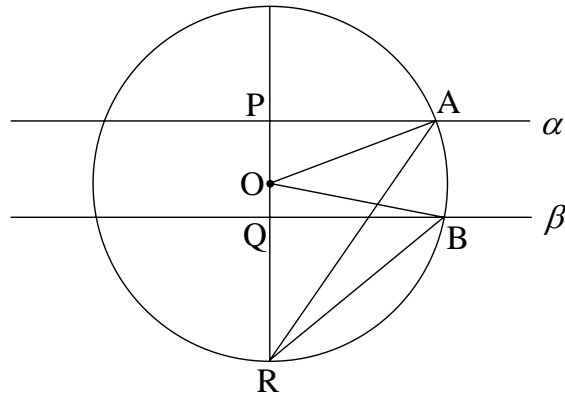


β 까지의 거리는 $\frac{2}{3}$ 이다. 즉 아래 그림에서

$$\overline{OP} = \frac{4}{3}, \overline{OQ} = \frac{2}{3}, \overline{QR} = \frac{10}{3}, \overline{OA} = \overline{OB} = 4 \text{ 이다.}$$

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AP} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ 이므로 $\overline{AR} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ 이다. 같은 방법으로

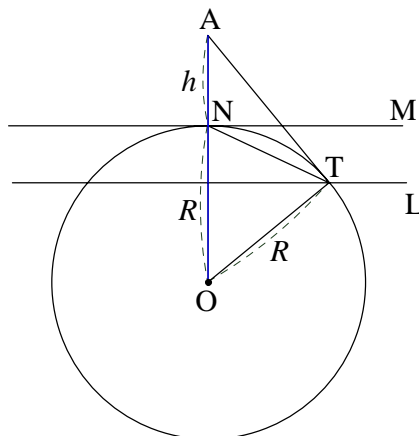
$$\overline{QB} = \frac{2\sqrt{35}}{3} \text{ 이므로 } \overline{BR} = \frac{4\sqrt{15}}{3} \text{ 가 된다.}$$



따라서 구하려는 구면의 넓이 S 는 평면 α 아래에 있는 구면의 넓이(선분 AR 을 반지름으로 하는 원의 넓이)에서 평면 β 아래에 있는 구면의 넓이(선분 BR 을 반지름으로 하는 원의 넓이)를 뺀 값이다.

$$\therefore S = \left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2 \pi - \left(\frac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2 \pi = 16\pi$$

[문제 1-5]



반지름이 R 인 구의 북극을 N 이라 하고 N 에서 높이 h 인 지점 A 에서 구에 그은 접선을 \overline{AT} , 접점 T 를 지나고 반지름 ON 에 수직인 평면을 L 이라 하면 점 A 에서 볼 수 있는 구면은 평면 L 의 위부분의 구면이고 이것은 [제시문 1-3]에 의해 \overline{NT} 를



반지름으로 하는 원의 넓이와 같다. 북극 N에서 원에 그은 접선을 직선 NM이라 하고 $\angle TNM = \alpha$ 라 하면 $\angle TON$ 은 2α 가 된다.

코사인 제2법칙에 의하여 $\overline{NT}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$ 이고,

$\triangle OAT$ 는 직각삼각형이므로 $\cos 2\alpha = \frac{R}{R+h}$ 이다.

즉, $\overline{NT}^2 = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) = 2R^2 \cdot \frac{h}{R+h} = \frac{2R^2h}{R+h}$ 이다.

따라서 \overline{NT} 를 반지름으로 하는 원의 넓이, 즉 반지름 R 인 구면의 북극으로부터 높이 h 인 곳에서 구면을 바라보면 보이는 부분의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \pi(\overline{NT})^2 = \frac{2R^2h\pi}{R+h}$$



9

아주대학교 예시 문항 (2)

제시문

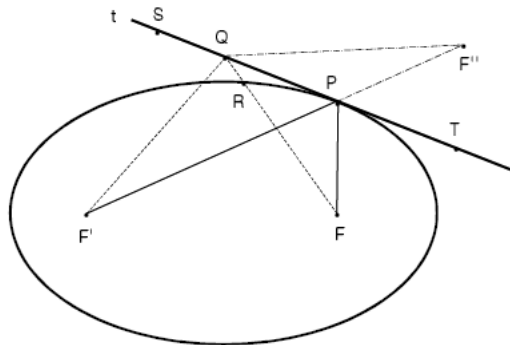
태양 둘레를 돌고 있는 행성들의 공전 궤도는 모두 타원이다. 공전 궤도가 타원인 것은 인공위성과 국제우주정거장(ISS)을 포함한 모든 위성들도 마찬가지다. 행성의 공전궤도가 태양을 한 초점으로 하는 타원인 것을 처음으로 밝힌 사람은 독일의 천문학자 케플러(Johannes Kepler, 1571~1630)이다. 그는 처음에는 행성의 공전 궤도가 원일 것으로 생각했으나 스승 티코 브라헤의 관찰 자료를 연구하여 화성의 공전 궤도가 타원임을 밝혔다. 우리는 흔히 찌그러진 원을 모두 타원이라 부르지만, 한 방향으로는 일정 비율로 늘어나면서 동시에 그와 수직인 방향으로는 일정 비율로 줄어들게 찌그러질 때에만 정확하게 타원이 된다. 타원은 원기둥이나 원뿔을 비스듬히 자른 단면에서도 나타난다.

기하학적으로는 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들로 이루어진 평면 위의 곡선을 타원이라 한다. 이 때 두 정점을 타원의 초점이라 하고, 두 초점을 지나는 직선이 타원에 의해 잘려진 선분을 장축, 장축의 수직이등분선이 타원에 의해 잘려진 선분을 단축이라 하며, 장축과 단축의 교점을 타원의 중심이라 한다. 그리고 장축과 단축의 끝점을 타원의 꼭짓점이라 한다.

초점이 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 이고 두 초점으로부터 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 된다 (단, $b^2 = a^2 - c^2$). 그리고, 이 타원 위의 한

점 (x_1, y_1) 에서 그은 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이 된다.

타원은 중요한 광학적 특성을 가지고 있다. 타원의 한 초점에서 퍼져나간 빛이 타원에서 반사되면 다른 초점에 모이게 된다. 이와 같은 성질은 타원 위의 임의의 점에서 그은 접선에 대해 접점과 각 초점을 연결하는 직선이 이루는 각이 같기 때문이다.





위 그림에서 F, F' 는 타원의 두 초점이고, t 는 타원 위의 임의의 한 점 P 에서 그은 접선이고, F'' 은 접선 t 에 대한 초점 F 의 대칭점이며, S 와 T 는 접선 t 위에 P 의 양쪽으로 하나씩 잡은 점이다. 그리고, Q 는 접선 t 위에서 P 와 다르게 임의로 잡은 점이며, R 은 선분 QF 가 타원과 만나는 점이다. 그러면,

$$(1) F'Q + QF = F'Q + QR + RF$$

인데 $\triangle F'QR$ 에서 $F'Q + QR > F'R$ 이므로

$$(2) F'Q + QR + RF > F'R + RF$$

이다. R 과 P 는 타원위의 점이므로 타원의 정의에 의해

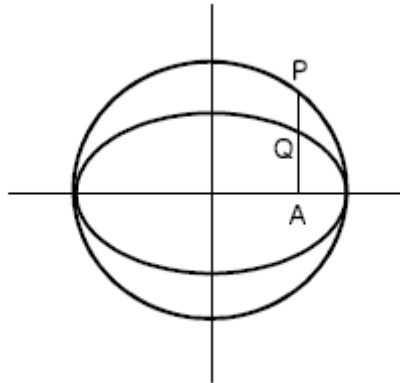
$$(3) F'R + RF = F'P + PF$$

이다. 그러므로 (1), (2), (3)에 의해 $F'Q + QF > F'P + PF$ 를 얻게 되는데, 이로부터 두 초점으로부터 접선 t 위의 한 점에 이르는 거리의 합은 접점 P 에서 최소가 됨을 알 수 있다. 한편, $F'Q + QF = F'Q + QF''$ 이고 $F'Q + QF''$ 이 최소일 때는 세 점 F', Q, F'' 이 한 직선위에 있을 때이기 때문에, F', P, F'' 는 한 직선 위에 있게 된다. 따라서 $\angle F'PS = \angle F''PT = \angle FPT$ 가 된다. 즉, 타원 위의 임의의 점에서 그은 접선에 대해 접점과 각 초점을 연결하는 직선이 이루는 각은 같게 된다.

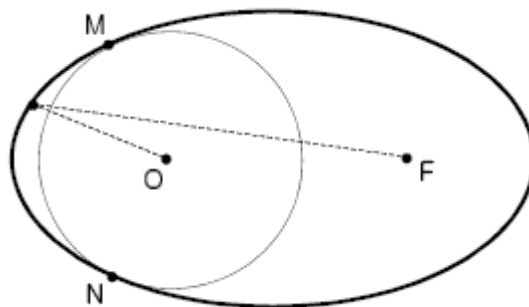
런던의 성 바오로 대성당에는 ‘속삭이는 회랑(whispering gallery)’이라는 신비한 장소로 유명하다. 돔 아래의 회랑(원형 모양의 복도) 한 쪽에서 속삭인 소리는 회랑의 건너편 쪽에서 더 잘 들린다. 성 바오로 대성당의 돔을 이루는 타원형 천정이 신비한 현상의 원인이다. 타원의 초점에 해당하는 곳에서 소리를 내면 이 소리는 사방으로 퍼져가지만 타원형 천정에 도달하여 반사된 소리는 모두 건너편 초점에 해당하는 위치에 다시 모이게 된다. 그래서 타원의 한 초점에서 낸 소리는 다른 초점에서 아주 또렷하게 들리게 되는 것이다.



[문제 2-1] 원을 한쪽 방향으로 일정비율로 축소하면 타원이 된다는 것을 다음과 같이 보여라. 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단 $a > b > 0$)에 대해 x 축 위의 점 $A(x_0, 0)$ (단, $-a < x_0 < a$)를 지나는 수직선이 그림과 같이 원과 만나는 점을 P , 타원과 만나는 점을 Q 라고 할 때, 두 선분 AQ 와 AP 의 길이의 비 $\frac{AQ}{AP}$ 를 구하고 이 비가 일정함을 보여라.



[문제 2-2] 아래 그림과 같이 타원 E 위의 서로 다른 두 점 M 과 N 에서 타원 E 에 접하는 원 C 가 있다. 이 때 원 C 의 중심 O 는 타원 E 의 초점이 될 수 없음을 타원의 정의를 이용하여 설명하라.





[논제 2-3] 위 문제에서처럼 원 C 를 타원 E 위의 서로 다른 두 점 M 과 N 에 접하게 하면서 반지름을 줄여 가면 두 접점 M 과 N 은 타원의 한 꼭짓점에 접근한다. 이 때 원 C 의 중심 O 는 타원의 한 초점에 접근하는지를 다음과 같은 과정으로 판단해 보라.

(1) 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 초점의 좌표는 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$ (단, $b^2 = a^2 - c^2$), 점 M 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 할 때, 직선 OM 의 방정식을 구하고, 이것에 의해 원의 중심 O 의 x 좌표를 a 와 c 와 x_1 에 관한 식으로 나타내어라.

(2) x_1 이 $-a$ 에 접근할 때, 원의 중심 O 의 x 좌표의 극한값을 구하라.

(3) (2)의 결과를 이용하여, M 이 꼭짓점에 접근할 때 중심 O 가 타원의 초점에 접근하는지를 판단하라.

[논제 2-4] 초점이 $F(3, 0)$ 과 $F'(-3, 0)$ 인 타원 $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 직선 $l: x = 7$ 이

있다. 직선 l 위에서 점 $P(7, p)$ 가 $-\frac{24}{7} \leq p \leq \frac{24}{7}$ 인 범위에서 움직이면서 초점 F' 를 향해 빛을 비추고 있다. 이 빛이 타원에서 반사되어 직선 l 위의 점 $Q(7, q)$ 를 지난다고 할 때, q 의 범위를 구하라.



제시문 분석

역사적으로 타원에 관한 연구를 소개하고, 타원의 정의를 이용하여 타원 방정식을 유도해 내고 타원의 초점, 장축과 단축, 타원의 중심과 꼭짓점 등의 용어를 소개하였다. 타원의 한 초점에서 출발한 빛은 타원의 경계선에서 반사되어 다른 초점으로 입사한다는 타원의 광학적 성질 중 하나를 설명하고 이를 논리적으로 증명하였으며 이 광학적 성질이 적용된 예를 제시하였다.



논제 분석

① 원을 한쪽 방향으로 일정 비율로 축소하면 타원이 됨을 계산할 수 있는가?

논제에 제시되어 있는 원과 타원의 방정식, 점의 좌표를 이용하여 선분 AQ 와 AP 의 길이의 비가 일정함을 직접 계산한다.

② 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합이 일정하다는 타원의 정의를 이용하여 어떤 한 점이 타원의 초점이 될 수 있는지 없는지를 확인할 수 있는가?

타원에 내접하는 원의 중심 O 가 초점이라 가정하고 타원 위의 임의의 점에서 두 초점 O 와 F 까지 거리의 합이 일정하지 않음을 계산을 통해 확인하고, 따라서 점 O 가 타원 E 의 초점이 될 수 없음을 확인한다.

③ 타원에 내접하는 원의 반지름을 줄여 나갈 때 원의 중심이 타원의 한 초점에 접근하는지 확인할 수 있는가?

타원의 방정식과 타원 위의 한 점에서 내린 접선의 방정식을 연립하여 원의 중심 O 의 좌표를 직접 구하여 이 좌표의 극한값이 타원의 초점과 일치하지 않음을 직접 계산해 본다.

④ 주어진 타원의 방정식에 타원의 반사성질을 적용할 수 있는가?

타원의 한 초점을 향해 빛을 비출 때 이 빛이 타원면에 반사되어 어떤 점으로 입사되는지를 직접 계산하여 확인한다.



배경지식 쌓기

➔ 타원의 정의

평면 위의 두 정점 F, F' 에서의 거리의 합이 일정한 점의 자취를 타원이라 하고, 이 때 두 정점 F, F' 을 타원의 초점이라 한다.

➔ 타원의 방정식

(1) 두 정점 $F(k,0), F'(-k,0)$ 에서의 거리의 합이 $2a(a > k > 0)$ 인 타원의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0, k^2 = a^2 - b^2)$$

(2) 두 정점 $F(0,k), F'(0,-k)$ 에서의 거리의 합이 $2b(b > k > 0)$ 인 타원의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0, k^2 = b^2 - a^2)$$

➔ 타원의 접선

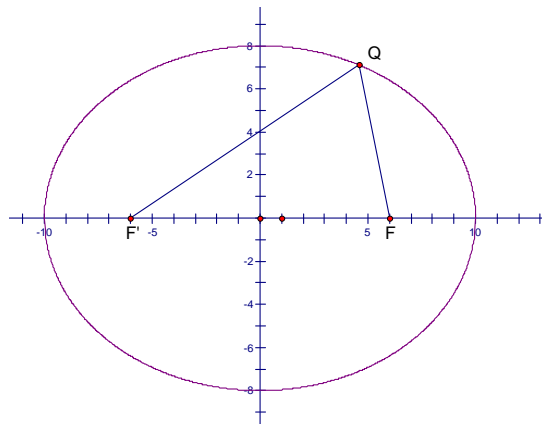
(1) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선 방정식 : $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(2) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 내린 기울기가 m 인 접선 방정식 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$



풀어 보기

1. 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하고, 타원 위의 임의의 한 점을 Q 라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{FQ}, \overrightarrow{F'Q}$ 의 내적 $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{F'Q}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.





