

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 B형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$B = (A+B) - A$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 B 의 모든 성분의 합은 7이다.

<답> ①

2.

출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 28n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 28n} - n)(\sqrt{n^2 + 28n} + n)}{\sqrt{n^2 + 28n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{28n}{\sqrt{n^2 + 28n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{28}{\sqrt{1 + \frac{28}{n}} + 1}$$

$$= 14$$

<답> ②

3.

출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = \sqrt{7} \sin x - 3 \cos x$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \sin x - \frac{3}{4} \cos x \right)$$

$$= 4 \sin(x + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \sin \alpha = -\frac{3}{4} \right)$$

이때, $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq f(x) \leq 4$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 4이다.

<답> ④

4.

출제의도 : 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} \leq 0$$

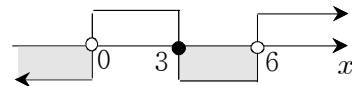
좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{2(x-3)}{x(x-6)} \leq 0$$

양변에 $x^2(x-6)^2$ 을 곱하면

$$2x(x-3)(x-6) \leq 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq 6$$

x 의 범위에 따라 부등식의 좌변의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 부등식의 해는

$$x < 0 \text{ 또는 } 3 \leq x < 6$$

이므로 부등식을 만족시키는 양의 정수 x 는 3, 4, 5이고 개수는 3이다.

<답> ③

5.

출제의도 : 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각방정식을 풀 수 있는가?

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 B형 정답 및 해설

$$\sin 2x - \sin x = 4 \cos x - 2$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 4 \cos x - 2$$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 2(2 \cos x - 1)$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

$$\text{따라서, } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는}$$

$$x = \frac{5}{3}\pi \text{ 이므로 모든 합은 } 2\pi \text{이다.}$$

<답> ③

6.

출제의도 : 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

주사위의 눈의 수 중 3의 배수는 3, 6
이므로 주사위 한 개를 한 번 던져서
3의 배수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$a+b=6$ 인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=4, b=2$ 인 경우

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{6}{3^7}$$

(ii) $a=3, b=3$ 인 경우

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{3^7}$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6}{3^7} + \frac{8}{3^7} = \frac{14}{3^7}$$

<답> ⑤

7.

출제의도 : 유리방정식의 해를 구할 수 있는가?

$f(x)=t$ 로 치환하면 주어진 방정식은

$$t - \sqrt{t-3} = 9$$

$$t-9 = \sqrt{t-3} \quad \dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하면

$$(t-9)^2 = t-3$$

$$t^2 - 19t + 84 = 0$$

$$(t-7)(t-12) = 0$$

$$\therefore t = 7 \text{ 또는 } t = 12$$

그런데 $t=7$ 은 ①에서 무연근이므로
 $t=12$ 이다.

방정식 $f(x)=12$ 의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=12$ 의 교점의 개수와 같으므로 주어진 그래프에서 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

<답> ①

8.

출제의도 : 중복조합의 수를 방정식에 활용할 수 있는가?

$x'=x+1, y'=y+1, z'=z+1$ 로 놓으면 x, y, z 가 -1 이상의 정수이므로 x', y', z' 은 0 이상의 정수이다.

이때, 주어진 방정식에 대입하면

$$(x'-1) + (y'-1) + (z'-1) = 4$$

$$x' + y' + z' = 7$$

이때, 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 위의 방정식을 만족하는 순서쌍

(x', y', z') 의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

<답> ③

9.

출제의도 : 타원의 방정식을 이해하고 있는가?

$$\text{타원 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{에서 } \overline{OA} = a, \overline{OB} = b,$$

$$\overline{OF} = c \text{이고 } c^2 = a^2 - b^2$$

직각삼각형 OFB에서

$$\overline{BF} = \frac{\overline{OB}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}b = \overline{OA}$$

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OB}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

삼각형 AFB의 넓이가

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{OB} &= \frac{1}{2} \times (\overline{AO} + \overline{OF}) \times \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}b + \frac{b}{\sqrt{3}} \right) b \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore b^2 = 12$$

$$\text{한편, } \overline{OA} = a = \frac{2}{\sqrt{3}}b \text{이므로}$$

$$a^2 = \frac{4}{3}b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 28$$

<답> ④

10.

