#. 합성함수와 부등식

1 간단한 유형 - 상수와 비교

- $f(g(t)) \geq 3$ → $f(x) \geq 3$ 의 해인 $\alpha \leq x \leq \beta$, $\gamma = x$

구한 뒤, $\alpha \leq g(t) \leq \beta$, $g(t) = \gamma$ 인 t가 답이다

- 자기자신 포함함수도 같은 유형으로 본다.

$f(f(x)) \geq 2f(x) + 3$

—①→ $f(t) \geq 2t + 3$ 의 해를 찾고,

$\alpha \leq t \leq \beta$ → $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ 인 x를 찾는다

—②→ $f(f(x)) - 2f(x) - 3 \geq 0$. $g(x) = f(x) - 2x - 3$ 으로 본다면

$g(f(x)) \geq 0$ 으로, '상수와 비교'와 같다.

2 애매한 유형 + 변수 겹쳐서 혼란

- $g(f(x)) \geq x + 3$ → 위에처럼 $f(x) = t$로 두고 푸는게 안됨. 우변에 $f(x)$가 아닌, 그냥 x 관련 식이 있기 때문.

→ 이럴때는 $g(x)$가 이차함수라거나 어쨌든 직접 대입해서 계산할 수 있는 함수일 확률 ↑.

ex) 정리 시 $\{g(x) - (3x+7)\}\{g(x) - 5\} \geq 0$ 나오는 ~

3 겉함수 증감판단 (미적분)

• $f(g(x)) \geq f(h(x))$

→ f가 증가함수인 구간 / f가 감소함수인 구간을 나눔

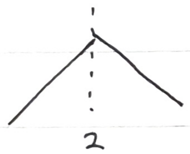
→ f가 증가할 때: $g(x) \geq h(x)$

f가 감소할 때: $g(x) \leq h(x)$

→ f의 극점 (증감바뀔때): $g(x) = h(x)$

ex) $f(x) = 2 - |x-2|$와 최고차항 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(4-x) \geq f(g(x))$이다. $g(0)=0$일 때, $g(x)$를 구하시오 [N서바 2회 14번]

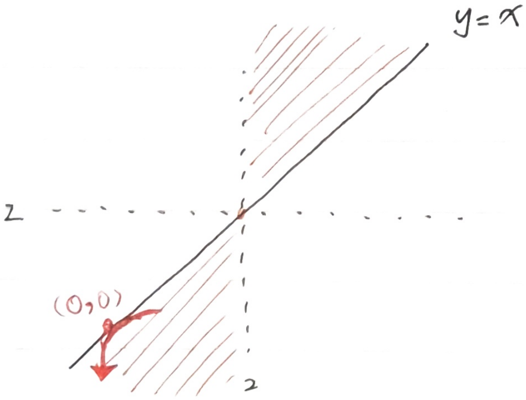
→ $f(4-x) = f(x)$. $f(x) \geq f(g(x))$ 풀면 됨.

겉함수가 

이므로, $\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$ 에 대하여

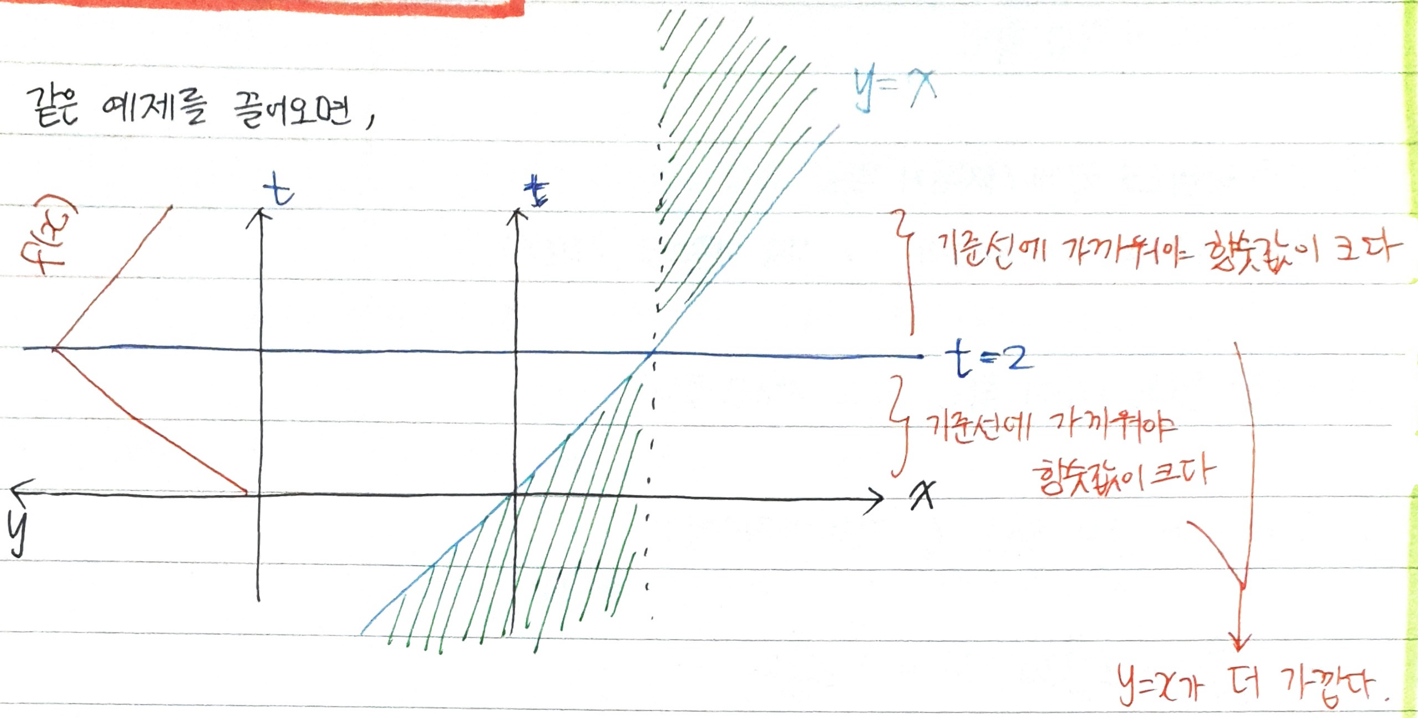
$\boxed{y \leq 2\text{일 때}}$ → $x \geq g(x)$

