2023학년도 띠꾸' 모의고사 1회
정답 및 해설
수학영역

▶공통과목

번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	②	9	①	17	71
2	①	10	③	18	17
3	③	11	③	19	6
4	③	12	②	20	21
5	④	13	⑤	21	191
6	⑤	14	③	22	39
7	②	15	①		
8	④	16	4		

▶확률과 통계

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	②	26	③	29	84
24	④	27	①	30	191
25	②	28	⑤		

▶미적분

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	③	26	①	29	24
24	②	27	④	30	216
25	⑤	28	①		

▶기하

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	④	26	②	29	8
24	③	27	①	30	53
25	①	28	⑤		

※참고서적
2022학년도 예비시행, 6월, 9월 평가원 모의평가
2022학년도 시대인재 서바이벌 모의고사
수학의 정석 - 확률과 통계, 기하와 벡터
고난도 평가원 문항 옛 기출문제
교육청 모의고사 기출문제

▶감히 예상해보는 등급 커트라인

	확률과 통계	미적분	기하
1등급	92	88	87
2등급	85	83	83
3등급	80	78	78

▶공통과목

1. ②

$2^1 \times 2^{\log_2 3} = 2 \times 3 = 6$

2. ①

$f'(x) = 3x^2 + 2$, $f'(2) = 14$

3. ③

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \int_{-1}^{1}(5x^4+7)dx \\ &= 2\int_0^1 (5x^4+7)dx \\ &= 2\left[x^5+7x\right]_0^1 = 16\end{aligned}$$

4. ③

$x^2 - x = 6$을 만족하는 x는 -2, 3이다.

$\therefore \frac{1}{6}(3-(-2))^3 = \frac{125}{6}$

5. ④

$a(t) = 6t^2 + 6t - 4$, $a(3) = 68$

6. ⑤

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 4$이므로, (구하는 값)$= 24$

7. ②

$y = |f(x)|$와 $y = 3$의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$, $(8, 3)$이다.

$y = 0$일 때, 가능한 x의 정수좌표는 1

$y = 1$일 때, 가능한 x의 정수좌표는 1,2

$y = 2$일 때, 가능한 x의 정수좌표는 1~4

$y = 3$일 때, 가능한 x의 정수좌표는 1~8

$\therefore$ (구하는 값)$= 15$

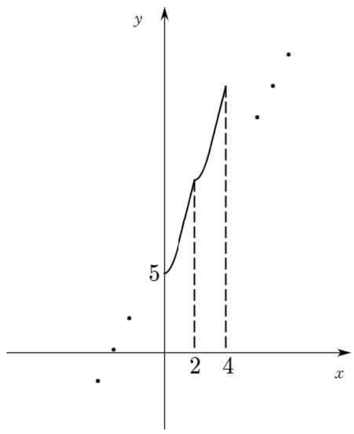
8. ④

주어진 극한값에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수임을 알 수 있고, 이차항의 계수는 1이다. 또한 $f(x)$는 x를 인수로 가지고, $f'(0)=2$이므로 $f(x)$를 완성해보면, $f(x)=3x^3+2x^2+2x$임을 알 수 있다.

$\therefore f'(1)=15$

9. ①

함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이므로, $a=4$이다. 주어진 조건에 의해 $f(x)$를 그려보면 다음과 같다.



$\therefore \int_0^4 f(x)dx$

$=2\int_0^2 f(x)dx+12$

$=2\left(\int_0^1 (2x^2+5)dx+\int_1^2 (4x+3)dx\right)+12$

$=2\times\frac{44}{3}+12=\frac{124}{3}$

$\therefore a+\int_0^4 f(x)dx=4+\frac{124}{3}=\frac{136}{3}$

10. ③

원에 내접하는 사각형의 성질에 의해 $-\cos(\angle ACB)=\cos(\angle ADB)$이다. 이 때, $\overline{BC}=\overline{CA}=x$라 하자. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해 $25=2x^2+\frac{6}{5}x^2$,

$x^2=\frac{125}{16}$이다.

또한 삼각형 ABD에서 코사인 법칙에 의해

$25=(\overline{AD})^2+25-2\times\frac{3}{5}\times5\times\overline{AD}$,

$\overline{AD}=6$이다.