출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량이 4g이므로 주어진 식에 $a=10$, $b=4$, $c=8$ 를 대입하면

$$\log \frac{4}{10} = -1 + k \log 8$$

$$2 \log 2 - 1 = -1 + 3k \log 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 b_1 g이라 하면

$$\log \frac{b_1}{20} = -1 + \frac{2}{3} \log 27$$

$$\log b_1 - (1 + \log 2) = -1 + 2 \log 3$$

$$\log b_1 = \log(3^2 \cdot 2) = \log 18$$

$$\therefore b_1 = 18 \text{ (g)}$$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 벡터의 연산을 활용하여 벡터의 크기를 구할 수 있는가?

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b} \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{4} \vec{b} - \vec{a}$$

이고,

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

따라서,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

이므로

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$$

$$= \left| \left(\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a} \right) + \left(\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \right) \right|^2$$

$$= \left| \vec{b} - \frac{5}{3}\vec{a} \right|^2$$

$$= |\vec{b}|^2 - \frac{10}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{25}{9}|\vec{a}|^2$$

$$= 3^2 - \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{2} + \frac{25}{9} \cdot 3^2$$

$$= 9 - 15 + 25$$

$$= 19$$

<답> ③

12.

출제의도 : 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

표본 100명 중 90명이 개방 시간 연장을 희망하였으므로 표본비율 \hat{p} 은

$$\hat{p} = \frac{90}{100} = 0.9$$

이다.

따라서 이 도시의 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[0.9 - 1.96\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100}}, 0.9 + 1.96\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100}} \right]$$

$$\therefore c = 1.96\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100}}$$

$$= 0.0588$$

<답> ②

13.

출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 E의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 F의 좌표는 $(a, 2^a)$ 이고 $2^a = 16$ 에서

$$\therefore a = 4$$

또 점 E는 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로

$$b = \log_2 4 = 2$$

두 점 $A(2^n, 0)$, $D(2^n, n)$ 을 이은 선분을 2:3으로 내분하는 점은 $\left(2^n, \frac{2}{5}n\right)$ 이고

이 점의 y좌표가 점 E의 y좌표와 같으므로

$$\frac{2}{5}n = 2 \quad \therefore n = 5$$

따라서 두 점 $D(32, 5)$, $F(4, 16)$ 을 지나는 직선 DF의 기울기는

$$\frac{16-5}{4-32} = -\frac{11}{28}$$

<답> ⑤

14.

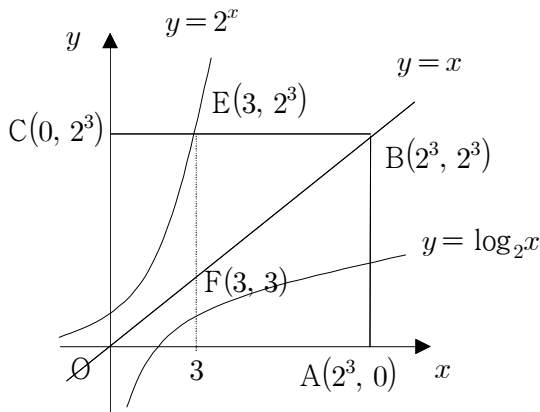
출제의도 : 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$n=3$ 일 때, $A(2^3, 0)$, $B(2^3, 2^3)$, $C(0, 2^3)$

이다. 이때, 직선 BC와 곡선 $y=2^x$ 가

만나는 점을 E라 하면 $E(3, 2^3)$ 이다.