읽기 자료

➔ 이차곡선의 광학적 성질

고등학교 수학에서 배우는 이차곡선의 역사는 원뿔에 대한 고대 그리스의 연구로 거슬러 올라간다. 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 [그림 1]과 같이 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선으로 원뿔곡선이라 부른다. 현재 부르고 있는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 어원은 고대 그리스의 수학자 아폴로니우스의 저서 ‘원뿔곡선론’에서 찾아볼 수 있다.



[그림 1]

아폴로니우스는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면과 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라서 포물선은 ‘같다’는 뜻에서 parabola의 원어를 썼고, 타원은 ‘부족하다’는 뜻의 ellipse, 쌍곡선은 ‘초과하다’는 뜻의 hyperbola를 썼다.

한편 기하학의 아버지라 불리는 유클리드 이후 많은 사람들이 도형을 연구하고 발전시켰다. 그 중에서도 데카르트는 좌표를 통하여 기하의 내용들을 그에 해당되는 대수적인 내용으로 해석하였다. 이것은 도형에 관한 연구에 획기적인 발견이고, 추상적인 도형 문제를 구체적인 계산 문제로 바꿔놓았다. 원뿔곡선 역시 좌표평면 위에서 대수적인 내용으로 해석되었다. 즉, 원뿔곡선을 좌표를 사용하여 나타낼 때 미지수가 2개인 이차방정식으로 표현된다. 그래서 원뿔곡선을 이차곡선이라고 부른다.



[그림 2]

이차곡선의 광학적 성질은 포물선, 타원, 쌍곡선의 초점과 밑점한 관련이 있다. 포물선의 초점에서 나간 빛은 포물선 거울 면에 반사되어 축과 평행하게 나간다. 이를 이용한 것이 자동차의 전조등이다. 반대로 포물선의 축과 나란히 입사하는 전파는 포물면 모양의 안테나에 반사되어 초점으로 모인다. 접시 모양의 위성 중계 안테나를 파라볼라 안테나라고 부른다.

이제 이차곡선의 광학적 반사를 수학적으로 알아보자.

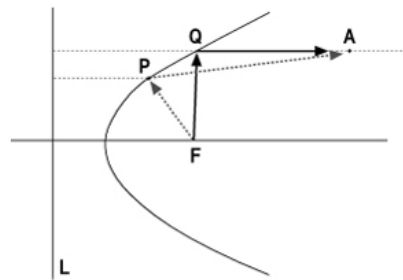
이차곡선의 반사는 다음 두 가지 법칙을 만족해야 한다.

- (1) 페르마의 법칙 (2) 반사의 법칙



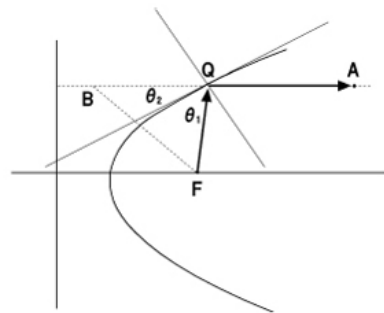
포물선 초점에서 출발한 빛은 페르마의 법칙에 의해 최단거리의 경로를 따라 진행한다. 페르마의 법칙이란 빛이 어떤 지점에서 다른 지점으로 향할 때, 가장 짧은 시간의 경로를 따라 진행된다는 법칙이다. 같은 매질에서는 빛의 속도가 일정하기 때문에 가장 짧은 시간의 경로는 가장 짧은 거리임을 알 수 있다. 즉, 직선으로 진행한다. 따라서 포물선 초점에서 출발한 빛은 포물선 거울 면에 반사되어 축과 평행하게 진행한다.

만약 [그림 3]과 같이 초점 F에서 출발한 빛이 점 P에 반사되어서 점 A에 도착한다고 하자. 그러면 빛이 점 F, P, A를 지나가는 경로가 페르마의 법칙을 만족하는지를 살펴봐야 한다. 즉, FP+PA가 최소거리인지를 확인해야 한다. 만약 최소가 아니라면 포물선 거울 면의 어떤 점을 지나가는 것이 최소거리인지 찾아야 한다.



[그림 3]

[그림 3]에서 직선 L을 포물선의 준선이라 할 때, FP는 P에서 직선 L까지의 거리와 같다. 즉, FP+PA는 점 A에서 점 P를 지나 직선 L까지의 거리와 같다. 이와 같은 사실은 점 A에서 점 P를 지나 직선 L까지의 거리가 최단거리가 아니라는 것을 말한다. 따라서 [그림 3]과 같이 점 Q에서 빛이 반사하여 점 A를 향할 때, 이 경로가 페르마의 법칙을 만족함을 알 수 있다.



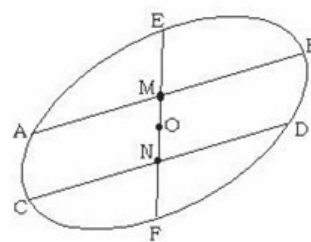
[그림 4]

다음으로 포물선 초점에서 출발한 빛은 반사의 법칙에 의해 입사각과 반사각이 같아야 한다. [그림 4]와 같이 접선에 대해서 초점 F를 대칭이동한 점을 B라 하고 선분 FQ와 선분 BQ가 접선과 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2 이라 할 때, 초점 F와 점 B가 접선에 대해서 대칭이동한 점이므로 두 각 θ_1, θ_2 가 같음을 알 수 있다. 따라서 초점 F에서 출발한 빛이 점 Q에 도달하면, 빛이 반사할 때 입사각($\frac{\pi}{2}-\theta_1$)과 반사각($\frac{\pi}{2}-\theta_1$)이 같기 때문에, Q에서 반사된 빛은 포물선의 축과 평행하게 진행되는 것이다. 따라서 포물선의 초점 F를 출발한 빛은 점 Q에서 반사하여 축과 나란하게 진행함을 알 수 있다.

➡ 자와 컴퍼스만으로 타원의 중심, 장축과 단축, 초점 구하기

① 타원의 중심 찾기

타원 위의 평행한 현들의 중점들이 타원의 중심을 지나는 일정한 직선 위에 있다는 타원의 기하학적 성질을 이용하여 중심을 찾을 수 있다. 먼저 그림과 같이 주어진 타원 위에 임의의 평행한 두 현 AB, CD를 그린다. 이어서 선분의 수직이등분선을

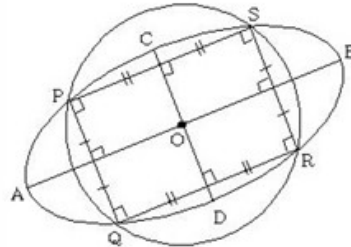




작도하는 방법으로 두 현 AB, CD 의 중점 M, N 을 각각 구한다. 이 때 두 점 M, N 을 지나는 현 EF 는 타원의 중심을 지나는 현이므로, 현 EF 의 중점 O 가 타원의 중심이 된다.

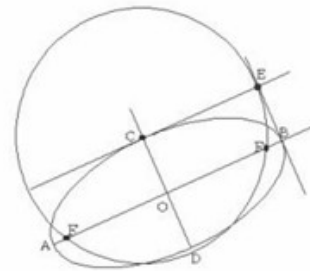
② 타원의 장축, 단축 찾기

위에서 찾은 타원의 중심 O 를 중심으로 하고 주어진 타원과 네 점 P, Q, R, S 에서 만나는 원을 하나 그린다. 이제 선분 PQ 의 수직이등분선이 타원과 만나는 두 점을 각각 C, D 라 하면, 선분 AB 는 타원의 장축이 되고 선분 CD 는 타원의 단축이 된다.



③ 타원의 초점 찾기

그림과 같이 타원의 중심을 O , 장축을 AB , 단축을 CD 라 한다. 타원의 장축의 한 끝점 B 를 지나고 장축에 수직인 직선을 긋고, 또 단축의 한 끝점 C 를 지나고 단축에 수직인 직선을 그어서 두 직선의 교점을 E 라 한다. 이 때 점 C 를 중심으로 하고 점 E 를 지나는 원을 그려서 그 원이 장축과 만나는 두 점을 각각 F, F' 이라 하면 이 두 점 F, F' 은 주어진 타원의 두 초점이 된다. 여기서 타원의 장반경 OB (또는 OA)와 선분 CF (또는 CF', DF', DF)의 길이가 모두 같다는 사실을 이용하여 초점을 찾는다.





예시 답안

[풀어 보기 1]

초점이 $F(6, 0), F'(-6, 0)$ 이고, 타원 위의 한 점 Q 의 좌표를 $(10\cos\theta, 8\sin\theta)$ 라 하면,

$$\overrightarrow{FQ} = (10\cos\theta - 6, 8\sin\theta), \overrightarrow{F'Q} = (10\cos\theta + 6, 8\sin\theta)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{F'Q} &= (10\cos\theta - 6)(10\cos\theta + 6) + (8\sin\theta)^2 \\ &= 100\cos^2\theta + 64\sin^2\theta - 36 \\ &= 36\cos^2\theta + 28 \end{aligned}$$

$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ 이므로 $28 \leq \overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{F'Q} \leq 64$ 이다. 따라서 $M=64, m=28$ 이므로 $M+m=92$ 이다.

[문제 2-1]

$x = x_0$ 를 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 에 대입하여 정리하면 점 P 의 y 좌표는 $y = \sqrt{a^2 - x_0^2}$ 이다.
따라서

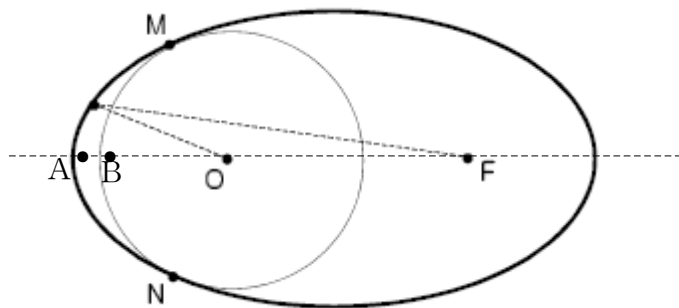
$$\overline{AP} = \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

같은 방법으로 $x = x_0$ 를 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$\overline{AQ} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

따라서 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{b}{a}$ (일정)이다.

[문제 2-2]



타원의 한 꼭짓점을 A 라 하고, 내접하는 원과 타원의 장축의 한 교점을 B 라고 하자.(위 그림 참조) 점 O 가 타원의 한 초점이라면 A 와 M 이 타원위의 점이므로 타원의 정의에 의해

$$\overline{OM} + \overline{MF} = \overline{OA} + \overline{AF}$$



가 되어야 한다. 그러나 $\overline{OM} = \overline{OB} < \overline{OB} + \overline{AB} = \overline{OA}$ 이고,

$$\overline{FM} < \overline{OM} + \overline{FO} = \overline{OB} + \overline{FO} < \overline{OA} + \overline{FO} = \overline{AF}$$

이므로 $\overline{OM} + \overline{MF} < \overline{OA} + \overline{AF}$ 가 된다. 따라서 점 O는 타원의 한 초점이 아니다.

[문제 2-3]

(1) 점 $M(x_1, y_1)$ 에서 타원에 그은 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이므로 기울기는 $-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$ 이다. 직선 OM은 접선 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 에 수직이고 점 $M(x_1, y_1)$ 을 지나 는 직선이므로

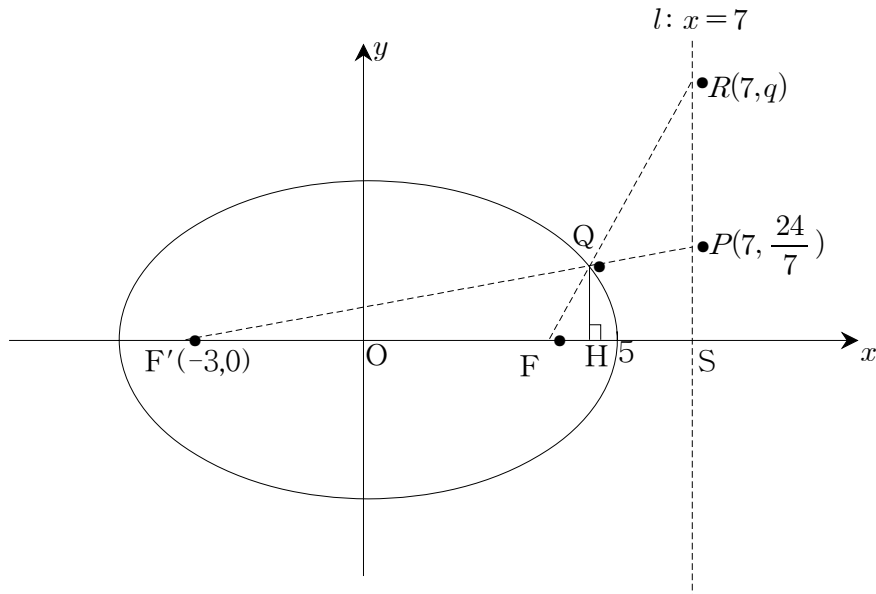
$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \dots\dots ①$$

이다. 또 타원에 내접하는 원의 중심 O의 x좌표는 직선 ①의 x절편이므로 $\frac{c^2 x_1}{a^2}$ 이다.

(2) $\lim_{x_1 \rightarrow -a} \frac{c^2 x_1}{a^2} = -\frac{c^2}{a}$

(3) (2)의 결과에 의해 점 M이 타원의 한 꼭짓점 $(-a, 0)$ 에 접근하더라도 원의 중심 O는 타원의 초점으로 접근하지는 않는다.

[문제 2-4]



점 P에서 타원의 초점 F'로 향한 빛은 타원면 Q에 반사되어 직선 FQ가 직선 $l: x=7$ 과 만나는 점 R로 입사된다. 점 Q에서 장축에 내린 수선의 발을 H라 하고,



점 Q는 제 1사분면의 타원위의 점이므로 $Q(a, \frac{4}{5}\sqrt{25-a^2})$ 라고 하자. $\triangle QF'H$ 와

$\triangle PF'S$ 는 닮은꼴이므로 $\frac{HQ}{F'H} = \frac{SP}{F'S}$ 즉, $\frac{\frac{4}{5}\sqrt{25-a^2}}{a+3} = \frac{24}{10}$ 을 만족한다. 이것을 정리하면

$$29a^2 + 27a - 572 = 0 \text{ 이고 이를 풀면 } (29a+143)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \text{ 또는 } -\frac{143}{29}$$

그런데 점Q는 제 1사분면 위의 점이므로 $a = 4$. 따라서 $Q(4, \frac{12}{5})$ 가 된다.