$\boxed{y \geq 2\text{일 때}}$ → $x \leq g(x)$



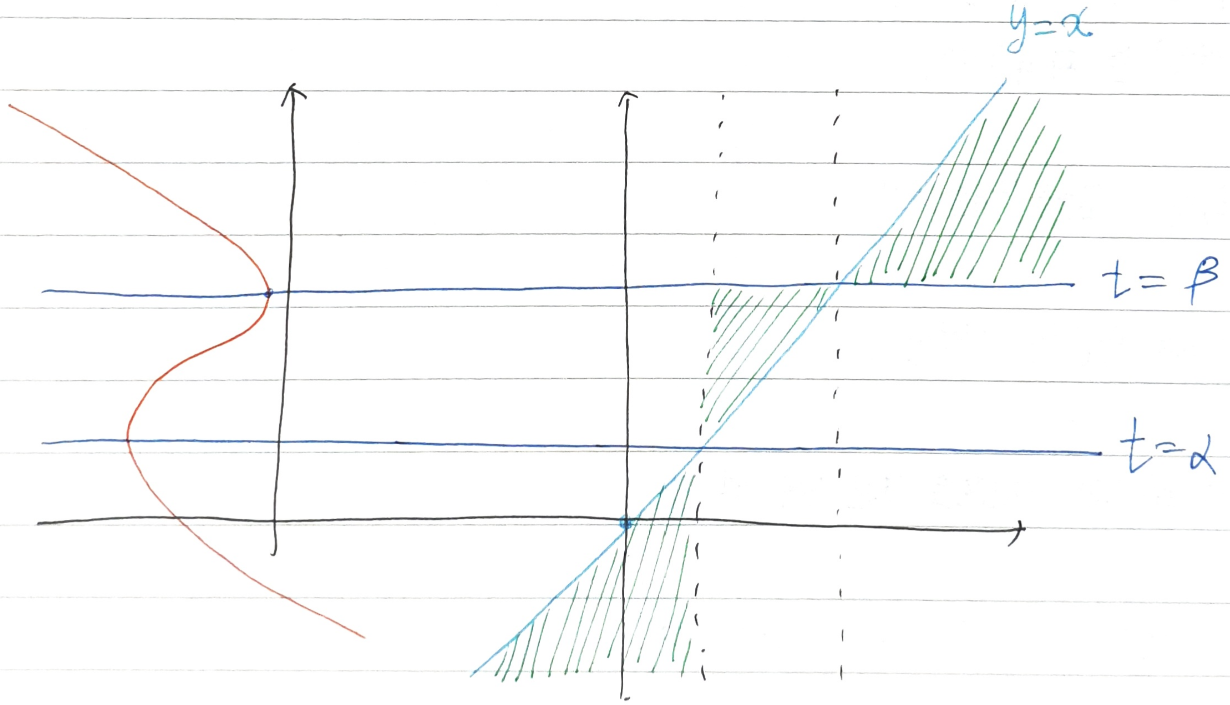
④ N축으로 판단 (가깝다/멀다)

같은 예제를 끌어오면,



$/\!/\!/\!/$: g(x) 존재 가능 영역.

- 확장하면, 극값 지나는 t값을 y좌표로 가질 때 속함수 g(x)와 h(x)가 만나면서 교차한다.



깨닫고 나면, [3] 과 [4] 는 같은 얘기이다.

#. 속도·가속도·위치 완벽 정리

1 위치의 변화량 vs 움직인 거리

- $\int_a^b v(t)dt$ = 위치의 변화량 = $S(b)-S(a)$

- $\int_a^b |v(t)|dt$ = 이동한 거리 ⇒ 구간 나눠서 계산, $|S(c)-S(b)| + |S(b)-S(a)| \cdots$

- $t=a$부터 $t=b$까지 위치의 변화량과 움직인 거리가 같다

⇒ $v(t) \geq 0$ $\left(\because \int_a^b v(t)dt = \int_a^b |v(t)|dt \Rightarrow \int_a^b \{|v(t)|-v(t)\}dt = 0\right)$

2 운동 방향

- $v(t) > 0$
- $v(t) < 0$
- $v(t)$의 부호가 $t=a$에서 변한다 ⇔ $t=a$에서 이동 방향이 바뀐다

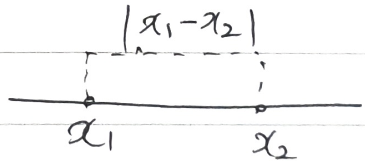
3 속도의 증가·감소

- $a(t) > 0$: 속도 증가
- $a(t) < 0$: 속도 감소.

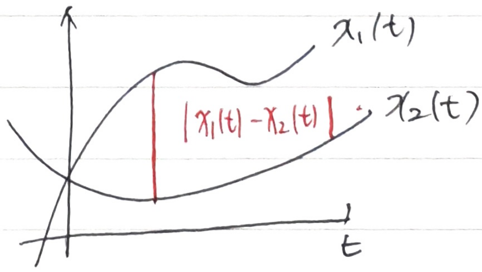
4 두 점 사이의 거리

$|x_1(t) - x_2(t)|$

① 수직선상의 이해



② 좌표 평면상의 이해

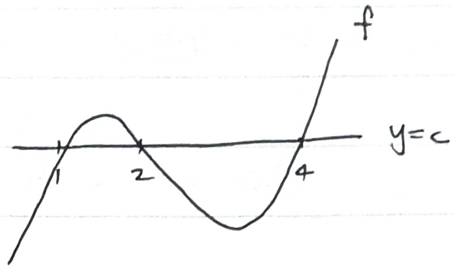


#. 3차함수 계산

1 함숫값이 같다는 것은

- $f(1)=f(2)=f(4)$ 라는 것은

  '$f(x)-c=(x-1)(x-2)(x-4)$'로 식을 세울 수 있음을 의미함.