한편, 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 는 역함수관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 점 E를 지나고 y 축에 평행한 직선이 직선 $y=x$ 과 만나는 점을 F라 하면 $F(3, 3)$ 이다.



따라서, 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_0^3 (2^x - x) dx + \triangle BEF \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 + \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{7}{\ln 2} - \frac{9}{2} \right) + \frac{25}{2} \right\} \\ &= 16 + \frac{14}{\ln 2} \end{aligned}$$

<답> ②

15.

출제의도 : 두 벡터가 평행할 조건을 이용하여 두 구가 서로 접할 조건을 구할 수 있는가?

구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$

의 중심을 $A(1, 2, 1)$ 라 하고,

구 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2ay + 2bz = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y+a)^2 + (z+b)^2 = 9 + a^2 + b^2$$

의 중심을 $B(-3, -a, -b)$ 하자.

두 구가 원점 O에서 서로 접하므로 두

벡터 \overrightarrow{OA} 와 \overrightarrow{OB} 는 평행하다.

즉, $\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OA}$ (t 는 실수)

$$(-3, -a, -b) = t(1, 2, 1)$$

$$\therefore -3 = t, -a = 2t, -b = t$$

$$\therefore a = 6, b = 3$$

$$\therefore a + b = 9$$

<답> ④

16.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$$a_{n+1} - 2a_n + \frac{n+2}{n(n+1)} = 0 \text{에서}$$

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{n+1}{n(n-1)} = 0 \quad (n \geq 2) \text{이므로}$$

$$a_{n+1} - a_n - 2(a_n - a_{n-1}) + \frac{n+2}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n-1)} = 0$$

$(n \geq 2)$ 이고

$$\frac{n+2}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{1+(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n-1)}$$

에서

$$a_{n+1} - a_n - 2(a_n - a_{n-1}) + \frac{n+1}{n(n+1)} -$$

$$\boxed{\frac{2}{n(n-1)}} = 0 \quad (n \geq 2)$$

이다. $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1$) 이라 놓으면

$$b_1 = \frac{3}{2} \text{ 이고,}$$

$$b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 2b_{n-1} + \boxed{\frac{2}{n(n-1)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$b_n + \frac{1}{n(n+1)} = 2^n \quad (n \geq 1)$$

$$\text{이다. 즉, } b_n = 2^n - \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^k - \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \boxed{2^n + \frac{1}{n}} \quad (n \geq 2)$$

이다.

$n=1$ 일 때에도 이 식을 만족시키므로
모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \boxed{2^n + \frac{1}{n}} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(n) = \frac{2}{n(n-1)}, \quad g(n) = 2^n + \frac{1}{n} \text{ 이}$$

므로

$$g(6) - f(4) = \left(2^6 + \frac{1}{6} \right) - \frac{2}{4 \times 3} = 64$$

<답> ①

17.

출제의도 : 조건이 주어진 행렬의 성질을 추론할 수 있는가?

$$\neg. 2A - A^2B = E \text{에서}$$

$$A(2E - AB) = E$$

이므로

$$A^{-1} = 2E - AB \quad \text{<참>}$$

$$\sqsubset. A^{-1} = 2E - AB \text{이므로}$$

$$AA^{-1} = E \text{에서}$$

$$A(2E - AB) = E$$

$$2A - A^2B = E \quad \text{--- ㉠}$$

$$\text{또, } A^{-1}A = E \text{에서}$$

$$(2E - AB)A = E$$

$$2A - ABA = E \quad \text{--- ㉡}$$

㉠과 ㉡에서

$$A^2B = ABA$$

한편, A^{-1} 이 존재하므로

$$A^{-1}(A^2B) = A^{-1}(ABA)$$

$$\therefore AB = BA \quad \text{<참>}$$

$$\sqsubset. 2A - A^2B = E \text{에서}$$

$$A = \frac{1}{2}(E + A^2B)$$

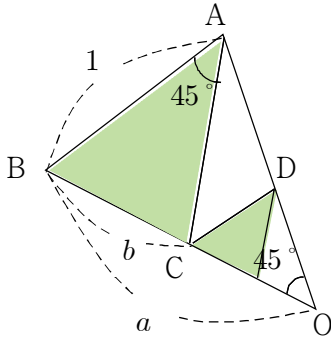
$$AB = BA \text{이므로}$$

$$A = \frac{1}{2}(E + BA^2) \quad \text{<참>}$$

<답> ⑤

18.