같은 방법으로 $\triangle QFH$ 와 $\triangle RFS$ 가 닮은꼴이므로 $\frac{HQ}{FH} = \frac{SR}{FS}$ 을 만족하므로

$$\frac{12}{5} = \frac{q}{4} \text{ 이고, 따라서 } q = \frac{48}{5} \text{ 이 된다.}$$

그러므로 직선 l 위에서 점 $P(7, p)$ 가 $-\frac{24}{7} \leq p \leq \frac{24}{7}$ 인 범위에서 움직이면서 초점 F' 를 향해 빛을 비추면 이 빛은 타원에서 반사되어 직선 l 위의 점 $Q(7, q)$ 를 지나고 이 때, q 의 값은

$$-\frac{48}{5} \leq q \leq \frac{48}{5}$$

의 범위를 가진다.



10

인하대학교 수시 2-1

제시문

[가] 일반적으로 사람의 체세포에는 양쪽 부모로부터 22개의 상염색체와 하나의 성염색체를 물려받아 이루어진 23쌍의 염색체가 들어있다. 이 중 성염색체는 X 염색체와 Y 염색체인데 남자는 XY, 여자는 XX로 이루어져 있다. 성염색체에는 남성과 여성을 결정하는데 필요한 유전자 외에도 다양한 형질을 결정하는 여러 가지 유전자들이 존재한다고 알려져 있다. 색맹 유전자가 그 대표적인 예인데, 이 형질을 결정하는 유전자는 X 염색체에 있으며 정상인 대립 유전자에 대해 열성으로 작용한다. 즉, 색맹을 유발하는 유전자를 가진 염색체를 X'이라고 하면, 염색체 조성이 XY인 남자와 XX인 여자에게는 색맹의 형질이 나타나지 않고, X'Y인 남자와 X'X'인 여자에게는 색맹의 형질이 나타난다. 그리고 여자의 경우에는 X'X의 염색체 조성을 가질 수 있다. 색맹 유전자가 정상인 유전자에 대해 열성이기 때문에 이 경우에는 정상으로 나타나지만, 색맹 유전자를 다음 세대로 전달할 수 있기 때문에 보인자라고 한다. 또한, 특정 집단 내에 색맹 유전자가 나타날 확률이 p라면 정상인 대립 유전자가 나타날 확률은 1-p이다.

[문제] 제시문 [가]에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

- (1) 어느 격리된 사회에서 여자의 1%가 색맹이고 18%가 보인자라고 했을 때, 임의의 남자와 여자가 결혼을 해서 아들을 낳을 경우 그 아들이 색맹일 확률을 구하시오. 단, 이 사회는 충분히 큰 집단이며, 대립 유전자에서 돌연변이가 나타나지 않고, 자연선택 역시 작용하지 않는다고 가정한다.

- (2) (1)의 사회에서 어느 해에 결혼한 부부의 색맹 여부를 조사하였더니 남자의 5%와 여자의 1%가 색맹이었다. 이들이 낳은 자녀 중에서 딸의 0.7%가 색맹이었다면 아들의 몇 %가 색맹일 것으로 예상할 수 있는가? 결혼한 부부 중에서 보인자인 여자의 비율을 고려하여 답하시오. 단, 자녀의 수는 충분히 많고 아들과 딸의 수는 같다고 가정한다.



제시문 분석

① 색맹 유전자에 대해 설명하고 있다.

색맹을 결정하는 유전자는 X 염색체에 있으며 정상인 대립 유전자에 대해 열성으로 작용한다.

② 특정 상황에서 색맹이 일어날 확률을 설명하고 있다.

특정 집단 내에 색맹 유전자가 나타날 확률이 p 라면 정상인 대립 유전자가 나타날 확률은 $1-p$ 이다.



논제 분석

① 남자와 여자가 결혼해서 아들을 낳을 때 그 아들이 색맹일 확률을 계산할 수 있는가?

다음 세대에 색맹 유전자를 물려주는데 있어서 확률적으로 여성 색맹자 전원과 여성 보인자의 절반이 기여한다는 점에 착안하여 아들이 색맹일 확률을 직접 계산할 수 있다.

② 남자의 5%와 여자의 1%가 색맹일 때, 이들이 낳은 자녀 중에서 딸의 0.7%가 색맹이었다면 색맹일 아들의 비율을 구할 수 있는가?

남자의 5%와 여자의 1%가 색맹일 때, 그 자녀들 중 딸의 0.7%가 색맹이었다. 이때, 아들이 색맹일 확률을 보인자인 어머니의 비율(50%)을 고려하여 직접 계산할 수 있다.



 **배경지식 쌓기**

1. 확률의 덧셈정리

- (1) 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (2) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건일 때, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- (3) 사건 A 의 여사건 A^c 에 대하여 $P(A^c) = 1 - P(A)$

2. 확률의 곱셈정리

- (1) 조건부확률 : 사건 A 가 일어났다는 조건 아래 사건 B 가 일어날 확률을 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이라 하고, $P(B|A)$ 로 나타낸다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) \neq 0)$$

- (2) 확률의 곱셈정리 : 두 사건 A, B 가 동시에 일어날 확률 $P(A \cap B)$ 는

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

 **풀어 보기**

- 1. 잔디와 준표는 이메일을 자주 교환한다. 준표가 잔디의 메일을 받은 당일 답장을 보내는 경우는 4회 중 3회 풀이고, 잔디가 준표에게 메일을 보낸 당일 준표가 보낸 답장을 확인하는 경우는 10회 중 7회 풀이다. 잔디가 준표에게 메일을 보낸 어느 날 준표가 보낸 답장을 당일 확인하지 못할 확률을 구하시오.

- 2. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 할 때,

$(a-b)(b-c) = 0$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이 때 $p+q$ 의 값을 구하시오.

- 3. 어떤 공장의 A, B 두 대의 기계는 같은 제품을 각각 40%, 60%씩 나누어 생산하고 있고 불량률은 각각 1%, 1.5%라고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중 하나를 택하였더니 불량품이었을 때, 이 불량품이 A 기계에서 생산한 제품일 확률을 구하시오.



인기 자료

➔ 확률&통계, 인생 역전 꿈꾸는 '인류의 게임'

확률 게임의 역사는 4만 년 전으로 거슬러 올라간다. 고대인들이 확률 게임 도구로 사용했으리라고 생각되는 양이나 염소, 사슴의 복사뼈가 등장한다. 4면 주사위로 간주할 수 있었던 복사뼈는 이집트 제1왕조 대에도 게임 도구로 사용됐는데, 기원전 1800년경에 유행하던 게임인 '사냥개와 자칼' 같은 것을 들 수 있다. 이 게임은 복사뼈를 던져 나타나는 면에 따라 사냥개와 자칼을 각각 일정한 수만큼 전진시키는 게임으로 우리의 윷놀이와 비슷한 종류다. 우리나라에서는 경주 안압지에서 발굴된 14면 목제 주사위가 가장 오래된 확률 게임 도구이다. 이 주사위는 6개의 사각면과 8개의 삼각면으로 되어 있는데 각 면에는 '술 석잔 한 번에 마시기', '스스로 노래 부르고 스스로 마시기', '술을 다 마시고 크게 웃기' 등으로 해석되는 별칭이 적혀 있다.

현대에 가장 대표적인 확률 게임은 복권이다. 로또를 포함한 복권은 세 가지로 분류된다. 가장 오랜 역사를 가진 것은 추첨식 복권이다. 번호가 적힌 복권을 판매한 뒤 추첨해 동일한 번호에 당첨된 사람에게 해당 상금을 지급하는 것으로 1400년대 네덜란드에서 시작되었다고 한다. 우리나라에서는 1969년 9월15일 시작된 주택복권이 여기에 해당한다. 초기 액면금액은 100원, 1등 당첨금은 300만원이었다. 복권 중 가장 인기 있는 로또는 1530년 이탈리아의 제노아에서 처음 시작되었다고 한다. 또한 우리나라에서 1990년부터 발행돼 인기를 끌었던 즉석식 복권(찬스복권)은 스위스에서 시작한 것으로 알려져 있다. 여러 겹으로 접힌 봉함 속에서 번호를 기재해 사전에 추첨한 당첨번호와 대조하는 방식과 긁어내기 방식이 쓰인다.

근대적인 의미의 확률 이론을 처음 도입한 사람은 이탈리아의 지롤라모 카르다노(1501~1576)였다. 의사, 철학자, 공학자, 수학자 등 다양한 재능을 갖고 있던 카르다노는 그의 사후인 1663년에 발견된 책을 통해 확률이론의 창시자로 알려졌다. 이 책은 4면 주사위라고 할 수 있는 복사뼈와 주사위의 차이점을 설명하면서 각각의 게임에서의 승률에 대해서 처음으로 논했다. 카르다노의 사후에는 갈릴레오-갈릴레이(1564~1642)가 등장한다. 그에게 던져진 문제는 3개의 주사위를 던져서 합이 9가 되는 구성

(1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3)

과 10이 되는 구성

(1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4)

는 6가지로 똑같은데 왜 실제 게임에서는 10에다 거는 쪽이 더 유리한지를 구명하는 작업이었다. 갈릴레이는 이 문제를 풀기 위해 세 개의 주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 216가지의 경우가 모두 같은 정도로 나타날 수 있다고 생각하고, 그 중에



서 합이 9인 경우는 25가지 방법으로 나올 수 있고 합이 10인 경우는 27가지 방법으로 나올 수 있다는 것을 증명했다. 사실상 이전 사람들이 같은 확률로 나온다고 생각했던 조합들이 사실은 다른 확률로 나타난다는 것을 보인 것이다. 예를 들어 1-2-6과 같이 모두 다른 값으로 합이 9가 되는 방법은 6가지가 있으나 1-4-4처럼 두 주사위가 같은 값이 나오면서 합이 9가 되는 방법은 3가지, 3-3-3과 같이 모두 같은 값으로 합이 9가 되는 방법은 1가지밖에 없다. 따라서 합이 9가 되는 방법은 $6+6+3+3+6+1=25$ 이지만 같은 식으로 계산했을 때 10이 되는 방법은 $6+6+3+6+3+3=27$ 이 된다.

갈릴레이의 풀이 이래, 유명한 일화는 17세기 수학자 블레즈 파스칼과 피에르 페르마 사이의 정리다. ‘슈발리에 드 메르(Chevalier de Mere)의 문제’라고 널리 알려져 있는 이 논의는 파스칼과 페르마의 사이에 오간 서신들을 통해 윤곽을 살필 수 있다. 페르마의 답장 내용으로 미루어 이 당시에 이미 우리 고등학교 수준에서 다루고 있는 확률에 대한 기본적인 개념은 이미 정립이 되어 있었던 것으로 보인다. 문제의 핵심은 확률과 기댓값의 차이에 대한 명백한 인식이다. 프랑스의 귀족으로 도박에 심취해 있던 드 메르의 문제 제기는 다음과 같았다.

‘주사위를 한 번 던질 때 1이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다. 4번 던져서 최소한 한 번은 1이 나올 확률은 $\frac{2}{3}(4 \times \frac{1}{6})$ 가 된다. 또 주사위를 2개 던질 때 더블-에이스(둘 다 1이 나오는 것)가 나올 확률은 $\frac{1}{36}(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6})$ 이니까 주사위 두개를 24번 던질 때 최소한 한 번 이상 더블-에이스를 기록할 확률도 $\frac{2}{3}(24 \times \frac{1}{36})$ 이다. 그러나 실제로는 앞 경우가 아주 조금 더 자주 나오는 것은 왜일까.’

이 문제를 갈릴레이 방식으로 풀기가 힘들다는 점은 그 경우의 수로부터 명백해진다. 2개의 주사위를 24번 던질 때 나올 수 있는 경우는 2.2×10^{37} 가지가 된다. 이 문제를 요즘 방식으로 풀면 그 확률이 각각 51.8%와 49.1%로 계산돼 도박사들의 실제 경험이 옳다는 것을 알 수 있다. 파스칼과 페르마는 근대적 확률 계산 방식을 이용하여 이 문제를 풀어 의문을 해소시켰다. 드 메르 등이 계산한 것은 주사위 한 개를 4번 던질 때 1이 나오는 횟수의 기댓값과 주사위 두 개를 24번 던질 때 더블-에이스가 나오는 횟수의 기댓값에 불과하며 확률이 아니다.



예시 답안

[풀어 보기 1]

잔디가 준표의 답장을 당일 확인하지 않는 경우는 준표가 잔디가 보낸 메일에 답장을 보내지 않는 경우와 잔디가 준표가 보낸 답장을 확인하지 않는 경우가 있다. 준표가 잔디에게 답장을 보내는 사건을 A , 잔디가 준표의 답장을 확인하는 사건을 B 라 하면

(i) 준표가 잔디의 메일에 답장을 보내지 않을 확률은 $P(A^c) = \frac{1}{4}$

(ii) 준표가 잔디의 답장을 확인하지 않을 확률은 $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c|A)$
 $= \frac{3}{4} \times (1 - \frac{7}{10})$
 $= \frac{9}{40}$

(i), (ii)에 의하여 $P(B^c) = P(A^c) + P(A \cap B^c)$
 $= \frac{1}{4} + \frac{9}{40}$
 $= 0.475$

[풀어 보기 2]

$(a-b)(b-c) = 0$ 인 사건의 여사건은 $(a-b)(b-c) \neq 0$ 이고
 $(a-b)(b-c) \neq 0 \Leftrightarrow a-b \neq 0$ 이고 $b-c \neq 0$
 $\Leftrightarrow a \neq b$ 이고 $b \neq c$

즉, 구하는 확률은 두 번째 나온 눈의 수가 첫 번째 나온 눈의 수와 같지 않고, 세 번째 나온 눈의 수가 두 번째 나온 눈의 수와 같지 않을 확률이므로 $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

따라서 $(a-b)(b-c) = 0$ 일 확률 $\frac{q}{p}$ 는
 $\frac{q}{p} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \therefore p+q = 47$

[풀어 보기 3]

이 공장에서 생산한 제품이 A기계에서 생산한 제품인 사건을 A , 불량품인 사건을 E 라 하면

$P(A) = 0.4, P(A^c) = 0.6, P(E|A) = 0.01, P(E|A^c) = 0.015$



$$\begin{aligned}
 \therefore P(A|E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(A \cap E) + P(A^c \cap E)} \\
 &= \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(A^c)P(E|A^c)} \\
 &= \frac{0.4 \times 0.01}{0.4 \times 0.01 + 0.6 \times 0.015} \\
 &= \frac{4}{13}
 \end{aligned}$$

[문제 (1)]

남자와 여자가 결혼하여 자녀를 낳는 경우를 생각해 보자. 특히, 아들인 경우에는 염색체가 XY 이기 때문에 아버지로부터 Y 염색체를 받고 어머니로부터 X 염색체를 받는다. 그런데 색맹을 결정하는 유전 물질은 X 염색체에 있기 때문에 아들인 경우에는 아버지의 색맹 여부에는 영향을 받지 않는다. 즉, 어머니가 색맹인지, 보인자인지에 따라서 결정된다. 따라서 어머니가 색맹일 확률이 $\frac{1}{100}$ 이고 어머니가 보인자일 확률이 $\frac{18}{100}$ 이므로 아들이 색맹일 확률은

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{18}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \text{ (혹은 10\%)}$$

이 된다.