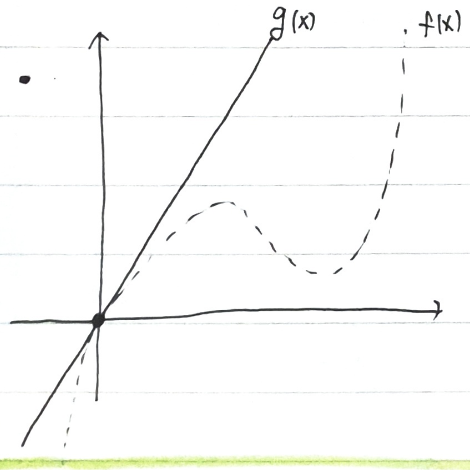


2 점대칭함수 식 세울 때

- 기함수의 평행이동이라고 생각하고 세운다.

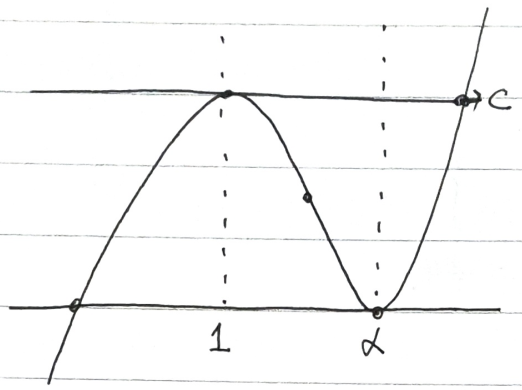
- (a,b) 대칭 → $p(x-a)^3+q(x-a)+b$

3 근을 부족하게 알 때 → 판별식 용이.

- 

← $f(x)$가 $x>0$에서 $0\le f(x)$여야 할 때 한 근을 인수분해하고 남은 이차식에서 판별식을 사용할 수 있다.

$\boxed{4}$ 최고차항 모르고 비율관계 뭔가 쓸 수 있을 것 같을때



이런 상황일 때, ① 과 같이 세우지 말고, ② 와 같이 세운다.

① $f = p(x-1)^2(x-(2\alpha-1)) + c$

$1+2\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) = \alpha$

$(2\alpha-1)$

→ 그뒤 다른 조건을 넣어서 계산할 때,
"p와 α가 곱해져서 나와 매우 골치아프다"

② $f(x) = (x-1)^2(px+q) + c$.

→ 이후 주어진 조건 대입.
뭔가 부족할 시에는 비율관계도 사용
(나머지 한 근이 $2\alpha-1$ 인 것)

중복도와 그 일반방법론

• f가 다항함수일 때

$$\lim_{x\to n} \frac{(x-n)f'(x)}{f(x)} = a$$

라는 식은, $\{f(x) = (x-n)^a Q(x),\ Q(n)\neq 0\}$

즉 f(x)의 (x-n) 중복도가 a 라는 것을 알려준다.

a승

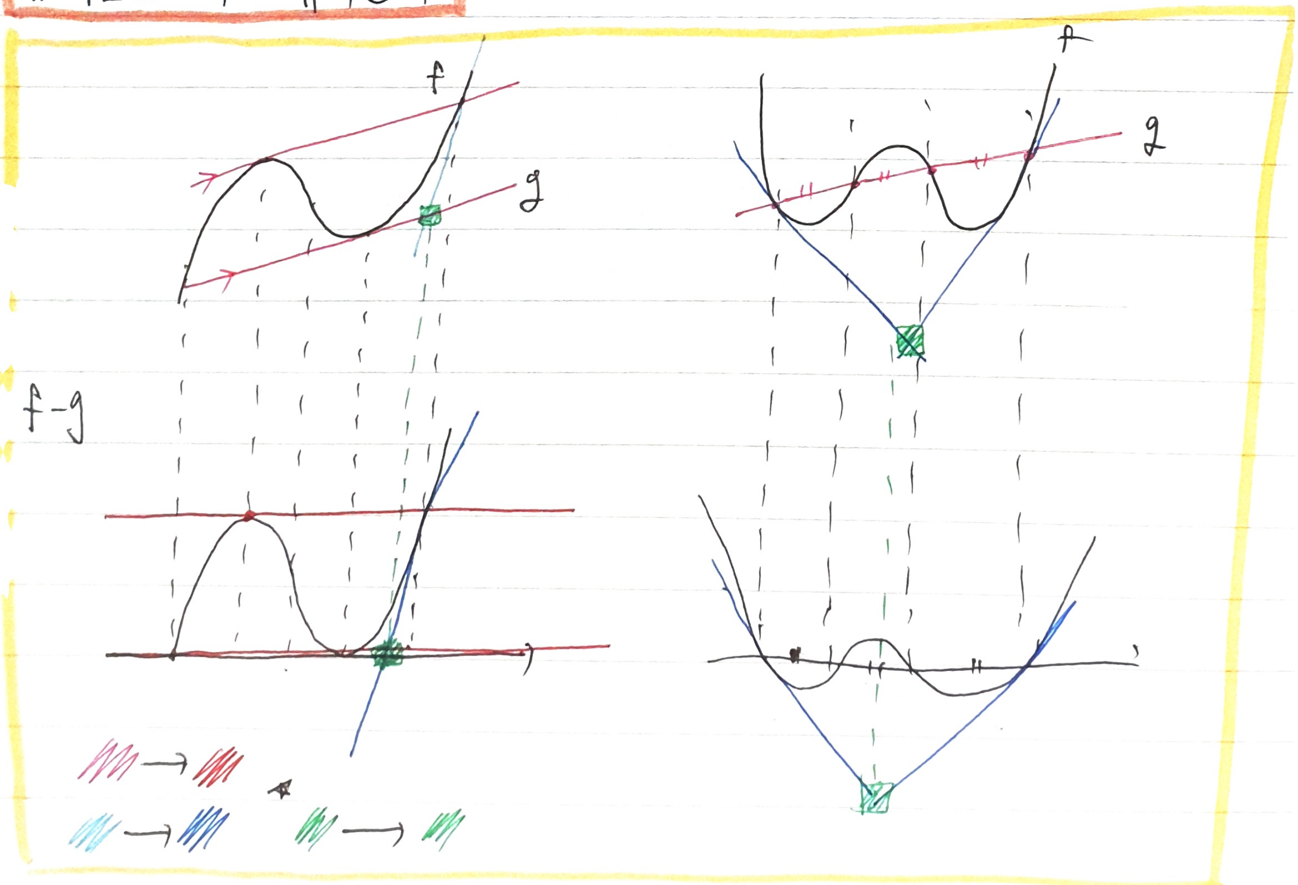
$$\bullet \lim_{x\to n} \frac{(x-n)\{a(x-n)^{a-1}Q(x) + \cancelto{0}{(x-n)^a Q'(x)}\}}{(x-n)^a Q(x)} = a$$

홀로 살아남음.