출제의도 : 도형의 넓이를 무한등비급 수를 이용하여 구할 수 있는가?



그림과 같이 정팔각형의 중심을 O라 하고 점 O와 정팔각형의 한 변으로 이루어진 이등변삼각형 OAB에서

$\angle AOB = 45^\circ$ 이고, $\overline{OA} = a$ 라 하면

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 45^\circ$$

$$a^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

이등변삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 45^\circ$ 이고, $\overline{BC} = b$ 라 하면

$$b^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 45^\circ = 2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

R_2 와 R_1 에서 그려지는 두 정팔각형의 한 변의 길이의 비 r 는

$$\begin{aligned} r &= \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}} \\ &= 1 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \\ &= 1 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} \\ &= 1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$S_1 = 8 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$$

이고 주어진 그림과 같이 닮은 도형의 넓이의 비는 길이의 비의 제곱에 비례하므로

$$r^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{2\sqrt{2}}{1 - (3 - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

<답> ①

19.

출제의도 : 정사영의 성질과 두 평면의 위치관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

xy 평면과 yz 평면이 이루는 각이 90° 이므로 평면 α 가 xy 평면과 이루는 예각이 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) 이면 평면 α 와 yz 평면이 이루는 예각은 $90^\circ - \theta$ 이다.

원 C_1 의 넓이가 3π 이므로 원 C_1 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S 는

$$S = 3\pi \cos \theta \quad \text{... ㉠}$$

원 C_2 의 넓이가 π 이므로 원 C_2 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S 는

$$S = \pi \cos(90^\circ - \theta) = \pi \sin \theta \quad \text{... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } 3\pi \cos \theta = \pi \sin \theta$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = 3 \text{ 이고 } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{그러므로 } S = 3\pi \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \pi$$

<답> ⑤

20.

출제의도 : 정규분포에서의 확률을 구할 수 있고 미분을 활용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

확률변수 X 가 정규분포 $N\left(t, \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right)$ 를

따르므로

$$\begin{aligned} G(t) &= P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{X-t}{\frac{1}{t^2}} \leq \frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{3}{2}t^2 - t^3\right) \end{aligned}$$

이때, $f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t^3$ 으로 놓으면

$f'(t) = 3t - 3t^2$ 이므로 $f'(t) = 0$ 에서

$$t=0 \text{ 또는 } t=1$$

이때, 함수 $f(t)$ 의 증감표는 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

그러므로 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때, 최댓

값 $\frac{1}{2}$ 를 갖는다.

따라서, $t=1$ 일 때, $G(t)$ 도 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 + 0.1915 \\ &= 0.6915 \end{aligned}$$

<답> ③

21.

출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

$$x = e^t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$y = (2t^2 + nt + n)e^t \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (4t+n)e^t + (2t^2 + nt + n)e^t \\ &= \{2t^2 + (4+n)t + 2n\}e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2t^2 + (4+n)t + 2n \\ &= (2t+n)(t+2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $n=3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$t = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } t = -2$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 는

$$x = a_3 = e^{-\frac{3}{2}} \text{에서 최솟값}$$

$$\begin{aligned} y = b_3 &= \left\{2 \times \frac{9}{4} + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3\right\}e^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

를 갖는다.