[문제 (2)]

결혼한 부부 중에서 여자의 $p\%$ 가 보인자라고 하자. 그리고 다음 세대에서 딸이 색맹이 될 확률을 구해 보자. 먼저 아버지가 정상일 경우에는 딸이 색맹이 되지 않는다. 그리고 아버지가 색맹일 확률은 $\frac{5}{100}$ 이다. 이 경우에 아버지의 유전자는 $X^c Y$ 이므로 색맹인 딸이 나오기 위해서는 어머니도 색맹이거나 최소한 보인자 이어야 한다. 어머니가 색맹일 확률이 $\frac{1}{100}$ 이고 어머니가 보인자일 확률이 $\frac{p}{100}$ 이므로 딸이 색맹이 될 확률은 $\frac{5}{100} \times \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{p}{100} \right) = \frac{7}{1000}$ 이 된다. 이 식을 풀면 $p = 26(\%)$ 가 된다. 따라서 결혼한 부부 중에서 여자의 26%가 보인자가 된다. 마지막으로 아들이 색맹이 될 확률은 아버지의 색맹 여부에 관계가 없고, 어머니가 색맹일 확률이 $\frac{1}{100}$ 이고 어머니가 보인자일 확률이 $\frac{26}{100}$ 이므로 아들이 색맹일 확률은 $\frac{1}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{26}{100} = \frac{14}{100}$ 가 된다. 즉, 아들의 14%가 색맹이 될 것으로 예상할 수 있다.



11

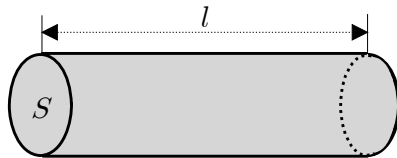
인하대학교 수시 2-2

제시문

[대] 구분구적법은 적분의 기본 원리로서, 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때 그 도형을 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 이들 도형의 넓이나 부피의 합을 구한 후, 이 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 정적분을 구분구적법을 이용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

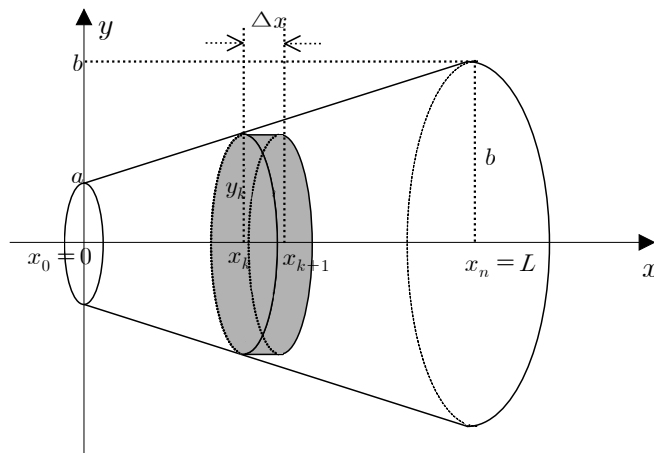
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \Delta x)$$

[라] 도선의 저항은 도선의 길이가 길수록 커지며 단면적이 클수록 작아진다. 이것은 도선의 길이가 길수록 자유전자와 금속원자의 충돌횟수가 많아져서 저항이 커지고, 도선의 단면이 클수록 단면을 통과하는 자유전자의 수가 많아져서 전류가 잘 흐르기 때문이다. 따라서 [그림 1]과 같은 도선의 저항 R 은 도선의 길이 l 에 비례하고 단면적 S 에 반비례한다. 비례상수를 ρ 라 하면 $R = \rho \frac{l}{S}$ 이다. 여기서 ρ 는 물질의 종류에 따라 정해지는 상수로서 물질의 비저항이라고 한다.



[그림 1]

[마] [그림 2]와 같이 잘려진 원뿔형 도선의 저항은 잘게 세분한 원기둥 도선의 저항의 합을 구한 후, 이것의 극한으로 구할 수 있다. 즉, 작은 원기둥을 이용한 구분구적법을 이용하여 구할 수 있다.

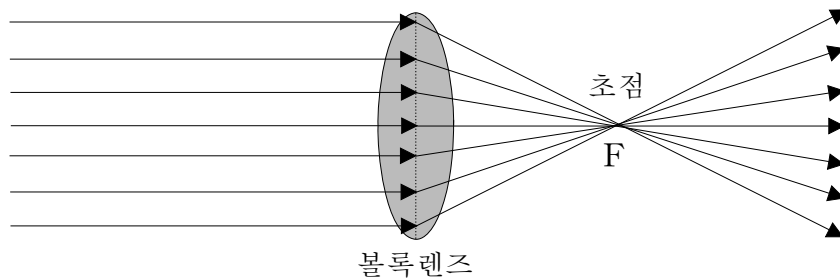


[그림 2]



잘려진 원뿔형 도선의 중심 길이를 L 이라 하고 이것을 n 등분하여 작은 원기둥의 합으로 근사시키자. $\Delta x = \frac{L}{n}$, $x_k = k \Delta x$ ($0 \leq k \leq n$)라 놓고, x_k 지점에서 단면의 반지름을 y_k , 단면적을 S_k , 두께가 Δx 인 원기둥 조각의 저항을 ΔR_k 라고 하면, ΔR_k 는 $\rho \frac{\Delta x}{S_k}$ 가 된다. 그러면 잘려진 원뿔형 도선의 전체 저항은 구분구적법에 의해서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho \frac{\Delta x}{S_k}$ 로 주어진다. 여기에서 ρ 는 도선을 이루는 물질의 비저항이다.

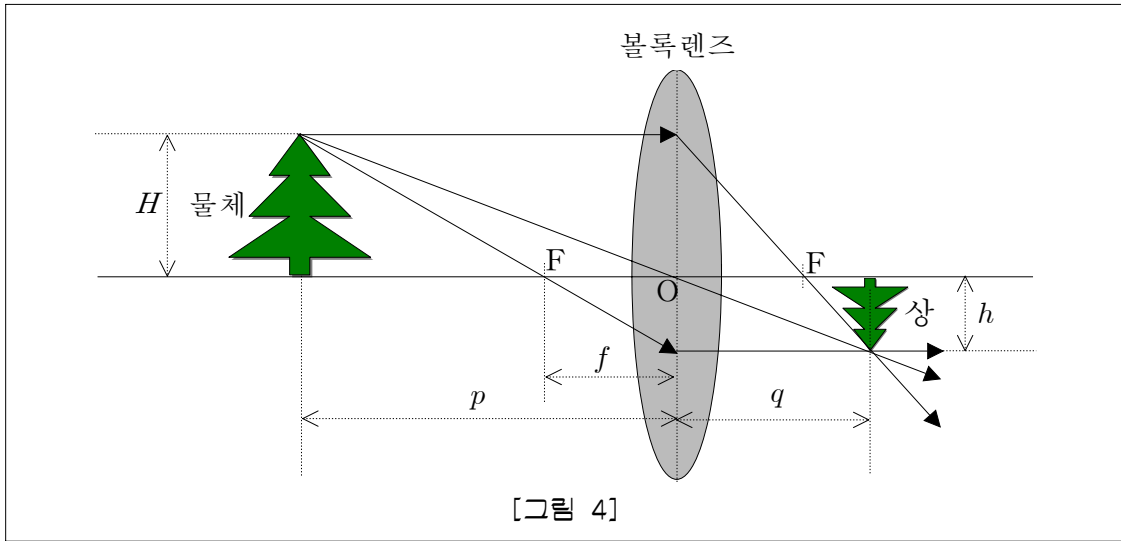
[배] 렌즈는 빛의 굴절 현상을 이용하는 것으로, 중앙이 양끝보다 두꺼운 볼록 렌즈와 얇은 오목 렌즈가 있다. [그림 3]과 같이 광선이 볼록 렌즈의 축에 나란히 입사하면 렌즈에 의해 굴절한 후 한 점 F에 모이는데, 이 점을 초점이라고 한다. 초점은 렌즈의 양쪽에 있고, 렌즈의 중심에 대하여 대칭이다.



[그림 3]

[그림 4]와 같이 렌즈의 중심에서 초점 F까지의 거리를 초점거리, 물체에서 렌즈의 중심까지의 거리를 물체거리, 렌즈의 중심에서 상까지의 거리를 상거리라고 한다. 물체거리가 무한대인 경우 상거리는 초점거리와 같아지며, 반대로 물체거리가 초점거리와 동일한 경우 상거리는 무한대가 된다. 또한 볼록 렌즈에 의한 상은 물체가 초점 밖에 있으면 도립 실상이 생기고 물체가 초점 안에 있을 때에는 실물보다 큰 정립 허상이 생긴다. 볼록 렌즈에서 물체거리를 p , 상거리를 q , 초점거리를 f 라고 할 때, 위의 현상을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



[문제 2] 제시문 [다], [라], [마]에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

(1) 제시문 [마]의 [그림 2]에서 주어진 원기둥 조각의 저항 ΔR_k 를 구하시오. (10점)

(2) 제시문 [마]의 [그림 2]에서 주어진 중심 길이가 L 인 잘려진 원뿔형 도선의 전체 저항을 구하시오. (15점)

[문제 3] 제시문 [바]에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

(1) [그림 4]에서 물체의 크기 H 와 상의 크기 h 의 비가 $H:h=1:3$ 일 때, p 와 q 를 f 를 이용하여 표현하시오. (10점)

(2) 초점거리가 f 인 볼록 렌즈에서 물체에서 도립 실상까지의 거리가 최소가 될 때, 물체거리 p 와 상거리 q 를 f 를 이용하여 표현하시오. (20점)



제시문 분석

- ① 제시문 [다]에서는 적분의 기본 원리인 구분구적법을 설명하고 이를 이용한 정적분의 정의를 제시하고 있다.
- ② 제시문 [라]에서는 원기둥 형태의 도선에 전류가 흐를 때 발생하는 저항은 도선의 길이에 비례하고 단면적에 반비례하는 현상을 설명하고 이로부터 도선의 전체 저항을 구하는 공식을 제시하였다.
- ③ 제시문 [마]에서는 제시문 [라]에서 주어진 공식과 구분구적법을 이용하여 잘려진 원뿔형 도선의 전체 저항을 구하는 방법을 설명하였다.
- ④ 제시문 [바]에서는 볼록 렌즈에 상이 맺히는 원리를 설명하고 물체거리와 상거리, 그리고 초점거리와의 관계에 대해서 설명하고 이를 수식으로 표현하였다.



논제 분석

- ① 원뿔형 도선을 n 등분하여 만든 원기둥 조각의 저항을 계산하고, 구분구적법을 이용하여 도선 전체의 저항을 구할 수 있는가?

두 점 $(0, a), (L, b)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, 폐구간 $[0, L]$ 사이의 임의의 점 x_k 에서의 반지름 y_k 를 구하고, 제시문 [마]에 주어진 $\Delta R_k = \rho \frac{\Delta x}{S_k}$ 를 이용하여 정리하면 k 번째 원기둥 조각의 저항을 쉽게 구할 수 있다. 그리고 구분구적법을 이용하여 도선 전체의 저항을 계산할 수 있다.

- ② 제시문 [바]의 [그림 4]에서 실제 물체의 길이와 상의 길이의 비가 1:3일 때, 물체거리(p)와 상거리(q)를 초점거리(f)를 이용해서 표현할 수 있는가?

삼각형의 닮음비와 제시문 [바]에 주어진 식 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 을 사용하여 p, q 의 값을 계산할 수 있다.

- ③ 볼록 렌즈에서 물체거리와 도립 실상까지의 거리의 합이 최소가 될 때에 물체거리(p)와 상거리(q)를 초점거리(f)를 이용해서 표현할 수 있는가?

물체거리와 도립 실상까지의 거리의 합을 제시문 [바]에 주어진 식 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 을 사용하여 한 변수의 함수로 표현하고, 미분을 이용하면 거리의 합이 최소가 될 때의 p 와 q 의 값을 찾을 수 있다.



배경지식 쌓기

① 구분구적법

일반적으로 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 세분하여 이미 알고 있는 간단한 도형의 넓이 또는 부피의 합으로 근삿값을 구하고, 이 근삿값의 극한값으로 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라 한다.

② 구분구적법과 정적분

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a+k\Delta x)$$

③ x^n 의 적분법

$$n \neq -1 \text{ 일 때, } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

④ 함수의 최댓값과 최솟값

함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며, 이 때 $f(x)$ 의 극값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 것이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이다.

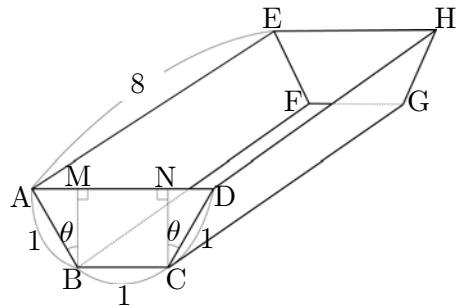
풀어 보기

1. $x \geq 0$ 에서 $f(x) > 0$ 인 다항함수 $f(x)$ 와 양수 h 에 대하여 $S(h)$ 를

$$S(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{hk}{n}\right) \cdot \frac{h}{n}$$

라 정의하자. 이 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(2h)}{h}$ 의 값은? (단, $h > 0$)

2. 그림과 같은 사각기둥의 물통에서 등변 사다리꼴 ABCD에 대하여, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$, $\overline{AE} = 8$ 이고, 꼭지점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\angle ABM = \angle DCN = \theta$ 이다. 물통의 부피의 최댓값이 V 일 때, V^2 의 값을 구하시오.





입기 자료

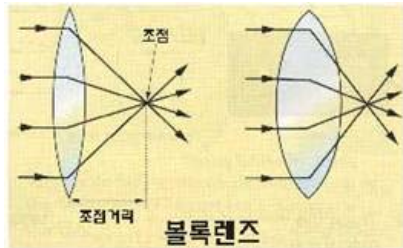
➔ 렌즈란

빛은 다른 물질을 지날 때 속력이 달라지기 때문에 굴절 현상이 일어나며, 굴절의 법칙에 따라 진행 방향이 변하게 됩니다. 이때 경계면의 모양을 잘 조절하면 광선들을 모으거나 퍼트리게 할 수 있습니다. 바로 빛의 굴절 현상을 이용한 것이 렌즈이며 렌즈를 통과하는 빛은 렌즈의 두꺼운 쪽으로 꺾이게 됩니다.

➔ 렌즈의 종류

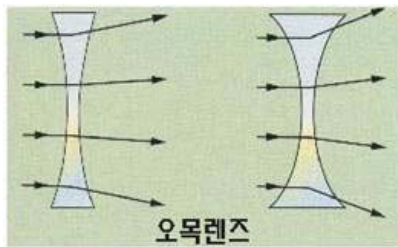
① 볼록렌즈(수렴렌즈)

렌즈의 양쪽 끝보다 가운데 부분이 두꺼운 렌즈를 볼록렌즈라 합니다. 빛을 한 점에 모으는 성질이 있으며, 물체가 확대되어 보입니다.

