2015년 6월 평가원 모의고사 수학 B형 4점 해설

14. 양변에 $f(x)^2$을 곱하자.
$(x-3)f(x) \geq f(x)^2$
$f(x)(f(x)-(x-3)) \leq 0$
그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{7}{3}$, 9이다.
범위를 구하면
$2 < x \leq \frac{7}{3}$, $6 < x \leq 9$
자연수 x 값의 합은 $7+8+9=24$

15. $S_1 = \frac{\pi}{4}$
$\overline{A_1D_1} = \overline{A_1C_2} = 2$이고, $\overline{A_1A_2} = 1$이므로,
$\overline{A_2C_2} = 1$이다.
공비는 $\overline{A_1C_1} : \overline{A_1A_2} = \sqrt{5} : 1$이므로
넓이비는 $5 : 1$이다.
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{16}\pi$$

16. ㄱ. 양변에 A를 곱하면
$A^3 = -A^2 = -(-A) = A$ (참)
ㄴ. $A^2 = -A$이므로 $B^2 = 2A+E$
B^2이 A, E에 관한 식으로 나타내어져 있기 때문에 교환법칙은 성립한다. (참)
ㄷ. B^2의 역행렬이 존재하면 B의 역행렬이 존재하므로, B^2의 역행렬이 존재함을 보이면 된다.
$B^2 = 2A+E$이므로
$A^2 = -A$를 변형하면
$(2A+E)(\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}E) = \frac{1}{4}E$
$(B^2)^{-1} = 2A+E$ (참)
정답은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

17. 타원의 정의에 의해 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 14$
$\overline{HF} = 6\sqrt{2}$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해, $\overline{PH} = 3$, 따라서, $\overline{HF} = 2$
피타고라스의 정리에 의해 $\overline{F'F} = \sqrt{76}$
$\left(\frac{\sqrt{76}}{2}\right)^2 + a = 7^2 \qquad \therefore a = 30$

18. ㄱ. $f(1-0)=0$이고 $f(1+0)=1$이므로 참
ㄴ. $\lim_{t\to\infty} f(\frac{1}{t}) = f(0+0) = 1$ (참)
($y = \frac{1}{x}$의 그래프를 생각해보자.)
ㄷ. $f(f(3+0)) = f(2-0) = 1$
$f(f(3-0)) = f(2+0) = 3$
$f(f(3)) = f(2) = 1$ (거짓)

19. $f(x)$의 x축과의 교점은 $\left(\frac{2}{b}, 0\right)$이다.
$g(x)$의 점근선은 $x = \frac{1}{a}$이다.
교점이 점근선 위에 있어야하므로 $b = 2a$
주어진 조건에 의해 $b > 1$이므로 $a > \frac{1}{2}$
$\therefore b = 2a \left(\frac{1}{2} < a < 1\right)$

20. 전체 경우의 수는 ${}_3H_6$이다. (나) 조건을 식으로 나타내면,
$2b = a+c$ (등차중항을 생각해보자.)
(가) 식에 대입하면 $b=2, a+c=4$
$a+c=4$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_2H_4$이다.
구하고자 하는 경우의 수는 ${}_3H_6 - {}_2H_4 = 23$

21. $g(\theta) = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$
따라서, $h_1(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$
$g'(\theta) = (f(\tan\theta))' = f'(\tan\theta)\sec^2\theta$
따라서, $h_2(\theta) = \sec^2\theta$
한편, $g'(\theta) = 1 - \cos 2\theta$
$t = \tan\theta$라 하면
$(1+t^2)f'(t) = 1 - \cos 2\theta$
$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$이다.
$\therefore f'(t) = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}, \quad f'(2) = \frac{8}{25}$
구하고자 하는 값은 $\frac{8}{25}$이다.

2015년 6월 평가원 모의고사 수학 B형 4점 해설

26. $g(x)=4f(x)\ln|x|$

$g'(x)=4f'(x)\ln|x|+\dfrac{4f(x)}{x}$

$g'(e)=4f'(e)-4$

문제 조건에 의해 $f'(e)g'(e)=-1$

$\therefore f'(e)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $100f'(e)=50$

27. 근이 될 수 있는 조건부터 따지면,

$g(x)\geq 0,\ g(x)-f(x)^2\geq 0$에서,

$\dfrac{3}{2}\leq x\leq 3$

주어진 무리방정식을 풀면

$\sqrt{g(x)}-f(x)=\sqrt{g(x)-f(x)^2}$

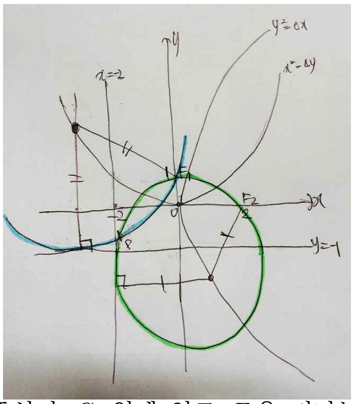
양변 제곱하면

$f(x)^2=\sqrt{g(x)}\,f(x)$

$x=\dfrac{3}{2},2$　모든 실근의 합은 $\dfrac{7}{2}$

답은 $10\times\dfrac{7}{2}=35$

28.