(ii) $n=4$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$t = -2$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 는

$$x = a_4 = e^{-2} \text{에서 최솟값}$$

$$\begin{aligned} y = b_4 &= \{2 \times 4 + 4 \times (-2) + 4\}e^{-\frac{3}{2}} \\ &= 4e^{-2} \end{aligned}$$

를 갖는다.

(iii) $n=5$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$t = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } t = -2$$

2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 B형 정답 및 해설

이므로 함수 $y=f(x)$ 는

$x=a_5=e^{-2}$ 에서 최솟값

$$y=b_5=\{2 \times 4+5 \times(-2)+5\} e^{-2} \\ =3 e^{-2}$$

를 갖는다.

(iv) $n=6$ 일 때, ㉠에서

$t=-3$ 또는 $t=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$ 는

$x=a_6=e^{-2}$ 에서 최솟값

$$y=b_6=\{2 \times 4+6 \times(-2)+6\} e^{-2} \\ =2 e^{-2}$$

를 갖는다.

$$\therefore \frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6} \\ =\frac{3 e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\frac{4 e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{3 e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{2 e^{-2}}{e^{-2}} \\ =3+4+3+2 \\ =12$$

<답> ②

22.

출제의도 : 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

$$\lim _{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+3 x)+9 x}{2 x} \\ =\lim _{x \rightarrow 0}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3 x} \ln (1+3 x)+\frac{9}{2}\right) \\ =\lim _{x \rightarrow 0}\left(\frac{3}{2} \ln (1+3 x)^{\frac{1}{3 x}}+\frac{9}{2}\right) \\ =\frac{3}{2} \ln e+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$$

<답> 6

23.

출제의도 : 일차변환을 행렬을 이용하여 다룰 수 있는가?

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 A 라 하면

$$A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 4 & -5 \end{array}\right)$$

또, 일차변환 g 는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$

만큼 회전하는 회전변환이므로 g 를 나타내는 행렬을 B 라 하면

$$B=\left(\begin{array}{cc} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{array}\right) \\ =\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

한편, $f \circ g=g \circ f$ 이므로 $AB=BA$ 에서

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 4 & -5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} b & -a \\ -5 & -4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -4 & 5 \\ a & b \end{array}\right)$$

$$\therefore a=-5, b=-4$$

$$\therefore ab=20$$

<답> 20

24.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d

라 하면

$$a_2 = a + d = -2$$

$$a_5 = a + 4d = 7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -5, d = 3$$

$$\therefore a_n = 3n - 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{10} (6k - 8) \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} - 8 \times 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

<답> 250

25.

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

서비스센터에 휴대 전화의 메인 보드 고장으로 접수되는 사건을 A , 액정 화면 고장으로 접수되는 사건을 B 라 하자. 또 접수 시기가 품질보증 기간 이내인 사건을 E 라 하면 품질보증 기간 이후인 사건은 E^C 이다.

$$P(B) = \frac{50+b}{200}, P(B \cap E) = \frac{50}{200} \text{ 이므로}$$

$$P(E|B) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{50+b}{200}} = \frac{50}{50+b}$$

이다. $P(E|B) = \frac{2}{3}$ 에서

$$\frac{50}{50+b} = \frac{2}{3} \quad \therefore b = 25$$

$$a+b=60 \text{ 이므로 } \therefore a=35$$

$$\therefore a-b=10$$

<답> 10

26.

출제의도 : 쌍곡선의 방정식과 점선의 방정식을 알고 있는가?

쌍곡선의 두 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 9 \text{ ----- ㉠}$$

또, 쌍곡선 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 점선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이때, x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$y=0$ 을 대입하면

$$x = \frac{a^2}{4}$$

한편, 점선과 x 축의 교점이 선분 $F'F$ 를 2:1로 내분하므로 이 점의 x 좌표는 1이다.