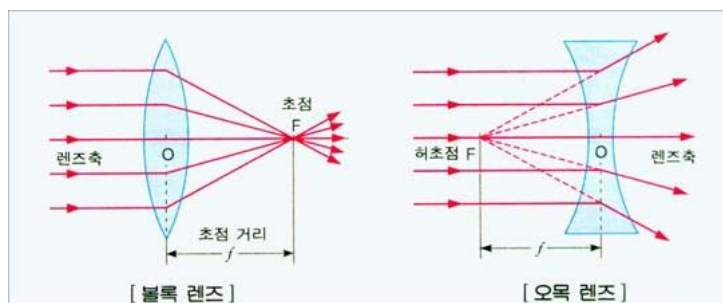


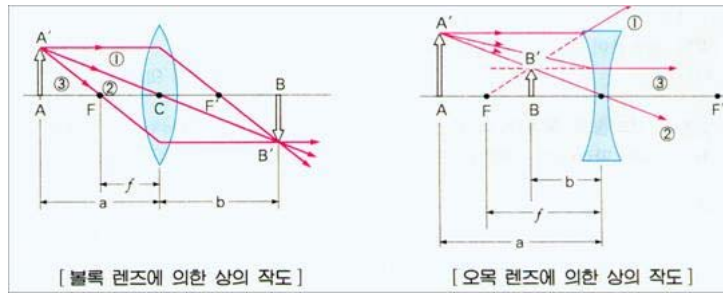
② 오목렌즈(발산렌즈)

렌즈의 가운데 부분이 양쪽 끝 부분보다 얇은 렌즈를 오목렌즈라고 합니다. 빛을 퍼지게 하는 성질이 있으며, 물체가 축소되어 보입니다.



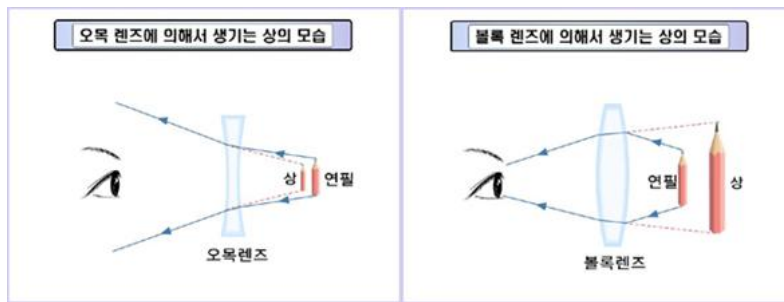
➔ 렌즈에 의한 상의 작도법





- ① 렌즈의 축에 평행하게 입사한 빛은 굴절 후 초점을 지나거나(볼록렌즈), 초점에서 나온 것처럼 진행한다(오목렌즈).
- ② 렌즈의 중심 C를 지나가는 빛은 그대로 직진한다.
- ③ 렌즈의 초점을 지나는 빛(볼록렌즈) 또는 초점을 향하여 입사한 빛(오목렌즈)은 굴절 후 광축에 평행하게 나간다.

➔ 렌즈에 의한 상



➔ 렌즈의 공식

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}, \quad m = \frac{b}{a}$$

a : 렌즈의 중심으로부터 물체까지의 거리, b : 렌즈의 중심으로부터 상까지의 거리
 f : 초점거리, r : 곡률 반지름, m : 배율
 f 는 오목 렌즈일 때 (-), b 는 허상이면 (-)이다.

➔ 상의 위치와 볼록렌즈의 이용

초점 안	똑바로 선 허상		돋보기
초점	상이 안 생김		평행광선



초점 밖	거꾸로 된 실상 물체와 렌즈의 거리가 증가할수록 상의 크기는 줄어 듭.		프로젝터 (확대된 상) 복사기 (같은 크기의 상) 카메라 (반으로 준 상)
------	--	--	--

➔ 볼록렌즈의 특징과 이용

- (1) 나란한 빛은 한 점에 모인다 : 레이저 빛을 한 점에 모아서 용접 등에 사용.
- (2) 초점에서 출발한 빛은 나란히 나아간다 : 손전등 앞이나 탐조등 앞에 달아서 빛이 멀리까지 가게 함.
- (3) 가까이 있는 물체는 크게 보인다 : 확대경으로 사용.
- (4) 멀리 있는 물체의 모습이 스크린에 생긴다 : 사진기, 환등기, 영화 등에 사용.
 - 카메라 : 여러 장의 렌즈를 이용하여 물체를 카메라의 필름에 상을 맺게 하는 장치
 - 현미경 : 렌즈를 이용하여 아주 작은 물체를 확대하여 보는 장치
 - 망원경 : 렌즈를 이용하여 멀리 떨어진 물체를 크고 똑똑하게 볼 수 있도록 만든 장치

➔ 거울과 렌즈의 비교

종류	오목 거울	볼록 거울
모양	반사면이 오목	반사면이 볼록
성질	반사된 빛을 모음	반사된 빛은 퍼져 나감
초점	빛이 거울축에 나란히 입사하면 반사광선은 모두 초점(F)에 모임	빛이 거울축에 나란히 입사되면 반사광선은 볼록거울 뒤의 한 점인 허 초점(F)에서 나오는 것처럼 진행
용도	자동차의 전조등, 등대, 손전등	굽은 도로의 거울

➔ 오목거울과 볼록거울의 성질

종류	볼록 렌즈	오목 렌즈
모양	양끝보다 가운데 부분이 두꺼운 렌즈	양끝보다 가운데 부분이 얇은 렌즈
성질	평행한 빛을 모으는 성질	평행한 빛을 퍼지게 하는 성질
상의 크기	물체가 확대되어 보임	물체가 축소되어 보임
초점	볼록렌즈의 뒤쪽에 위치	오목렌즈의 앞쪽에 위치
용도	돋보기(원시용 안경), 카메라, 천체 굴절 망원경, 현미경	근시용 안경



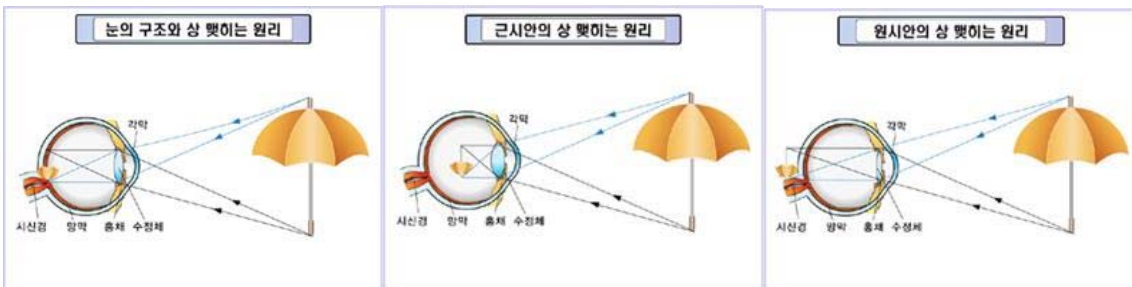
➔ 볼록렌즈와 오목렌즈의 성질(거울과 렌즈 비교)

오목거울 - 볼록렌즈

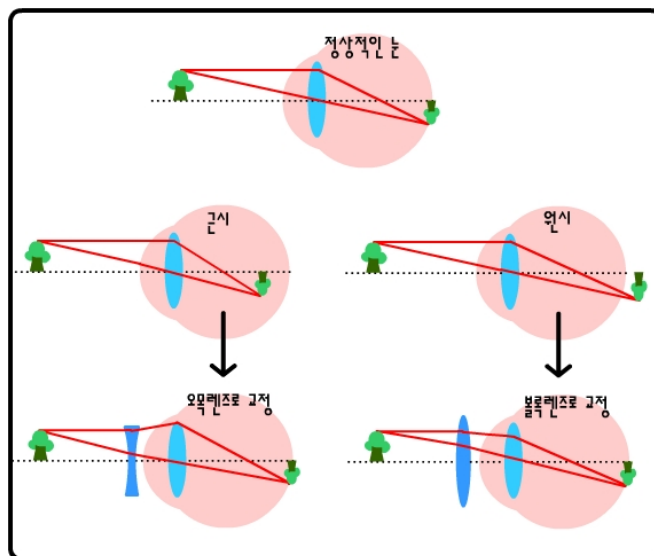
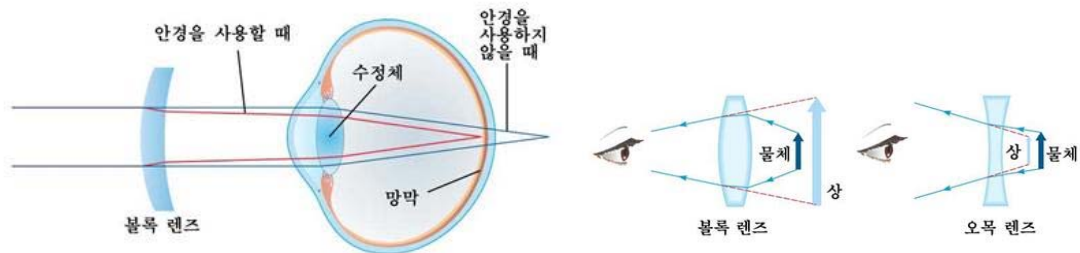
볼록거울 - 오목렌즈

➔ 안경을 쓰면 왜 더 잘 보일까?

- 정상안 : 물체가 눈의 렌즈에서 굴절하여 망막에 상을 만듦
- 근시 : 상이 망막의 앞쪽에 맺히는 눈의 이상
- 원시 : 상이 망막의 뒤쪽에 맺히는 눈의 이상



➔ 원시의 교정(볼록렌즈 안경)



— 출처 : 케이맥(주) 멀티미디어 교육 자료



 예시 답안

[풀어 보기 1]

$$S(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{hk}{n}\right) \cdot \frac{h}{n} = \int_0^h f(x) dx$$

이므로 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$S(2h) = \int_0^{2h} f(x) dx = [F(x)]_0^{2h} = F(2h) - F(0)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+2h) - F(0)}{2h} \times 2 = 2F'(0) = 2f(0)$$

[풀어 보기 2]

$$V(x) = \frac{1}{2} \times \{1 + (1 + 2\sin\theta)\} \times \cos\theta \times 8$$

$$V(x) = 8(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)$$

$$V'(x) = 8(1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta) = 0 \text{ 이면 } \sin\theta = \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 부피는 최대가 된다.

$$\therefore V = 6\sqrt{3}, \quad V^2 = 108$$

[문제 2]

(1) 먼저 두 점 $(0, a)$, (L, b) 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{b-a}{L}x + a$$

이다. 따라서 x_k 에서 도선의 반지름 y_k 는 $y_k = \frac{b-a}{L}x_k + a$ 이다. 두께가 Δx 인 원기둥 조각의 저항 ΔR_k 은 제시문 [라]에 주어진 내용에 의해 다음으로 주어진다.

$$\Delta R_k = \rho \frac{\Delta x}{\pi y_k^2} = \rho \frac{\Delta x}{\pi \left(\frac{b-a}{L}x_k + a\right)^2}$$

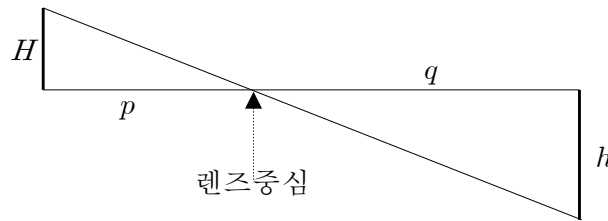
(2) 전체 길이가 L 인 도선의 저항 R 은 제시문 [다]와 [마]에 의해서 다음과 같이 구분구적법을 이용하여 구할 수 있다.



$$\begin{aligned}
 R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta R_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{b-a}{L} x_k + a \right)^{-2} \Delta x \\
 &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \left(\frac{b-a}{L} x + a \right)^{-2} dx = \frac{\rho}{\pi} \left[-\frac{L}{b-a} \left(\frac{b-a}{L} x + a \right)^{-1} \right]_0^L \\
 &= -\frac{\rho L}{\pi(b-a)} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right\} = \frac{\rho L}{\pi ab}.
 \end{aligned}$$

[문제 3]

(1) 제시문 [바]의 [그림 4]로부터 아래 그림을 얻고 삼각형의 닮은꼴을 이용하면 $H:h=p:q=1:3$ 이다.



따라서 $q=3p$ 이고 이를 공식 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 에 대입하면 $\frac{1}{p} + \frac{1}{3p} = \frac{1}{f}$ 이 된다. 따라서 $p = \frac{4}{3}f$, $q = 4f$ 이다.

(2) 물체에서 실상까지의 거리는 $p+q$ 이고 제시문 [바]에 의하여 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 이므로

$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{pf}{p-f}$ 이다. 따라서 $p+q$ 를 p 에 관한 식으로 나타낸 것을 $G(p)$ 라 하면 다음과 같다.

$$G(p) = p+q = p + \frac{fp}{p-f} = \frac{p^2}{p-f}$$

$G(p)$ 가 최소가 될 때의 p 의 값을 구하기 위하여 이를 p 에 대하여 미분하여 0이 되는 값을 찾자.

$$\frac{d}{dp} G(p) = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{p-f} \right) = \frac{2p(p-f) - p^2}{(p-f)^2} = \frac{p^2 - 2fp}{(p-f)^2} = \frac{p(p-2f)}{(p-f)^2} = 0$$

따라서 $G(p)$ 의 도함수가 0이 될 때의 p 는 $p=2f$ 이다. 여기서 $p < 2f$ 이면 $G'(p) < 0$ 이고 $p > 2f$ 이면 $G'(p) > 0$ 이므로 $p=2f$ 에서 $G(p)$ 는 최솟값을 갖는다.

이것을 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 에 대입하면 $q=2f$ 를 얻는다. 그러므로 물체에서 실상까지의 거리가 최소가 되는 p, q 의 값은 $p=q=2f$ 이다.



(3-2 별해)

$p + q = K$ 라고 놓자. 그러면 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 으로부터

$\frac{K}{f} = (p + q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 2 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ 이다. 여기서 $\frac{q}{p} > 0$, $\frac{p}{q} > 0$ 이므로 산술평균과

기하평균의 관계에 의하여 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2\sqrt{\frac{p}{q} \times \frac{q}{p}} \geq 2$ 가 된다. 따라서 $\frac{K}{f} \geq 4$ 가

되고 $K = p + q \geq 4f$ 가 된다. 즉, $p + q$ 의 최솟값은 $4f$ 보다 크거나 같게 된다. 그

런데 $p = q = 2f$ 이면 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ 을 만족시키고 $p + q = 4f$ 이므로 $p = q = 2f$ 일

때, $p + q$ 는 최솟값 $4f$ 를 갖는다.