좌표상의 원과 직선

✓ '점과 직선의 거리 공식' 으로 이어지는 경우가 많다.

직선은 빼도 유지된다.



$f(x)-f(a) \ge f'(a)(x-a)$

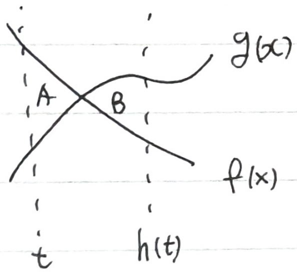
· 처음봤을때, $(a, f(a))$-$(x, f(x))$ 기울기 VS $f'(a)$ 를 x의 범위에 따른 $(x-a)$의 부호관계를 고려하여 부등호 방향에 신경쓰며 부등식을 푸는것인 줄 알았다.

· 그렇게 하면 좀 힘들다.

· 볼록성과 관련된 유명한 조건인데,

· $f(x) \ge f'(a)(x-a)+f(a)$ 로 쓰면 의미가 확 와닿는다.

넓이가 같다



· $A=B$ 이면

$A-B=0$ 이므로,

$$\int_t^{h(t)} \{g(x)-f(x)\}\,dx = 0$$

근 찾을수 있는 로그연산

· 밑을 맞추는것이 가능할 경우, 범위를 조심하며 근의 개수나 근을 직접 알아낼 수 있다

ex) $\log_2(x-1) = \log_4(x-t)$ 가 실근 1개를 갖도록하는 t의 범위는?

→ 다음 페이지에서 계속...

$\rightarrow \log_2(x-1) = \frac{1}{2}\log_2(x-t)$. $(x>1 \cap x>t)$

$\rightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x-t)$

$\rightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(x-t)$

$\rightarrow (x-1)^2 = (x-t)$ (범위 $x>1 \cap x>t$ 인 것 조심!)

| 다항함수 | x 다항함수

사실 꼭 다항함수여야 하는것은 아닌데, 설명의 편의를 위해 ~

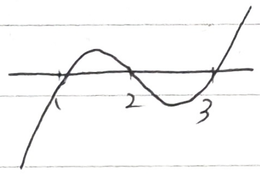
다음과 같은 순서로 그리면 된다.

1 절댓값이 없다고 생각하고 그린다

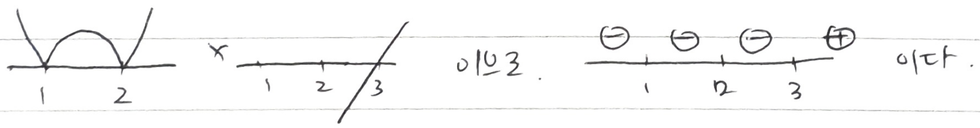
2 각 근을 기준으로 부호를 따져가며 뒤집어 준다.

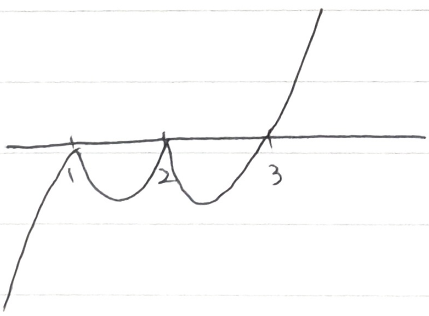
ex) $|(x-1)(x-2)| \times (x-3)$

1 그냥 그림



2





점에서 그을 수 있는 접선의 개수

1. 상황파악이 쉽고 그래프가 잘그려질때
2. 그래프 파악 힘들고 미지수가 여러개거나, 미지수가 평행이동등 간단한것이 아닐때

1. 그냥 그리고, (변곡접선, 점근선) 을 기준삼는다.

2. ① 함수 위의 한 점 P를 잡는다.

② P에서 $f(x)$에 접하는 직선 $y=f'(p)(x-p)+f(p)$를 잡는다.

③ 그 직선에 점 A를 대입해서,
만족하는 P가 몇개인지를 찾아낸다.

㊉ 공통접선이 가능한 상황인지 얼른 파악한다.

3. $\frac{f(x)-k}{x}$ 꼴의 경우. ($x\neq0$ 임을 꼭 인지하기. 빵꾸뚫림!)

①$(x, f(x))\cdots(0, k)$ 사이의 기울기

② 그냥 미분하기. $\frac{xf'(x)-\{f(x)-k\}}{x^2}$ 의 부호변화

합성함수 개론

크게 4가지로 나뉜다.

1. 장재원류 제 1식 → 겉함수 조건 바탕으로 속함수 추론

ex) $f(x)=3$ 의 근이 $x=0,\ 2$ 라면,

$f(g(x))=3$ 의 근은 $g(x)=0,\ 2$ 인 x들이다.

2. 장재원류 제 2식 → 범위론

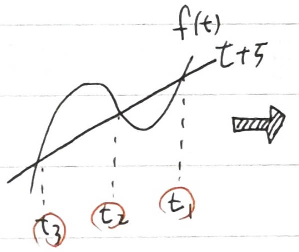
ex) 속함수는 그저 범위를 넘겨주는 녀석일 뿐.

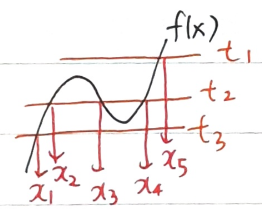
주로 개수세는 문제가 많다.

3. 씨발 그냥 치환류, → 교집합에 집중하여 풀이 전개

ex) $f(f(x))=f(x)+5$

→ ⟨교집합생성⟩ $\begin{cases} t=f(x) \\ \cap \\ f(t)=t+5 \end{cases}$ 인 x 가 이 방정식의 근이다.





ex2) $f(f(x)+5)=f(x)$

이때. $f(\triangle)=f(x)$ 로 봐서 (1으로 봐서)

$\triangle$와 x의 관계를 찾으며 삽질하고 있으면 안된다.

3을써서, ⟨교집합⟩ $\begin{cases} f(x)+5=p \\ f(p)=p-5 \end{cases}$ 를 만족시키는 "x" 찾기

로 바꾸어 푼다.