그러므로

$$\frac{a^2}{4} = 1$$

$$\therefore a^2 = 4$$

$$\text{㉠에서 } b^2 = 5$$

그러므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

이때, 이 쌍곡선이 점 $P(4, k)$ 을 지나므로 대입하면

$$4 - \frac{k^2}{5} = 1$$

$$\therefore k^2 = 15$$

<답> 15

27.

출제의도 : 역함수의 미분법과 미분계수의 정의를 적용할 수 있는가?

$$f(x) = \ln(\tan x) \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{에서}$$

$$g(0) = \frac{\pi}{4} \quad (\because g(x) = f^{-1}(x))$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4g(8h) - \pi}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4g(8h) - 4g(0)}{h} \\ &= 32 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(8h) - g(0)}{8h} \\ &= 32g'(0) \\ &= 32 \times \frac{1}{2} = 16 \end{aligned}$$

<답> 16

28.

출제의도 : 직선의 방정식과 공간벡터를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

직선 l 의 방향벡터 $\vec{u} = (1, 2, -1)$ 이고 평면 α 와 직선 l 이 수직이므로 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} &= (-2, a, a-1) \cdot (1, 2, -1) \\ &= -2 + 2a - (a-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

점 C는 직선 l 위의 점이므로 $\overrightarrow{AC} // \vec{u}$, 즉 $\overrightarrow{AC} = t\vec{u}$ (t 는 실수)이다.

점 C의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면

$$\overrightarrow{AC} = (x_1 - 1, y_1, z_1 - 1) = t(1, 2, -1)$$

$$\therefore x_1 = t + 1, y_1 = 2t, z_1 = -t + 1$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{t^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{6t^2}$$

이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$$6t^2 = 5 \quad \therefore t^2 = \frac{5}{6}$$

점 C에서 원점까지의 거리 d 에 대하여

$$\begin{aligned} d^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &= (t-1)^2 + (2t)^2 + (-t+1)^2 \\ &= 6t^2 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

<답> 7

29.

출제의도 : 삼각함수의 극한을 활용한 문제를 해결할 수 있는가?

삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sin \theta \quad \text{-----} \textcircled{1}$$

또,

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \pi - \left(2\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \frac{\pi}{3} - 2\theta \end{aligned}$$

이므로 삼각형 ACD에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle CDA} = \frac{\overline{CD}}{\sin \angle DAC}$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} = \frac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{\cos \theta \sin 2\theta}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

또,

$$\begin{aligned}\angle BCD &= 2\pi - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{5}{6}\pi \quad \text{-----} \textcircled{\ominus}\end{aligned}$$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{CB} \times \sin(\angle BCD) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\cos \theta \sin 2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \times \sin \theta \times \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{\cos \theta \sin 2\theta \sin \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)}\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\cos \theta \sin 2\theta \sin \theta}{4\theta^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로

$$300p^2 = 300 \times \frac{1}{3} = 100$$

<답> 100

30.

출제의도 : 치환적분법과 정적분의 성질을 이해하고 있는가?

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

예서 $e^x = t$ 로 놓으면 $x = \ln t$

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \leq t < e) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (e \leq t \leq e^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} g(x) dx &= \int_1^e f(\ln x) dx + \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx \\ &= 6e^2 + 4 \quad \dots \textcircled{\ominus}\end{aligned}$$

이 때, $\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx$ 에서 $\frac{x}{e} = p$ 로

놓으면 $dx = e dp$

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx &= \int_1^e \{g(p) + 5\} e dp \\ &= e \int_1^e g(p) dp + e \int_1^e 5 dp \\ &= e \int_1^e g(p) dp + 5e(e-1) \\ &= e \int_1^e f(\ln p) dp + 5e(e-1)\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\int_1^e f(\ln x) dx = A \text{라 하면}$$

$$A + eA + 5e(e-1) = 6e^2 + 4$$

$$A(1+e) = e^2 + 5e + 4$$

$$= (e+4)(e+1)$$

$$\therefore A = ae + b = e + 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 17$$

<답> 17