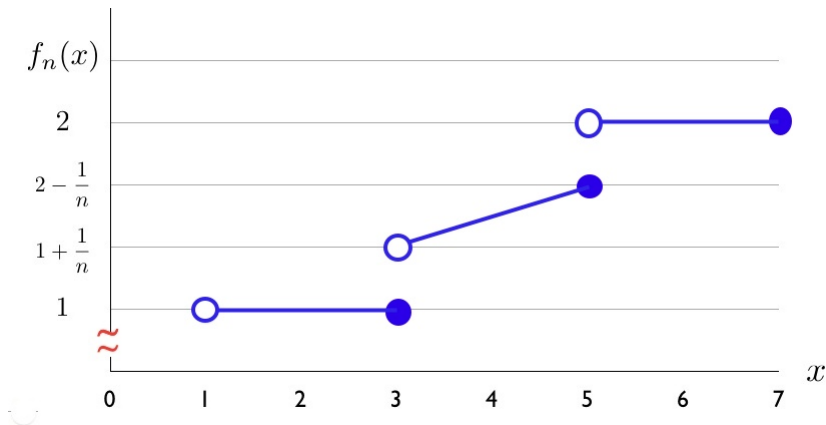


12

한국외국어대학교 수시 2

제시문

사물의 변화는 조절 가능한 입력변수 값(x)에 따른 반응변수의 값(y)으로 나타낼 수 있으며, 이는 연속함수 또는 불연속함수로 표현된다. 다음 그림은 집합 $\{x | x \in R, 1 < x \leq 7\}$ 에서 정의되는 함수의 수열 $y = f_n(x), n = 1, 2, \dots$ 을 나타낸다.



이때, 함수 $g_n(y)$ 는 $f_n(x)$ 의 역함수 형태로서 $g_n(y) = \max\{x | x = f_n^{-1}(y)\}$ 라고 정의한다. 예를 들어, $y = 2$ 일 때 $g_n(2) = \max\{x | 5 < x \leq 7\}$ 가 되어 그 값이 $g_n(2) = 7$ 이 된다.

- $g_1(1)$ 의 값을 풀이과정을 포함해 구하시오.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} \right)$ 의 값을 풀이과정을 포함해 구하시오.
- 어떤 함수 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 연속이 될 조건을 제시하고, $f_4(x)$ 가 $x = 3$ 에서 연속인지 불연속인지 보이시오.



제시문 분석

① 역함수의 정의

함수 f 에서 $(x, y) \in f$, 즉 $y = f(x)$ 인 임의의 y 에 대하여 단 하나의 x 가 존재한다면 (y, x) 로 이루어진 집합 g 를 함수 f 의 역함수라고 부른다. 기호로는 간단히 $g = f^{-1}$ 로 나타낸다.

② 최댓값과 최솟값

실수의 부분집합 $S (\neq \emptyset)$ 에 대하여 어떤 원소 $l (\in S)$ 가 임의의 $x (\in S)$ 에 대하여 $l \leq x$ 를 만족할 때, l 을 S 의 최솟값이라고 한다. 이것을 기호로 $l = \min S$ 라고 표시한다. 반대로, 어떤 원소 $m (\in S)$ 가 임의의 $x (\in S)$ 에 대하여 $x \leq m$ 를 만족할 때, m 을 S 의 최댓값이라고 한다. 이것을 기호로 $l = \max S$ 라고 표시한다.



논제 분석

① 다항함수의 그래프를 보고 함수식을 구할 수 있는가?

다항함수는 상수함수, 일차함수, 이차함수 등을 말하는데 일차함수는 2개의 점을 이용하여 그 일반식을 구할 수 있고, 이차함수는 세 개의 점, 삼차함수는 4개의 점이나 그에 해당하는 조건을 가지고 구할 수 있다.

② 연속함수의 정의를 알고 있는가?

어떤 함수가 주어졌을 때, 그 함수의 극한값과 함숫값을 계산하여 연속함수인지 아닌지를 판별할 수 있다.

③ 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 를 $x = a$ 에서 미분계수라고 한다. 기호로는 $f'(a)$ 라고 표현하며, 기하학적인 의미는 $(a, f(a))$ 에서 접선의 기울기를 의미한다. 따라서 일차함수의 경우, 직선의 기울기가 미분계수가 된다. 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

**배경지식 쌓기****1. 직선의 방정식 구하기**

일차함수의 그래프는 직선이다. 이 때, 직선은 기울기와 한 점 또는 두 점의 좌표를 알면 구할 수 있다. 구체적으로 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2. 연속함수의 정의

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 가 성립할 때, 함수 $f(x)$ 를 $x = a$ 에서 연속이라고 한다. 위의 명제가 의미를 가지기 위하여 좀더 세밀하게 분석하면 첫째, 극한값이 존재해야 하며 즉, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 이러야 한다. 둘째, $f(a)$ 가 정의되어야 하며 셋째, 앞에서 정의한 함숫값과 극한값이 같아야 함을 의미하는 것이다.

3. 미분계수 구하기

구체적으로 함수 $y = f(x)$ 의 미분계수를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ 이므로}$$

$f(x) = x^2$ 인 경우, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a$ 임을 알 수 있다. 같은 방법으로 $f(x) = ax + b$ 의 도함수 $f'(x) = a$ 임을 알 수 있다.

**풀어 보기**

1. 다음 두 점을 지나는 직선의 식을 구하시오.

$$\left(3, 1 - \frac{1}{n+1}\right), \left(5, 2 + \frac{1}{n+1}\right)$$

2. $f_n(x) = \frac{n+3}{2n+2}(x-3) + 1 - \frac{1}{n+1}$ 일 때, 다음 극한값을 계산하시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} \right\}$$



읽기 자료

함수의 출발은 두 집단 사이의 규칙성을 파악하는 데 있다. 즉, 정의역의 변화를 알면 치역의 변화를 알 수 있다. 이 변화의 규칙 중에서 가장 간단한 것이 일차함수와 상수함수이다. 이를 이용하여 자연의 변화나 운동하는 물체의 위치 등을 예측할 수 있다.

연속이라는 개념을 다루는 초기에는 함수가 ‘연속이다’라는 것을 그래프를 이용하여 직관적으로 다루었다. 즉, 해석학 초기의 수학자들은 그래프를 그릴 때, 떼지 않고 한 번에 그릴 수 있는 것을 연속이라고 정의하였다. 그러나 수학이 발전함에 따라 엄밀성을 추가하게 되었다. 실제로 초기의 수학자들은 연속함수와 평등연속함수의 성질을 구분하지 않고 증명하였으나 후기의 수학자들이 더 엄격한 정의를 완성하였다. 그런데 학교 수학에서 연속함수의 의미는 잘 다루어지지 않는다. 그래서 연속함수의 의미를 모른 채 맹목적으로 문제를 푸는 경우가 많다. 이제 연속함수의 의미를 다음과 같은 순서로 탐구하자. 먼저 연속함수로 무엇을 할 수 있는지 살펴보자.

연속함수라는 조건을 만족하면, 첫째, 중간값 정리를 이용할 수 있다. 수학에서 많이 다루는 응용 문제는 궁극적으로 방정식을 푸는 것으로 환원되는데 중간값 정리를 이용하면 효과적으로 방정식의 해를 구할 수 있다. 둘째, 최대·최소의 정리를 활용할 수 있다. 수학의 많은 문제는 주어진 조건에서 최댓값과 최솟값을 가지는 문제인데 연속함수는 폐구간에서 최댓값과 최솟값의 존재를 보장해 준다. 셋째, 연속함수는 리만적분이 가능한 충분조건이다. 즉 연속함수는 적분이 가능한 충분조건이 된다. 연속함수를 엄격하게 이해하려면 실수의 완비성에 대한 이해가 전제되어야 하므로 학교 수학에서는 연속함수를 직관적으로 다루는 것으로 제한하고 있다. 이상과 같은 중요성에서 연속함수는 함수를 분류하는 주요한 수단이 되고 있다.

연속함수의 정의는 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 인데 만약에 a 가 임의의 실수값이면 우리는 실수전체에서 연속에서 연속이라고 부른다. 이것을 모든 함수에 적용하여 증명하기는 쉽지가 않다. 그런데 다행히 우리가 다루어야 할 함수들은 대수적으로 결합되어 구성된 경우가 많다. 그렇다면 대수적으로 결합된 함수도 연속함수인가 하는 의문들이 들 것이다. 이에 대한 답은 다음의 정리에서 알 수 있다.

(정리 1) 두 함수 $f, g: (E \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 가 연속이면 다음과 같이 정의되는 함수는 모두 연속이다.

- | | |
|--|---|
| (1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ | (2) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ 단, α 는 실수 |
| (3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ | (4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 단, $g(x) \neq 0$ |
| (5) $ f (x) = f(x) $ | |

읽기 자료 참고 문헌 : 정상명. (2004). **교사를 위한 해석학**. 교우사.



 예시 답안

[풀어 보기 1]

두 점을 지나는 직선의 식이므로 먼저 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\left(2 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{5-3} = \frac{\frac{n+3}{n+1}}{2} = \frac{n+3}{2n+2}$$

따라서 기울기가 $\frac{n+3}{2n+2}$ 이고 점 $\left(3, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$ 을 지나는 직선의 식은

$$y - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+3}{2n+2}(x-3) \text{ 이다. 즉, } y = \frac{n+3}{2n+2}(x-3) + 1 - \left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ 이 된다.}$$

[풀어 보기 2]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} = f'_n(4) = \frac{n+3}{2n+2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

[문제 1]

그림에서 함수 $f_n(x)$ 를 구하면

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 3) \\ \frac{n-2}{2n}(x-3) + 1 + \frac{1}{n} & (3 < x \leq 5) \\ 2 & (5 < x \leq 7) \end{cases}$$

이므로

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 3) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} & (3 < x \leq 5) \\ 2 & (5 < x \leq 7) \end{cases}$$

따라서 $y=1$ 이면 $g_1(1) = \max\{x \mid 0 < x \leq 3\} = 3$ 이다.

[문제 2]

함수 $f_n(x)$ 는 $x=4$ 근방에서 미분가능(일차함수)하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} = f'_n(4) = \frac{n-2}{2n}$$

이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f_n(4+h) - f_n(4)}{h} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2}$

**[문제 3]**

함수 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 연속이라 함은

- (1) $f(x_0)$ 가 존재하고
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 가 존재하며
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

일 때이다. 그런데

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 3) \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & (3 < x \leq 5) \\ 2 & (5 < x \leq 7) \end{cases}$$

이고 $\lim_{x \rightarrow 3+0} f_4(x) = \frac{5}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f_4(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f_4(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f_4(x)$ 는 $x = 3$ 에서 불연속이다.



13

한양대학교 예시 문항

제 시 문

(가) 흔히 우리는 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 를 “ x 값이 한없이 증가하면 함수 $f(x)$ 의 값도 한없이 증가한다”는 뜻으로 이해한다. 이를 좀더 엄밀히 정의하면 다음과 같다.

임의로 주어진 실수 b 에 대해 “ $x > a$ 이면 $f(x) > b$ ”를 만족하는 적당한 실수 a 가 항상 존재하면 이를 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 로 나타낸다.

(나) 임의의 다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 에 대해, n 이 짝수이고 $a_n > 0$ 을 만족하면,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

가 성립한다. 한편, n 이 홀수이고 $a_n > 0$ 을 만족하면,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

가 성립한다.

(다) 실수 전체를 정의역으로 갖는 연속함수 $f(x)$ 와 세 실수 a, b, m 에 대해 $f(a) < m < f(b)$ 가 성립하면, $f(c) = m$ 를 만족하는 실수 c 가 a 와 b 사이에 항상 존재한다.

다음에 주어진 세 가지 명제의 참, 거짓 여부를 논하시오.

- (1) 계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 의 최고차수가 짝수이면, 방정식 $f(x) = 0$ 은 실수인 근을 가진다.
- (2) 계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 의 최고차수가 홀수이면, 방정식 $f(x) = 0$ 은 실수인 근을 가진다.
- (3) 계수가 모두 실수인 두 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 를 만족하면, $f(x)$ 의 최고차수는 짝수이다.



제시문 분석

① 발산의 정의

임의의 실수 $M > 0$ 에 대하여

i) “ $x > N$ 이면 $f(x) > M$ ”을 만족하는 적당한 실수 N 이 항상 존재하면 이를

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 로 표기한다.

ii) “ $x < N$ 이면 $f(x) < -M$ ”을 만족하는 적당한 실수 N 이 항상 존재하면 이

를 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 로 표기한다.

② 다항함수의 극한

다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 에 대하여

(i) n 이 짝수이고 $a_n > 0$ 이면, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이다.

(ii) n 이 홀수이고 $a_n > 0$ 이면, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이다.

③ 중간값 정리

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 실수 c 가 개구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.



논제 분석

① 최고차수가 짝수인 다항방정식은 실근이 존재하지 않을 수도 있다는 것을 설명할 수 있는가?

적절한 반례를 제시하여 주어진 명제가 거짓임을 설명하면 된다.

② 최고차수가 홀수인 다항방정식은 항상 실근이 존재한다는 것을 설명할 수 있는가?

다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 는 (n 은 홀수, $a_n > 0$) 실수 전체에서 연속이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 임을 확인하고, 제시문 (다)에서 언급한 중간값 정리를 활용하여 $f(x) = 0$ 을 만족하는 $x \in (-\infty, \infty)$ 가 항상 존재함을 설명하면 된다.

③ 계수가 실수인 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 을 만족하면 $f(x)$ 의 최고차수가 짝수가 되어야 함을 논리적으로 설명할 수 있는가?

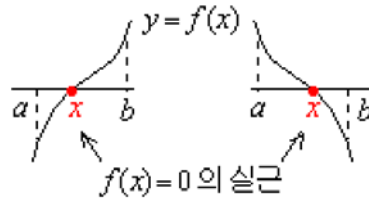
$f(x)$ 의 최고차수가 홀수라 가정하고 귀류법을 이용하여 증명한다. 논제 (2)에서 증명한 사실을 활용하여 논리를 전개하고 모순이 생김을 이끌어내면 된다.



배경지식 쌓기

→ 중간값 정리의 응용

구간 $a \leq x \leq b$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $f(a) \times f(b) < 0$ 을 만족하면, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 a 와 b 사이에 적어도 한 개 존재한다.



풀어 보기

1. 방정식 $\sin x - x \cos x = 0$ 은 π 와 $\frac{3}{2}\pi$ 사이에 실근을 가짐을 보여라.