④ 대입후 함수방정식 풀어버리기 with 연속/미가 조건 (1730나형)

ex)

$f(x)$는 이차방정식일 때,

$f(g(x)) = f(x)$ 를 풀 길이 아예 안보인다면,

f에 진짜 $g(x)$ 대입해서 인수분해해

$\{g(x) - (5x+3)\}\{g(x) - 5x\} = 0$ 등을 얻어낸다.

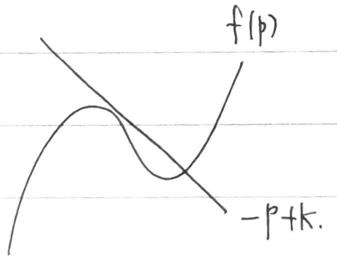
그러면 $g(x)$ $\begin{cases} 5x+3 \\ 5x \end{cases}$ 을 얻어낼 수 있고, 연속·미가 조건에 따라

$g(x)$를 알맞게 선택해주면 끝!

③ 예시 추가

$f(k - f(x)) = f(x)$

<교집합 생성> $\begin{cases} k - f(x) = p \\ \cap \\ f(p) = k - p \end{cases}$ 인 "x"



→ k에 따라 근의 (x의) 개수 바뀐다!

#. 직선 2개와 곡선이 만나는 점의 수 세는 법.

① 곡선이 교점을 지나는지 안지나는지 확인.

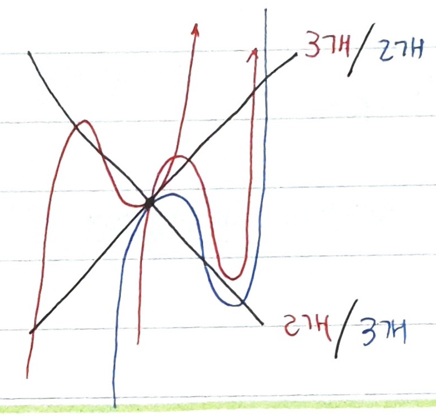
② 가능한 조합 세우고, 그림그려서 fix

③ 근과 계수관계 쓸수있으면 쓰기.

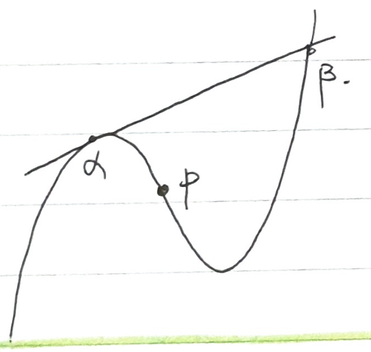
ex1) 3차함수, 교점지남, 근 4개일 때.

$\begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$ 최고차 양수인 삼차 $f(x)$, $f(0)=0$.

4개 : $(3+2)-1$ 조합만 가능



#실근 합 count 할 때.



중근을 한번 빼주면 된다.

$\alpha+\beta = 3p-\alpha$

#. 적분과 등차수열

• $\int_1^2 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx$

등의 등식이 나오고, 정리 시 "적분구간들"이 같다면?

• 식을 정리했더니

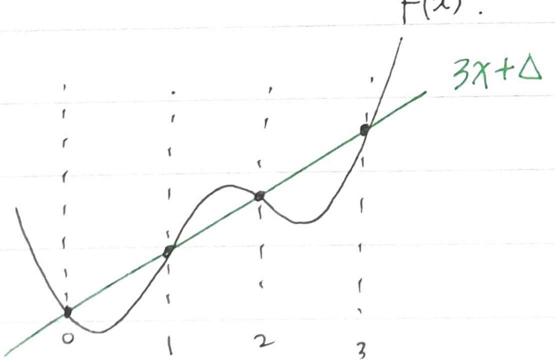
$\int_{x-1}^{x} f(t)dt = C \quad (x = 0, 1, 2, 3)$

등의 식이 나왔다면?

$f(t)$를 $F'(t)$로 보고,
"도함수의 정적분은 함숫값의 변화량이다"를 사용하자.

ex) $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx = 3$

$\rightarrow F'(x) = f(x)$.



#. $g(x)=\int_a^x |f(t)|dt$ 꼴

• 이런 형태의 문제는 대부분 마지막 발문이

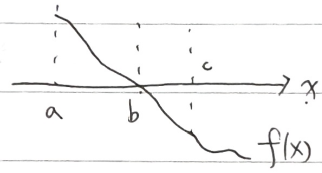
$\int_1^3 g(x)f(x)dx$ 꼴인데, 그 이유는

위 식을 미분하면 $g'(x)=|f(x)|$ 가 도출되어

"부호를 고려해 구간을 나누는 치환적분" 이 가능하기 때문이다.

• $g'(x)=|f(x)|$ 가 나왔을 때,

$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (a\le x\le b) \\ -f(x) & (b\le x\le c) \end{cases}$$



라고 두면,

$$\int_a^c f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_b^c f(x)g(x)dx$$
$$= \int_a^b g'(x)g(x)dx + \int_b^c \{-g'(x)g(x)\}dx$$
$$= \frac{1}{2}g(b)^2 - \frac{1}{2}g(a)^2 + \frac{1}{2}g(b)^2 - \frac{1}{2}g(c)^2$$

#. 미분가능성을 따질 때 0의 개수를 고려한다는 것은

• 미분 불가능한 함수에 어떤 함수를 곱해주어 미분 가능하게 만들어야 할 때가 있다.
일반적인 해법을 알고 써야, ※특수※ 같은 것에서 애먹지 않는다.

• 미분계수의 정의; $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

• 곱함수는 인수를 포함할 것이기에, $f(a)g(a)=0$ 이므로
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)}{(x-a)}$ 꼴이 남게 된다.

• 중요한 건, 몇개부터 조건을 무시하고 죽일 수 있는가? 이다.

• 만약 √ 조건이라고 쳐보자. $\sqrt{|x-3|}$ 에 $(x-3)$ 몇개를 곱해줘야할까?

→ $\frac{\sqrt{|x-3|}\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$ ⇒ 0 으로 잘 가므로, 1개면 충분하다.

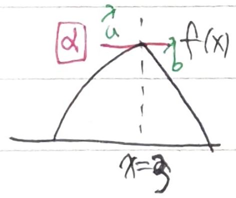
• 만약 $\sqrt{|x-3|}$ 이 있다면, $|x-3|$ 몇개를 곱해줘야 할까?

