오르비 기출해설대회 - 귀여운울림소리
2013학년도 수능 수리가형

16.
조건 (1) $2A^2+AB=E$ (2) $AB+BA=2A+E$
(ㄱ) (1)에서 $A(2A+B)=E$이므로 $A^{-1}=2A+B$ (참)
(ㄴ) (1)에서 $AB=E-2A^2$을 (2)에 대입하면 $-2A^2+BA=2A$. 정리하면 $BA=2A+2A^2$
양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=2E+2A$ (참)
(ㄷ) (ㄴ)에서 $B-E=E+2A$
$\therefore (B-E)^2=(E+2A)^2=E+4A+4A^2$
(1)에 $B=2E+2A$대입하면 $4A^2+2A=E$ $\therefore E+4A+4A^2=2E+2A$
$2E+2A=O$이라고 가정하면, $A=-E$, (ㄱ)에서 $A^{-1}=2A+(2E+2A)=-2E$ 모순. (거짓)
답 3번

Comment) 행렬문제에서도 귀류법을 써서 거짓임을 판별할 수 있다.

26.
sol 1) PA와 PB가 이루는 각은 둔각이므로, 두 벡터의 사이 각을 θ라 하면 $\cos\theta<0$이다.
$\therefore |\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=-|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta$

$\angle BPH=\pi-\theta, \angle BHP=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle PBH=\theta-\frac{\pi}{2}$

$-|\overrightarrow{PB}|\cos\theta=-PB\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=PB\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=PB\sin(\angle PBH)=PH$

$\therefore |\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=-|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta=PH\cdot PA=(\sqrt{3}-PA)PA\le(\frac{(\sqrt{3}-PA)+PA}{2})^2=\frac{3}{4}$

(by $AM\ge GM$, 단 등호는 $\sqrt{3}-PA=PA$, 즉 $PA=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때)

따라서 답은 $3+4=7$

Comment) 비교적 쉬운 벡터 문제. 어떤 방법으로도 풀릴 수 있는 문제인 듯하다. 벡터문제는 해석기하적으로 접근하는 것도 한 방법이다. 해석기하적 접근이란, 주어진 평면도형/입체도형을 평면좌표계/3차원좌표계에 대응시켜 푸는 것이다. sol 2를 보자.

sol 2)
점을 다음과 같이 대응시킨다. : $A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $P(0,a)$ (단, $0\le a\le\sqrt{3}$)
그러면 $\overrightarrow{PA}=(0,\sqrt{3}-a)$, $\overrightarrow{PB}=(-1,-a)$ 이므로,
$\therefore |\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=|\sqrt{3}a+a^2|=\left|(a^2-\sqrt{3}a+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)-\frac{3}{4}\right|=\left|(a-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{3}{4}\right|\le\frac{3}{4}$

29.
편의상 각도를 radian 단위가 아닌 도($^\circ$) 단위로 보겠다.
$\angle ACD = 120 - 2\theta$, $\angle BCD = 60 - \theta$

$\triangle ACD$에서 사인법칙 : $\dfrac{AD}{\sin(120-2\theta)} = \dfrac{CD}{\sin\theta}$

$\triangle BCD$에서 사인법칙 : $\dfrac{BD}{\sin(60-\theta)} = \dfrac{CD}{\sin 2\theta}$

$\therefore 1 = AD + BD = \dfrac{CD}{\sin\theta}\sin(120-2\theta) + \dfrac{CD}{\sin 2\theta}\sin(60-\theta)$

$= CD\left(\dfrac{2\sin(60-\theta)\cos(60-\theta)}{\sin\theta} + \dfrac{\sin(60-\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}\right) = CD \cdot \dfrac{\sin(60-\theta)}{\sin\theta} \cdot \left(2\cos(60-\theta) + \dfrac{1}{2\cos\theta}\right)$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{CD}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{\sin\theta}{\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin(60-\theta)} \cdot \dfrac{1}{2\cos(60-\theta)+\dfrac{1}{2\cos\theta}} = 1 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

$\therefore 27a^2 = 16$

Comment) sin법칙 적용 후 일반적인 삼각함수의 극한구하기 문제. $AB=1$인 조건을 어떻게 활용할 것인가를 잘 캐치해내는 것이 중요하다.

30.
(가)에 의해 $x=y$이고, 이 때문에 영역 조건식의 좌측부등식과 우측부등식은 둘 다 $2^x - x \le n$을 의미한다.

$\sum\limits_{n=1}^{30} a_n = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} N(\{n \mid 2^x - x \le n,\ 1 \le n \le 30\})$ 이므로(double-counting),

$N>0$이기 위해서는 $-29 \le x \le 5$ 만 유효하다.

i) $x=5$ -> 가능한 $n = 2^5 - 5(=27), \cdots, 30$ 4가지.
ii) $x=4$ -> i)처럼 세어보면, 19가지.
iii) $x=3$ -> 26가지.
iv) $x=2$ -> 29가지.
v) $x=1$ -> 30가지.
vi) $x=0$ -> 30가지.
vii) $x=-k\,(1 \le k \le 29)$ -> $2^{-k}-(-k) = 2^{-k}+k \le n$, 가능한 $n = k+1, k+2, \cdots, 30$
-> $30-k$가지.

$\therefore$ 답$= \sum\limits_{k=1}^{29}(30-k) + 4 + 19 + 26 + 29 + 30 + 30 = \sum\limits_{k=1}^{29} k + 138 = 573$

Comment) double-counting 이란?

	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5
n=1	1	0	0	0	0
n=2	1	1	0	0	0
n=3	1	1	0	0	0
n=4	1	1	0	0	0

위의 표처럼 조건에 부합하는 (n,x)에는 1을 쓰고 아닌 경우 0을 쓴 표가 있다고 생각해보자. $x=1$일 때, $x=2$일 때,$\cdots$ 의 1의 개수를 세어 다 더하나, $n=1$일 때, $n=2$일 때, $\cdots$ 의 1의 개수를 세어 다 더하나 그 값은 같다. 이렇게, 서로 다른 두 가지 방법으로 개수를 세는 것을 double-counting이라고 한다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 경우 가로합을 먼저 구한 것이고,

$\sum_{x=-\infty}^{\infty} N(\{n \mid 2^x - x \le n,\ 1 \le n \le 30\})$은 세로합을 먼저 구한 것이다. 나는 세로합이 더 경우를 세기 편할 것 같아서 세로합으로 계산한 것이다.

결국 이 문제는 어떻게 세던지 간에, "정확하게" 세는 것이 중요하다.