중심이 C_1 위에 있고 F_1을 지나는 원은

C_1의 준선 $y=-1$에 접하는 원이다. …①

또, 중심이 C_2 위에 있고, F_2를 지나는 원은

C_2의 준선 $x=-2$에 접하는 원이다. …②

즉, ①, ②와 문제의 조건에 의해

점 P의 조건을 구할 수 있다.

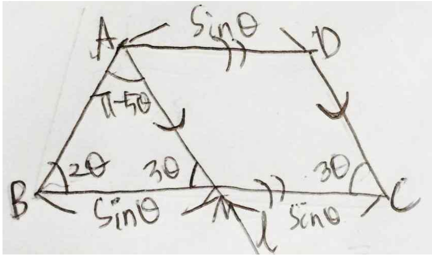
$P(a,b)$라 하면

$\begin{cases}-2\leq a<0\\ -1\leq b<0\end{cases}$을 만족한다.

$\overline{OP}^2=a^2+b^2$의 최대값은 5이다.

* 직관적으로 각 준선의 교점에서 접하는 원 2개를 그려보면 $\overline{OP}$가 최대인 순간을 확인할 수 있다.

29.



A에서 $\overline{CD}$에 평행하도록 직선 l을 긋고

$\overline{BC}$와의 교점을 M이라 하자.

$\angle AMB=3\theta$ (동위각)

따라서 $\angle BAM=\pi-5\theta$

사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{AM}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\overline{BM}}{\sin(\pi-5\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$

따라서, $\overline{AM}=\dfrac{\sin 2\theta\sin\theta}{\sin 5\theta}$이다.

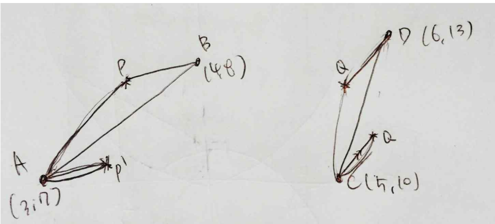
두 변의 길이와 그 끼인 각을 알기 때문에 $S(\theta)$를 구할 수 있다.

$S(\theta)=\dfrac{3\sin 3\theta\sin 2\theta\sin^2\theta}{2\sin 5\theta}$

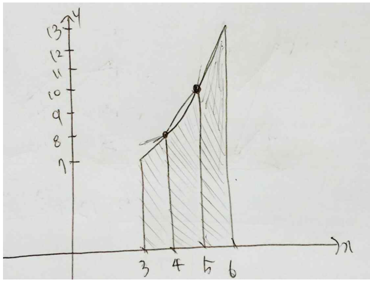
$\therefore \lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\dfrac{9}{5}$　　$p+q=14$

2015년 6월 평가원 모의고사 수학 B형 4점 해설

30. (가) 조건과 평균값의 정리에 의해
폐구간 $[3,4],[5,6]$에서 $f(x)$는 직선이다.$\cdots$①
(밑의 그림을 참고하자.)



(다) 조건에 의해 $[4,5]$에서 $f(x)$는 이차함수의 일부가 된다.
①에 의해 $f'(4)=1$, $f'(5)=3$이므로,
$f(x)=ax^2+bx+c(4 \le x \le 5)$라 하면,
$f'(x)=2ax+b$이다.
즉, $\begin{cases} 8a+b=1 \\ 10a+b=3 \end{cases}$을 풀어주면,
$a=1$, $b=-7$이고 $(4,8)$을 지나므로 $c=20$
$[4,5]$에서 $f''(x)=2x$, 즉 $f(x)$는 $[4,5]$에서 아래로 볼록하다. 즉 $(4,8)$, $(5,10)$을 지나는 직선보다 항상 아래에 있다.



$\therefore \displaystyle\int_3^6 f(x)dx=\frac{167}{6}$ $\qquad a=\frac{167}{6}$
$6a=167$