→ $\frac{\sqrt{|x-3|}\,|x-3|}{x-3}$

$-\sqrt{|x-3|} \to 0$

$+\sqrt{|x-3|} \to 0$

⇒ 0으로 잘 가므로, 1개면 충분하다.

• 

$|x-3|$을 몇개를 곱해줘야할까?

→ $\frac{f(x)\,|x-3|}{x-3}$

3(+) $\boxed{\alpha}$

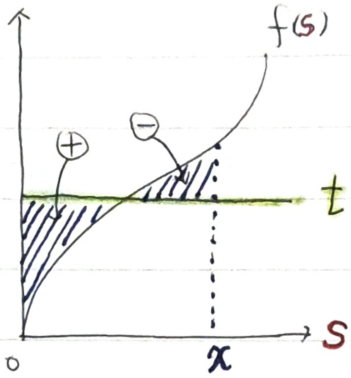
3(−) $-\boxed{\alpha}$

→ 미분불가능하다!

#. 이변수 함수의 정적분

① 기본유형 (2022 예비문항 24번)

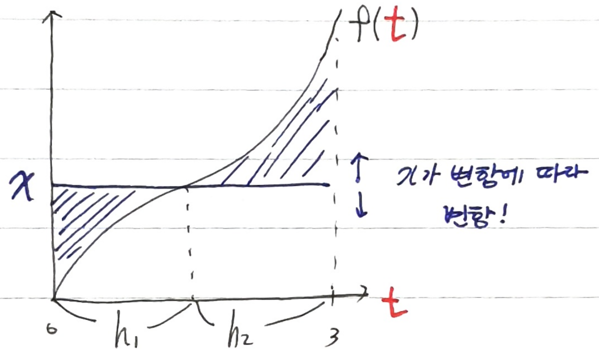
$$g(x) = \int_0^x \{t - f(s)\}\, ds.$$



② 특수유형

$$g(x) = \int_0^3 |x - f(t)|\, dt$$

$$g'(x) = h_1^{\oplus} - h_2$$



③ 특수-합성 유형 (개특수)

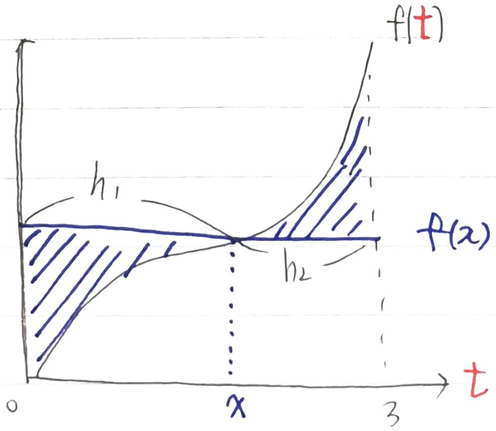
→ ②에 함수를 합성한것으로 보면 됨. x 대신 f(x) 넣고, g(f(x)) = h(x)라고 두면

$$h(x) = \int_0^3 |f(x) - f(t)|\, dt$$

★ 미분할때가 Point.

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = f'(x)\{h_1 - h_2\}$$

↑ 식으로서 확인 ↑ 직관적인변화



★ f가 감소중일때는 $f'(x) < 0$ 이므로,
상황에맞게 $f'(h_1 - h_2)$나 $(h_2 - h_1)f'$ 중 하나를 적절히 선택

$\alpha^2-\alpha-1=0$ 꼴의 식 등장 시

· 근의공식 박아버렷~~~~ 도 좋지만, 하나만 더 생각하자.

만약 저 식을 얻었는데,

$\frac{1}{3}(\alpha^3-2\alpha^2+2\alpha-7)=?$

이라는 물음이 뜨면, $\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 를 다 갖다 박아 계산할 것인가?

· 정답은, '아니옵시다' 이다.

$\alpha^2-\alpha-1=0$ 을 잘 이항하여, $\alpha^2=\alpha+1$ 꼴로 바꾼 뒤

☑ $\alpha^3 \to \alpha(\alpha^2) \to \alpha(\alpha+1) \Rightarrow \alpha^2+\alpha=(\alpha+1)+\alpha=2\alpha+1$

이런식으로 차수를 다 낮춰서 계산하는 것이 좋다.

$\int_{g(x)}^{f(x)} h(x)dt$ 를 미분할때

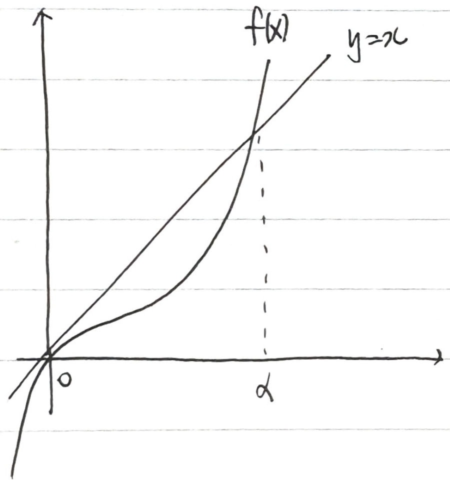
· 적분구간에 ⊖가 끼는 순간 조나 헷 갈린다.

⇒ 아래 방법을 따르면 해결된다.

· 구간에 들어찬 함수의 도함수를 "괄호치고 앞"에 쳐준다

ex $\left[\int_{-2x}^{x} tf(t)dt\right]' = xf(x)-(-2)(-2x)f(-2x)$

#. 대소판정 시 합성의 관점을 이용할 수 있다.



$|f(f(x))-x|$ $(0<x<\alpha)$

부호가 궁금하다.

~~$x<f(x)$~~ $f(x)<x$

$f(f(x))<f(x)$

※ 개념 : 증가함수는 합성해도 부등호 방향이 같고
감소함수는 합성하면 부등호 방향이 바뀐다

⇒ $0<x<\alpha$ 에서 $x>f(x)$.

$f(x)>f(f(x))$

$\therefore x>f(f(x))$

정석풀이

$f(x)$ 증가함수. $>x$ 면

$f(f(x))>f(x)$ 이고

$f(f(x))>f(x)>x$.