읽기 자료

➔ 대수학의 기본 정리

자연수 체계는 모든 구 체계 중에서 가장 기본적이다. 자연수 체계는 셈에도 유용하지만 방정식의 풀이에는 적절하지 못하다. 자연수를 사용하면 다음과 같이 간단한 방정식도 풀 수 없다.

$$x + 5 = 0$$

이런 종류의 방정식을 풀기 위해서는 정수가 필요하게 된다. 그러나 정수도 또한 매우 빈약해서 다음과 같이 간단한 선형(또는 일차) 방정식의 풀이도 허락하지 않는다.

$$2x + 3 = 0$$

이런 종류의 방정식을 풀기 위해서는 유리수가 필요하게 된다. 유리수는 모든 선형방정식을 푸는 데는 적절하지만, 모든 이차방정식의 풀이를 허락하지 않는다. 예를 들면 이차방정식 $x^2 - 2 = 0$ 은 유리수로 풀 수 없다. 실수는 이런 이차 방정식을 풀기에 충분할 정도로 풍족하다. 그러나 실수로도 모든 이차방정식을 푸는 것은 가능하지 않다. 예를 들면, 방정식 $x^2 + 1 = 0$ 은 실수로 풀 수 없다. 이런 이차방정식을 풀기 위해서는 복소수가 필요하게 된다. 여기에 이르면, 수학에서 양식을 찾는 데 익숙해진 사람은 이 과정이 영원히 지속될 것이라고 생각할 수 있을 것이다. 좀더 풍부한 수체계로 이동할 때마다 여전히 풀 수 없는 또 다른 종류의 방정식을 찾았다. 그러나 이번에는 참이 아니다. 복소수에 도달하면, 이 과정이 멈추게 된다. 계수 a_0, \dots, a_n 가 복소수인 임의의 방정식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 은 복소수로 풀 수 있다.

이 중요한 결과를 대수학의 기본 정리(fundamental theorem of algebra)라고 부른다. 이 정리는 17세기 초에 추측되었지만 증명되지는 않았었다. 부정확한 증명이 달랑베르에 의해 1746년에 제시되었고 1749년에는 오일러에 의해 제시되었다. 최초의 정확한 증명은 1799년에 가우스에 의해 그의 박사 논문에 제시되었었다.

- 출전 : Keith Devlin(허민 외 옮김), 『수학 : 양식의 과학』 (경민사, 1996)



예시 답안

[풀어 보기 1]

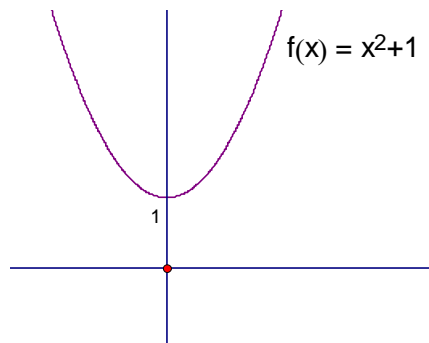
$f(x) = \sin x - x \cos x$ 로 놓으면, $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고,

$f(\pi) = \pi > 0, f(\frac{3}{2}\pi) = -1 < 0$ 이다. 그러므로 방정식 $\sin x - x \cos x = 0$ 은 π 와 $\frac{3}{2}\pi$ 사이에서 실근을 갖는다.

[문제 (1)]

계수가 모두 실수이고 최고차수가 짝수인 다항함수 $f(x)$ 중, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 존재하지 않는 경우가 있다. 예를 들면, $f(x) = x^2 + 1$ 은 계수가 모두 실수이고 최고차수가 짝수인 다항함수이지만 방정식 $x^2 + 1 = 0$ 을 만족하는 x 는 $x^2 = -1$ 이 되어야 하므로 이를 만족하는 실수 x 는 없다. 왜냐하면 모든 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같게 되기 때문이다.

방정식 $x^2 + 1 = 0$ 이 실근을 갖지 않음을 다음과 같이 설명할 수도 있다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 x 절편과 같은데 다음 그림과 같이 $f(x) = x^2 + 1$ 은 x 축과 만나지 않으므로 실근이 존재하지 않는다.



따라서 ‘계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 의 최고차수가 짝수이면, $f(x) = 0$ 은 실수인 근을 가진다.’는 명제는 거짓이다.

[문제 (2)]

다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 에서 $a_n > 0$ 이고 n 이 홀수이면, 제1문 (나)에서 언급하였듯이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 가 성립한다. 만일 n 이 홀수 이면서 $a_n < 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 가 성립하게 된다.

두 경우 모두 $f(x)$ 가 연속함수이기 때문에, $f(x)$ 가 0보다 큰 함숫값을 갖는 실수 a (즉, $f(a) > 0$)와 0보다 작은 함숫값을 갖는 실수 b (즉, $f(b) < 0$)가 존재한다. 그러



면 제시문 (다)에서 언급한 중간값 정리에 의하여 $f(x)$ 가 실수 전체를 정의역으로 갖는 연속함수이고 세 실수 $a, b, 0$ 에 대하여 $f(b) < 0 < f(a)$ 가 성립하므로 $f(c) = 0$ 을 만족하는 실수 c 가 a 와 b 사이에 항상 존재한다.

따라서 ‘계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 의 최고차수가 홀수이면, $f(x) = 0$ 은 실수인 근을 갖는다.’는 명제는 참이다.

[문제 (3)]

계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 를 만족할 때, $f(x)$ 의 최고차수가 홀수 n 이라고 가정하자. 문제 (2)에서 밝혔듯이 최고차수가 홀수인 다항함수 $f(x)$ 는 $f(x) = 0$ 인 실근을 적어도 하나 갖는다. 이를 a_1 이라 하자. 그러면 $f(a_1) = 0$ 이고, 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 이므로 $f(a_1^2 + a_1 + 1) = 0$ 이다. 여기서 $a_2 = a_1^2 + a_1 + 1$ 이라 하자. 그러면 $f(a_2) = 0$ 이므로 $f(a_2^2 + a_2 + 1) = 0$ 이다.

이 때, 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$, a_1 은 $f(x) = 0$ 인 실수로 정의하면 $a_n < a_n^2 + a_n + 1$ 이므로 이 무한수열은 증가수열로 서로 다른 무수히 많은 값을 갖게 되고, 이는 모두 $f(x) = 0$ 의 실근이 된다. 즉, $f(x) = 0$ 은 무수히 많은 실근을 갖게 된다. 하지만 $f(x) = 0$ 은 n (n 은 홀수)차 다항방정식으로 많아야 n 개의 실근을 가질 수밖에 없으므로 이와 모순이 된다.

따라서 ‘계수가 모두 실수인 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 를 만족할 때, $f(x)$ 의 최고차수는 짝수이다.’라는 명제는 참이다.

(3)의 다른 답안

$f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 를 만족하는 n 차 다항식 $f(x)$ 에서 n 을 홀수라 하자.

대수학의 기본 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 은 기껏해야 n 개의 근을 가진다. 또 n 이 홀수이므로 문제 2에 의해 실근 α 를 반드시 가진다. 즉 $f(\alpha) = 0$ 을 만족하는 실수 α 가 존재한다.

$f(x^2 + x + 1) = f(x)g(x)$ 가 성립하므로 $f(\alpha^2 + \alpha + 1) = f(\alpha)g(\alpha) = 0$ 이 되고 이것은 $\beta = \alpha^2 + \alpha + 1$ ($\alpha \neq \beta$)도 $f(x) = 0$ 의 근이 된다는 것을 의미한다.

즉, $f(\beta^2 + \beta + 1) = f(\beta)g(\beta) = 0$ 이다. 같은 방법으로 하면 $\gamma = \beta^2 + \beta + 1$ 도 $f(x) = 0$ 의 근이다. 즉 n 차방정식 $f(x) = 0$ (단, n 은 홀수)는 무수히 많은 해를 가진다. 이것은 대수학의 기본 정리에 모순이다.

따라서 n 은 짝수다. 즉, 주어진 명제는 참이다.



한양대학교 수시 2

제 시 문

(가) 암호란 통신문의 내용을 제삼자가 관독할 수 없도록 글자, 숫자, 부호 등으로 변형시킨 것인데 주로 군사적 목적이나 외교 통신, 전자상거래 등에 많이 이용된다. 다음과 같은 방식으로 만들어지는 암호를 생각해 보자. 먼저 알파벳 A부터 Z와 !, ?에 다음과 같이 숫자를 대응시킨다.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

이제 key를 고정된 양의 정수 k 라 하고, 다음과 같은 변환 규칙에 의해 암호화한다.

변환 규칙 : 숫자 n 에 대응하는 문자 $\rightarrow n^k$ 을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자

예를 들어 key가 3인 경우, D에 대응하는 숫자가 4이므로 4^3 을 29로 나눈 나머지는 6이 된다. 따라서 D는 6에 대응하는 문자 F로 변환된다.

(나) 두 정수 a, b 와 양의 정수 m 에 대해, $a-b$ 가 m 의 배수(즉, $a-b=mq$ 인 정수 q 가 존재)일 때, a 와 b 는 법 m 에 대해 합동이라 하고 $a \equiv b \pmod{m}$ 으로 표기한다. 일반 등식에서와 같이 합동식에서도 다음 법칙들이 성립한다.

(i) $a \equiv a \pmod{m}$

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $b \equiv a \pmod{m}$

(iii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $b \equiv c \pmod{m}$ 이면, $a \equiv c \pmod{m}$

(iv) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 이면, $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ 이고 $ac \equiv bd \pmod{m}$

(v) $ac \equiv bc \pmod{m}$ 이고 c 와 m 이 서로소이면, $a \equiv b \pmod{m}$



(1) key가 3일 때와 key가 2일 때, 통신문 'HUNT'를 변환하여 얻어진 암호문을 비교하고 발생하는 문제에 대해 논하시오.

(2) 아래 표와 (나)의 법칙들을 이용하여 4^{28} 을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하고, 임의의 정수 a 가 29의 배수가 아닐 때 a^{28} 을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명하시오.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$4x \pmod{29}$	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25

(여기서 $4x \pmod{29}$ 는 $4x$ 를 29로 나눈 나머지를 뜻함.)

(3) 암호문을 정확하게 해독하기 위해 key가 가져야 할 조건을 논하시오.



제시문 분석

- ① 암호의 뜻을 알고 제시문 (가)에서 주어진 <표>를 이용하여 제시된 암호화 변환 규칙의 이해와 적용

암호화 key에 따른 변환 규칙을 (예)의 사례를 활용하여 암호화하는 과정을 이해하여 논제를 해결하는 데 유용한 정보로 이용하도록 한다.

- ② 합동에 대한 정의와 합동식의 법칙 활용

합동의 정의와 합동식에 적용되는 법칙을 제시하고 있다. 정상적인 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 수학 영역에 대해 언급하는 소재의 경우, 논제를 해결하는데 도움이 될 수 있도록 제시문의 내용을 자세하게 설명하거나 예를 들어 제공하므로 제시문의 내용을 충분히 이해하는 것이 중요하다.



논제 분석

- ① 제시문 (가)를 이용하여 key가 2일 때, 3일 때, 통신문 'HUNT'를 변환 할 수 있는가, 그 결과를 비교하여 발생하는 문제점을 비교 설명할 수 있는가?

암호화 key가 2일 때, key가 3일 때, 제시문의 변환 규칙을 이용하여 암호화 과정을 직접 확인하고 key가 2일 때 서로 다른 문자가 하나의 문자로 같아지는 사실을 언급하면 된다. 또한 이 사례를 일반화(key값이 짝수, 홀수)하여 논제 (3)을 해결하는데 이용하도록 한다.

- ② 제시문 (나)의 합동식에 대한 법칙과 논제 (2)에서 주어진 <표>를 이용하여 (i) $4^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ 임을 설명하고, (ii) 임의의 정수 a 가 29의 배수가 아닐 때 a^{28} 을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명할 수 있는가?

논제 (2)의 표를 이용하여 x 와 $4x \pmod{29}$ 의 대응관계가 일대일 대응관계임을 파악하고 제시문 (나)의 법칙을 이용하여 $4^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ 가 성립하는 과정을 보이면 된다. 또한 임의의 정수 a 가 29의 배수가 아닐 때 a^{28} 을 29로 나눈 나머지에 대해 설명하는 경우 1, 2, 3, ..., 28은 29와 각각 서로소이므로 $a, 2a, 3a, \dots, 28a$ 를 29로 나눈 나머지는 1, 2, ..., 28과 일대일 대응임을 밝히고 제시문 (나)의 법칙을 이용하여 $a^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ 이 성립하는 과정을 논리적으로 설명하면 된다.

- ③ 제시문 (가), (나)와 논제 (1), (2)에서 얻은 결론을 이용해서 암호문을 정확하게 해독하기 위해 하여 key가 가져야 할 조건을 논리적으로 제시할 수 있는가?

<제시문>과 <논제>에서 적용되는 암호화 과정의 경우 암호문을 정확하게 해독하려면 '변환 규칙 숫자 n 에 대응하는 문자 $\rightarrow n^k$ 을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자가 일대일 대응이 되어야 한다.'는 전제를 도출해 내고 이를 일반화 과정에서



나타나는 문제 즉 k 가 짝수일 때, k 가 홀수일 때 일대일 대응관계 성립여부를 판정하여 ‘변환규칙 숫자 n 에 대응하는 문자 $\rightarrow n^k$ 을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자가 일대일 대응이 되어야 하고 이때 key가 홀수여야 한다.’는 결론을 논리적으로 설명하면 된다.

배경지식 쌓기

➔ 연산테이블 만들기(mod 5)

a 가 5의 배수가 아닌 자연수 일 때, $a \equiv r \pmod{5}$ (단 r 은 $1 \leq r < 5$ 인 정수)

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

※ 위 표는 각각 곱의 결과를 5로 나눈 나머지를 배열한 것임.

- (1) 관찰결과를 토론해 보자.
- (2) 대응관계

➔ 페르마의 소정리(Fermat's Little Theorem)

p 가 소수이고, a 가 p 의 배수가 아닌 자연수이면 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

[증명 1]

집합 A 와 B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\} \pmod{p}$$

집합 B 의 임의의 두 원소를 ma, na 라 하자. (m, n 은 A 의 원소)

$1 \leq i < j \leq p-1$ 에 대하여 $ia \equiv ja \pmod{p}$ 라고 가정하면, $(i-j)a \equiv 0 \pmod{p}$ 즉, $(i-j)a$ 는 p 의 배수가 된다. 그런데, p 는 a 의 약수가 아니고 $1 \leq i < j \leq p-2$ 에서 p 는 $(j-i)$ 의 약수가 아니므로 서로 모순이 된다.

따라서 A 의 각 원소들은 B 의 각 원소들과 일대일 대응관계가 된다.

그러면 A 의 각 원소들의 곱은 B 의 각 원소들의 곱과 같다.

즉, $(p-1)! \equiv (p-1)!a^{p-1} \pmod{p}$ 이고 p 가 소수이므로 $(p-1)!$ 과 p 는 서로소이다.

그러므로 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 이다.

[증명 2] 조합론을 이용한 증명

어떤 목걸이를 만들기 위해 먼저 p 개의 진주를 원형으로 배열한다고 하자. 그 진주들을 a 가지 색으로 칠하는 방법의 수를 생각하자(뒤집는 경우 생략).



(i) 모든 진주를 같은 색으로 칠하는 방법 : a 가지

(ii) 나머지 경우는 $\frac{a^p - a}{p}$ 가지이다. 왜냐하면 a 개의 진주를 p 가지로 색칠하는 p 가지의 방법에서 모두 같은 경우를 제외한 $a^p - a$ 가지 경우에서 원형으로 배열되어 있으므로 각각의 경우를 소수 p 로 나누어진 것이 된다.

따라서 $\frac{a^p - a}{p}$ 는 정수가 된다.