#. 구간바꾸기 정적분 성질

※ 떼어내기 $\boxed{1}$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x+2} f(t)\,dt - \int_x^{x+2} f(t)\,dt.$$

※ 떼어내기 $\boxed{2}$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt.$$

⇒ 이런 문제에 적용가능.

$$\begin{cases} \int_a^x f(t)\,dt \times \int_b^x f(t)\,dt = x^4 - 1 \\ \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = 2} \end{cases}$$

⇒ 위에 곱이 있으니, 차나 합으로 바꾸면 연립 이 될듯.

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = 2$$ 로 변환.

곱과 합차를 안다 → 이차방정식 세워서 연립.

#. 근의 개수가 제한되는 상황에서 눈치까기.

- 일단. 눈치가 좀 있어야 한다.

$\begin{cases} f(a) = a + p \\ f(b) = b + p \end{cases}$ 의 연립은. $f(x) = x + p$ 의 근이 a, b를 포함함을 의미.

- 다항함수는 실근 (직선과의 교점) 개수가 제한된 함수이다.

$\therefore$ $f(x)$가 2차함수 일 때,

$f(3) = 3 - k$
$f(2) = 2 - k$ 라면, $f(x) = x - k$의 근이 $x = 3$, $x = 2$, $x = \alpha$ 인 것.
$f(\alpha) = \alpha - k$

그러나, $f(x)$는 직선과의 교점이 최대 2개이다.

그러므로, $\alpha = 3$ 또는 2 라는 결론을 얻는다.

샤매품으로 $\begin{cases} g(a) = 2a - k \\ g(b) = 2b - k \end{cases}$ 등이 있고,

일반화로는 $\begin{bmatrix} f(a) = g(a) \\ f(b) = g(b) \end{bmatrix}$ 가 있다.

#. 적분으로 정의된함수 다루기.

1 $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ 를 만난다면.

- 하나의 함수로 보고, $\begin{cases} h(\alpha)=0 \\ h'(x)=f(x) \end{cases}$ 로 본다.

- 도함수를 $f(x)$로 갖고, $(\alpha, 0)$을 지나는 함수 라고 생각한다.

2 $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = x-\alpha$ 같은 꼴을 만난다면?

① $h(x) = x-\alpha$ 로 본다.

② $\boxed{\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt - (x-\alpha)} = 0$ 으로 이항하고

$g(x)$로 둬보자.

$g(x) = g(\alpha)$ 인 x를...

$\begin{cases} g'(x) = \{f(x)-1\} \\ g(\alpha)=0 \end{cases}$ 인 함수의 실근을 찾는 방정식으로 바뀐다.

3 $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ 와 $\int_{\beta}^{x} f(t)\,dt$ 는 평행이동 관계 이다.

둘의 도함수는 $f(x)$로 같으므로 '모양'이 같고.
각각 $(\alpha, 0)$ // $(\beta, 0)$을 지나므로
평행이동(y축 방향으로) 관계이다.

평균 변화율과 극한

(h→0 인지, h→0+ 인지 구별하면서 보기)

1 $\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)|}{h} = k$ 가 내포하는 것.

① $|f(x)|$ 가 절댓값 함수임에도 불구하고 $x=a$에서 미분이 가능하다. (∵ 미분계수가 실수 k로 존재)

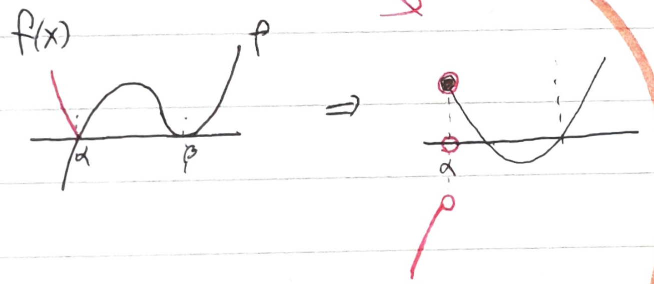
② $f(a)=0$ 이다

③ ∴ $f'(a)=0$이다. ($f(x)$는 $x=a$에서 x축에 접한다)

2 $\lim_{h\to 0+} \frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}$

⇒ $|f(x)|$ 의 우 미분계수. (양수 / 음수 모두 가능.

ex)



비교지점.

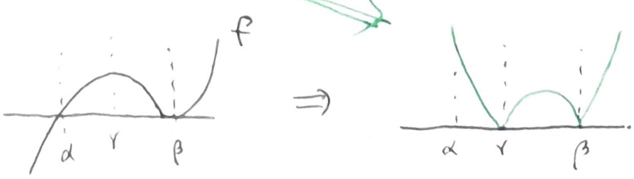
3 $\lim_{h\to 0+} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}$

⇒ $f(x)$의 우미분계수의 절댓값. → 무조건 ≥ 0.

(∵ $h>0 \to |h|=h$)

$\lim_{h\to 0+} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \Rightarrow |f'(x+)|$

ex)



$\boxed{4}$ $\lim_{h\to 0+} \dfrac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$ ⇒ 절댓값함수 $|f(x)|$의 좌미계 + 우미계 C.S

$\boxed{5}$ $\lim_{h\to 0+} \dfrac{|f(x+h) - f(x-h)|}{h}$ ⇒ |좌극한 + 우극한| (좌미계 + 우미계 의 절댓값) ≥ 0

$\boxed{6}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$ ⇒ $\boxed{4}$와 같음, 항상 존재

$\boxed{7}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(x+h) - f(x-h)|}{h}$. ⇒ 존재할수도, 안할수도 ($\because$ $h=|h|$ or $-|h|$ at $0<h<0$)

$\boxed{8}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(x+h) - f(x)|}{h}$ ⇒ 존재할수도, 안할수도 있음.

$h\to 0\oplus$ $(|h|=h)$ $\lim_{h\to 0+} \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \oplus|f'(x+)|$

$h\to 0\ominus$ $(|h|=-h)$ $\lim_{h\to 0-} \ominus\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \ominus|f'(x-)|$.

같은 값인지 비교해서 존재성 판단하는 단계가 필요하다.

※ 태도

△1 극한식이 아닌, 하나의 함수, 즉 그래프를 그릴 대상으로 바라볼 것.