따라서 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 는 성립하게 되고 p 가 a 의 약수인 경우를 제외하면 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 라는 것을 알 수 있다. 이것은 페르마의 소정리와 일치하므로 증명된다.

페르마의 소정리를 소수 p 가 아닌 일반 자연수로 확장할 수 있을까? 페르마 소정리에 대해 직관력이나 독창성은 다소 떨어지지만 일반적인 자연수 범위로 일반화한 오일러 정리가 있다.

➔ 합동식의 성질

“ $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 이면, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ 이고 $ac \equiv bd \pmod{m}$ 이다.”

[증명]

$a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 라 하면, 정수 k_1, k_2 에 대해

$$a - b = k_1m, \quad b - c = k_2m \text{ 이고 } a - c = (a - b) + (b - c) = km + hm = (k + h)m \text{ 이다.}$$

따라서 $a \equiv c \pmod{m}$ 이다.

같은 방법으로 $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 라 하면

$$a - b = k_1m, \quad c - d = k_2m \quad (k_1, k_2 \text{ 정수}) \text{에 대해}$$


$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = k_1m + k_2m = (k_1 + k_2)m \text{ 이므로 } a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

이 성립한다.

$$\text{한편, } ac = (b + k_1m)(d + k_2m) = bd + (bk_2 + dk_1 + k_1k_2m)m \text{에서}$$

$bk_2 + dk_1 + k_1k_2m$ 은 정수이므로 $ac - bd$ 은 m 으로 나누어 떨어진다.

따라서 $ac \equiv bd \pmod{m}$ 이다.

 **풀어 보기**

1. 3^{100} 을 7로 나눈 나머지를 구하시오.

2. $8^{12312} \equiv 9 \pmod{11}$ 임을 보이시오.



입기 자료

암호의 역사에서 커다란 획을 그은 사건은 ‘에니그마’(enigma)라는 암호 기계의 발명이다.

에니그마는 ‘수수께끼’라는 뜻으로, 아무도 풀지 못할 것이라 해서 붙여진 이름이다. 1923년 독일 엔지니어 쉘비우스는 폴란드 근교의 한 농촌에서 에니그마를 만들었다. 그러나 1차 대전이 끝날 때까지 암호문의 중요성은 널리 인식되지 않은 상황이었다. 그 결과 쉘비우스는 에니그마를 몇 대 못 팔고 세상을 떠났다고 한다.

에니그마의 진가는 제2차 세계대전에서 유감없이 발휘됐다. 대표적으로 독일이 유럽을 침공할 때 모든 지령문은 에니그마를 통해 암호화됐다. 에니그마의 구조는 타자기와 비슷한데, 크게 키보드, 플러그보드, 회전판, 라이트보드로 구성된다. 키보드에서 한 글자를 치면 전선을 타고 전기신호가 플러그보드의 한 곳으로 전해진다. 이 곳에서 전기신호는 회전판으로 이동한 뒤 다시 플러그보드로 돌아온다. 이후 전기신호가 라이트보드로 가면 해당 자판에 불이 들어온다. 이런 복잡한 과정을 거쳐 글자 하나하나가 암호화되기 때문에 이를 해독하기란 여간 힘든 일이 아니다. 더욱이 독일군은 매일 전선의 배치를 달리해 새로운 암호문을 만들어냈다.

전쟁 초기 유럽의 국가들은 독일의 암호문을 사전에 입수해도 도대체 무슨 뜻인지 알 수 없었다. 특히 영국 런던은 독일의 연이은 폭격에 전혀 대비하지 못했다. 1939년 영국 정부는 런던 근교의 블레츨레이 공원에 암호 학교를 세웠다. 1천여 명의 연구원이 참여한 이 학교의 목적은 오직 하나, 독일의 에니그마 암호문을 해독하는 것이었다. 수학의 천재 튜링(1912~1954)을 비롯한 당대의 과학자들이 몰려들었다. 암호문을 번역하는 일은 무척 지루한 작업이었다. 여러 암호문에 나타난 일정한 패턴을 서로 비교해 분석하고, 그 결과를 복잡한 과정을 통해 통계적으로 처리했다. 시간이 지나면서 암호문이 조금씩 번역되기 시작하자 독일군은 에니그마를 더욱 복잡하게 만들었다. 초창기에 3개를 사용하던 회전자를 12개까지 늘렸다.

튜링은 이 복잡한 암호문을 더 이상 손으로 푸는 것은 무리라고 판단했다. 튜링의 아이디어를 바탕으로 1943년 2천4백 개의 진공관을 가진 전자식 해독기 ‘콜로수스’(Colossus)가 만들어졌다. ‘거인’이란 의미인 이 기계는 이름에 걸맞게 1초에 2만 5천자를 번역해냈다. 독일의 에니그마는 위력을 상실할 수밖에 없었다.

암호문을 100% 해독한다는 것은 사실 불가능하다. 90% 이상 암호문을 해독한다고 해도 결정적으로 중요한 단어 하나를 해독하지 못한다면 아무 소용이 없다. 이 순간에 또 다른 기지가 필요하다. 1942년 미국이 기세등등한 일본 해군을 격파한 미드웨이 해전에서 이런 기지가 발견된다.

미드웨이섬 일대는 미 대륙과 아시아 대륙의 중간 지점이어서 미국과 일본 모두에게 전략적으로 가치가 높았다. 미국은 일본의 암호문을 90% 이상 해독하고 있던 상황이어서 곧 일본의 대대적인 공격이 감행될 것을 알고 있었다. 그리고 공격 지점이 미드웨이일 것이라 짐작했다. 하지만 정확한 증거가 없었다.



5월 어느 날 미국은 일본의 암호문을 해독했는데, 그 내용은 ‘공격 지점은 AF’이었다. 미국은 AF가 어디인지 알기 위해 미끼를 던졌다. 일부러 “미드웨이의 증류수 공장 물 부족. 보급 필요”라는 문장을 일본이 포착할 수 있도록 무선으로 송신한 것이다. 물이 없다면 일본으로서는 더없이 좋은 공격 기회인 셈이다. 만일 일본이 미드웨이를 공격하려 했다면 즉시 새로운 암호문이 전달될 상황이었다.

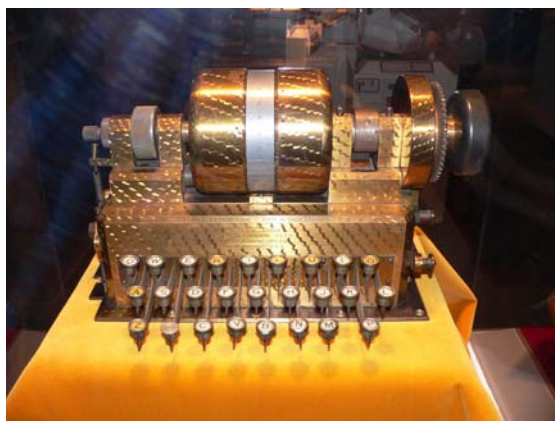
일본군은 미군의 미끼에 걸렸다. 일본군이 전달한 “적군 AF에서 물 부족”이라는 암호문이 미군에 포착된 것이다. ‘AF = 미드웨이 섬’이라는 결론이 쉽게 내려졌다. 그 결과 6월 5일 야마모토 사령관이 이끈 막강한 일본 함대는 미드웨이 해상에서 미리 기다리던 미국 함대에 의해 완전히 괴멸했다.

당시 일본군이 사용하던 암호 작성기 역시 에니그마였다. 독일군이 주로 사용한 암호문에 비해 난수(亂數)가 복잡하게 조합돼 있다는 점이 달랐다. 즉 에니그마로 암호화된 글자를 특정 지침에 따라 숫자로 다시 변환시킨 형태였다.

미드웨이 해전에서 대패한지 1년 후 일본은 암호문이 해독된 탓에 또 한 번 커다란 타격을 받았다. 야마모토 사령관이 피습된 사건이었다. 1943년 4월 18일, 야마모토 사령관은 북 솔로몬 제도에서 전투중인 장병들의 사기를 고취시키기 위해 시찰 계획을 세웠다. 이 내용은 각 기지에 암호문으로 통보됐다. 이때 미 해병대 소속의 한 중령은 이 암호문을 해독해 상부에 보고했다. 하지만 미군은 야마모토가 탑승한 항공기를 격추시킬지 여부를 두고 고민에 빠졌다. 야마모토보다 더 유능한 사령관이 부임할 가능성이 있고, 미국이 일본의 암호문을 해독하고 있다는 사실을 일본에게 알려주는 꼴이었기 때문이었다. 하지만 미군은 야마모토가 무척 유능하고 치밀한 전략가란 점을 중시하고 일단 그를 제거하는 것이 옳다고 판단했다. 부하 장병 시찰을 떠난 야마모토 사령관의 비행기는 격추됐으며, 미군이 우려한 것과 달리 야마모토보다 유능한 후계자는 나타나지 않았다.



알란 튜링



이니그마(복제품)

<자료출처> 위키백과(<http://ko.wikipedia.org>)



 예시 답안

[풀어 보기 1]

<풀이1> $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ 이므로 $3^{100} \equiv (3^2)^{50} \equiv 2^{50} \pmod{7}$ 이다. 그런데 $2^{50} \equiv 32^{10} \equiv 4^{10} \pmod{7}$ 이고 $4^{10} \equiv 16^5 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$ 이다. 따라서

$$3^{100} \equiv 4 \pmod{7}$$

이다.

<풀이2> 페르마의 소정리에 의해 $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ 이므로

$$\therefore 3^{100} \equiv (3^6)^{16} \times 3^4 \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod{7}$$

[풀어 보기 2]

<풀이> 페르마의 소정리에 의하여 $8^{10} \equiv 1 \pmod{m}$ 이다.

따라서 $8^{12312} \equiv (8^{10})^{1231} \cdot 8^2 \equiv 8^2 \equiv 9 \pmod{11}$ 이다.

[문제 1]

통신문 'HUNT'에 대응하는 숫자는 각각 8, 21, 14, 20 이다. 이 때, key가 2일 때

$$8^2 = 64 = 29 \times 2 + 6$$

$$21^2 = 441 = 29 \times 15 + 6$$

$$14^2 = 196 = 29 \times 6 + 22$$

$$20^2 = 400 = 29 \times 13 + 23$$

이므로 통신문 'HUNT'는 숫자 6, 6, 22, 23 에 대응하는 'FFVW'로 변환된다.

또 key가 3이면

$$8^3 = 8(29 \times 2 + 6) = 29 \times 16 + 48 = 29 \times 17 + 19$$

$$21^3 = 21(29 \times 15 + 6) = 29 \times 315 + 126 = 29 \times 319 + 10$$

$$14^3 = 14(29 \times 6 + 22) = 29 \times 84 + 308 = 29 \times 94 + 18$$

$$20^3 = 20(29 \times 13 + 23) = 29 \times 260 + 460 = 29 \times 275 + 25$$

이 되므로 숫자 19, 10, 18, 25에 대응하는 'SJRY'로 변환된다.

이 때, 문제점은 key가 2일 때, 서로 다른 문자 H와 U가 모두 F로 변환되는 문제가 발생하므로 이를 해독해도 정확한 뜻을 확인하기가 어렵다.

[문제 2]

먼저 4^{28} 을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하면 다음과 같다.

문제(2)의 표를 이용하면 $4^3 \equiv 6 \pmod{29}$ 이다. 여기서 제시문 <나>의 법칙 (iv)에 의해



$$4^6 \equiv 6 \times 6 \equiv 7 \pmod{29}$$

$$4^{12} \equiv 7 \times 7 \equiv 20 \pmod{29}$$

이므로 $4^{13} \equiv 4 \times 20 \equiv 22 \pmod{29}$ 가 되고 $4^{14} \equiv 4 \times 22 \equiv 1 \pmod{29}$ 이다. 따라서

$$4^{28} \equiv 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{29}$$

가 된다. 다음 임의의 정수 a 가 29의 배수가 아닐 때 a^{28} 을 29로 나눈 나머지를 설명하면 아래와 같다.

임의의 정수 a 가 29의 배수가 아니라 하자. 1, 2, 3, ..., 28은 29와 각각 서로소이므로 $a, 2a, 3a, \dots, 28a$ 를 29로 나눈 나머지는 1, 2, ..., 28 과 일대일 대응한다. 따라서

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 28 &\equiv a \times 2a \times 3a \times \dots \times 28a \pmod{29} \\ &\equiv a^{28} (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 28) \pmod{29} \end{aligned}$$

그런데 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 28$ 은 29와 서로소이므로 제시문<나>의 법칙(v)에 의해

$$a^{28} \equiv 1 \pmod{29}$$

[문제 3]

암호문을 정확하게 해독하려면 변환규칙 숫자 n 에 대응하는 문자 $\rightarrow n^k$ 을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자가 일대일 대응이 되어야 한다.

여기서 $n \neq m$ 에 대해 $n^k \equiv \alpha \pmod{29}$, $m^k \equiv \beta \pmod{29}$

(단, n, m, α, β 는 28이하의 자연수)라 하면 $n^k = 29p + \alpha$, $m^k = 29q + \beta$ (단, p, q 는 자연수)이므로 $\alpha = n^k - 29p$, $\beta = m^k - 29q$ 가 된다.

따라서 $\alpha - \beta = n^k - m^k - 29r$ (단, r 은 정수)이다. 여기서 k 가 짝수이면 $n^k - m^k$ 는 반드시 인수 $n+m$ 을 가지고 $m+n=29$ 인 자연수 m, n 에 대해서는 $n^k - m^k$ 는 29의 배수가 되므로 $\alpha \equiv \beta \pmod{29}$ 가 된다. 즉, 변환 규칙은 일대일 대응이 아니다. 따라서 암호문을 정확하게 해독하려면 key k 가 홀수가 되어야 한다.

또 key k 가 $28 = 2^2 \cdot 7$ 의 약수인 7이 되면 $16^7 \equiv 2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ 이 되어 이것 역시 key로 사용하기가 부적절하다.

이상을 정리해 보면, 암호문을 정확하게 해독하기 위해 key가 가져야 할 조건은 28과 서로소인 자연수이다.

만들어 주신 분들



기 획

이 종 수	부산광역시교육청	교 육 정 책 국 장
김 영	부산광역시교육청	중 등 교 육 과 장
김 대 성	부산광역시교육청	중등교육과 장학담당장학관
이 호 중	부산광역시교육청	중 등 교 육 과 장 학 사



집필위원

강 진 희	만 덕 고 등 학 교
김 기 현	부 산 동 고 등 학 교
김 정 수	만 덕 고 등 학 교
김 현 미	화 명 고 등 학 교
박 재 희	부 산 디 자 인 고 등 학 교
박 철 호	부 산 백 양 고 등 학 교
정 순 진	만 덕 고 등 학 교



검토위원

김 주 원	경 남 양 주 중 학 교
오 정 임	낙 동 고 등 학 교

수리논술 나침반

발 행 일 2009. 6. 15.

편집 · 발행 부산광역시교육청

이 책자는 부산광역시대학진학지원센터 홈페이지에서 파일을 다운받아 사용할 수 있습니다.
홈페이지주소 <http://jinhak.pen.go.kr/>(대학별고사/논·구술·면접 기출문제)