△2 $h>0$: $h=|h|$, $h<0$: $h=-|h|$

△3 $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 에서 $f(a)=0$일때, $f(a)$는 그냥 쓰지말기.

x축, y축에 동시에 접하는 원

• x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$ 위에 존재한다.

∴ $f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$를 중심으로 하고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은

$f(x) = x \cup f(x) = -x$ 에서 $x=0$일때를 빼준것과 같다.

이차함수 최고차항이 문자일때

ex) $(a+3)x^2 + (a+1)x + 5 = x$

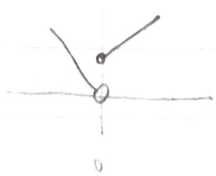
의 근의 개수를 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$의 불연속점 개수는?

⇒ $\boxed{a=-3 \text{ 일 때를 주의하자}}$.

$f(x)\cdot f(-x)$의 연속성

• $x=0$일 때, 극한값은 있을지 몰라도, 함숫값은 다를수 있기에 조심한다.

$$f(0+)f(0-) = f(0-)f(0+) \neq \{f(0)\}^2$$



평균 변화율과 극한...

※ 비교 관점.

Ⓐ

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h}$$

⬇

$|f(x)|$의 우 미분계수

⇒ 양, 음 둘 다 가능

Ⓑ

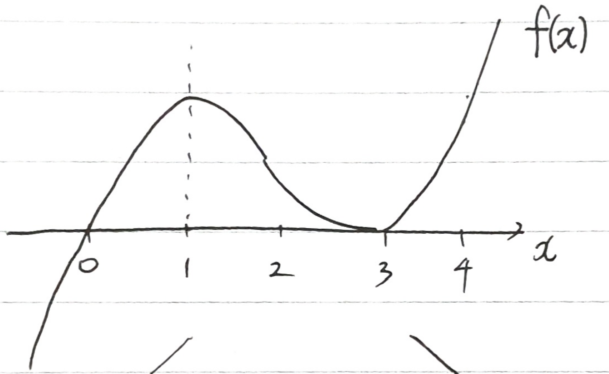
$$\lim_{h\to 0+} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h}$$

⬇

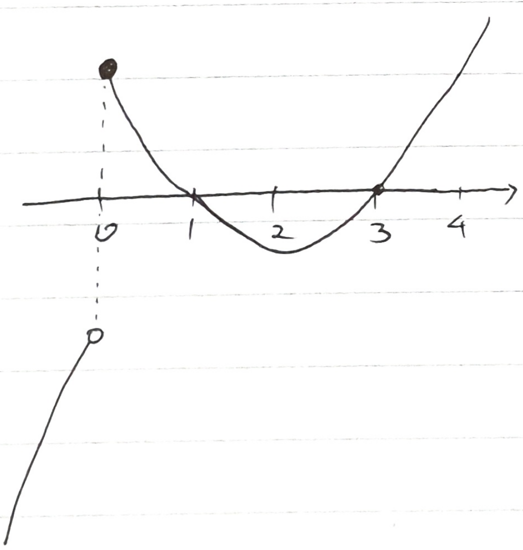
$$\left(\left|\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\right)$$

$|f(x)$의 우미분계수$|$

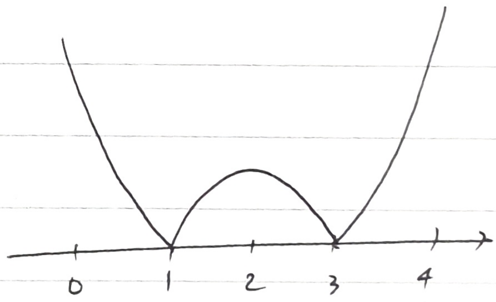
⇒ 무조건 0 이상.



Ⓐ



Ⓑ



⟷ 절댓값함수의 우미분계수

⟺ 우미분계수의 절댓값

Ⓒ

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(f(x+h)) - f(f(x))}{h}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(f(x+h)) - f(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\downarrow$$

$$f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$\Leftrightarrow$ 합성함수 $f \circ f(x)$의

x에서의 미분계수

Ⓓ

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(f(x)+h) - f(f(x))}{h}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(f(x)+h) - f(f(x))}{(f(x)+h) - (f(x))}$$

$$\downarrow$$

$$f'(f(x))$$

$\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$의

$x = f(x)$에서의 미분계수.

▪함수의 제시

$|f(x)| = g(x)$ → $g(x)$는 $g(x) \geqq 0$ 이다. $g(\alpha)=0$이라면, $g'(\alpha)=0$ 이어야 한다

$|f(x)| = \int_6^x g(t)dt$ → $f(6)=0$, $f'(6)=0$ 이다. (무조건 극솟값이다)

→ $\int_6^x g(t)dt$ 는 실전 미가이므로, $|f(x)|$도 실전 미가이다.

$f(g(x)) = 3x^2$

① $f(g(x))$는 실수 전체 미분가능
② $f(g(x))$는 이계미분 가능 (월례 9월 30번)
③ $f(g(x))$는 $f(g(x)) \geqq 0$ 만족
④ $f(g(x))$는 우함수

$|f(x)+g(x)|$

① 정말 쉬운 상황이면 각각 그래프 그려서 해석
② $f(x)+g(x) = h(x)$로 두고,
$h(x)$를 상수와 비교하든, $h(\alpha)=0 \rightarrow h'(\alpha)=0$을 이용하든, 미분해서 그리든..

$\int_3^x f(t)dt = x-\alpha$

① $x=3$대입 : 좌변0, $\alpha=3$
② $\int_3^x f(t)dt - (x-\alpha) = h(x)$로 두고 미분해서.
$h'(x) = f(x) - 1$ 로 두고 $h(x)$를 그리든 ~

$f(x) \cdot f(2-x) = 4$
($f(x)$ 연속 전제)

① $f(x)$는 절대 0이 못된다.
② 그러므로, $f(x)>0$ or $f(x)<0$이고, 이는 부호가 일정함을 의미한다.
③ 양변을 $f(x)$로 나누고 극한 때려볼 수 있다 (연속이니, 극한값=함숫값)
④ 산술기하도 생각해볼 수 있다.

$|f(x)|=|g(x)| \Longleftrightarrow$

방 $f(x) = \pm g(x)$ 의 근

함 $g(x)$가 만약
$g = (x)(x-1)(x-2)$ 이면, f는 "선택"