따라서 사각형 ACBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times x^2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times5\times6=\frac{121}{8}$이다.

11. ③

주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$임을 알 수 있다. 항등식의 양변을 미분하여 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=a=2$이다. 이 때, 주어진 항등식에 $x=1$과 $x=-1$을 대입하면,

$f(1)=6+4\int_0^1 f(t)dt$ ……………… ㉠

$f(-1)=-6+4\int_0^{-1} f(t)dt$ ………… ㉡

이고, ㉠－㉡을 하면,

$f(1)-f(-1)=12+4\int_{-1}^1 f(t)dt$이다.

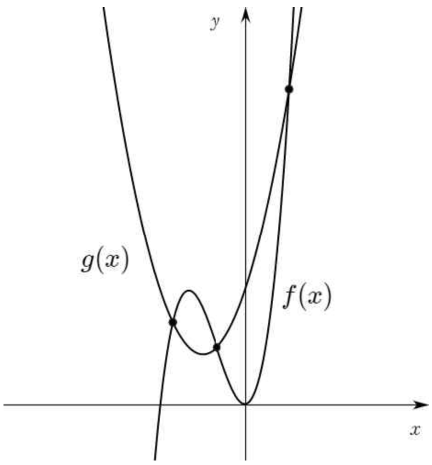
주어진 조건에 따라, $\int_{-1}^1 f(t)dt=-3$이다.

따라서 $f(1)=-3$이다.

12. ②

조건에 따라서 $h(x)$라는 함수는 $f(x)$와 $g(x)$중 더 아래쪽(작은) 함수를 뜻한다.
즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 값 중 더 작은 값을 택한다는 것이고, 두 함수의 교점에서 따라가는 함수가 달라질 가능성이 높다.
만약 교점이 없는 경우에는 하나의 함수만을 따라간다.

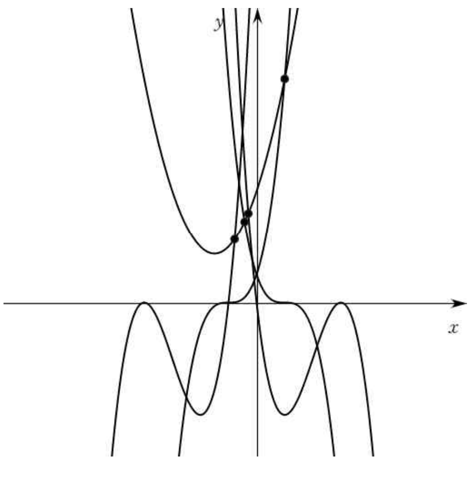
ㄱ. $f(x)=x^3+3x^2$일 때, $f(x)$와 $g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이 때, $h(x)$의 미분가능하지 않은 지점의 개수는 3이므로, $n(S)=3$이다.(거짓)

ㄴ. $g(x)$는 항상 양수의 값을 가진다. 따라서 우리가 살펴볼 부분은 $f(x)\geq 0$의 부분이다. 이 때, 삼차함수의 ∞으로의 발산속도는 이차함수보다 크다. 그러므로 $f(x)$와 $g(x)$는 항상 만날 수밖에 없고, 집합 S는 항상 공집합이다. (참)

ㄷ. 당연히 거짓이다. 왜인지 모르는 친구들은 없겠지만, 형식상 반례를 조금만 보도록 하자.



13. ⑤

$a_n=d_1(n-1)-10$, $b_n=d_2(n-1)+3$이라 하자. (가)조건을 이용하면,

$$d_1(m-1)-10=d_2(m-1)+3$$
$$m(d_1-d_2)-(d_1-d_2)=13$$
$$(m-1)(d_1-d_2)=13$$

이 된다. 또한, (다)조건에 의해,

$$-50+10d_1\leq 15+10d_2$$
$$d_1-d_2\leq \frac{13}{2}$$

이다. 이 때 (나)조건을 고려하면 $m=14$, $d_1-d_2=1$이거나, $m=2$, $d_1-d_2=13$이 되어야 한다. (다)에 의해 $m=14$, $d_1-d_2=1$이고, 이 때 d_1, d_2가 10이하의 자연수임을 생각할 때, $m+d_1+d_2$의 최댓값은 33이다.

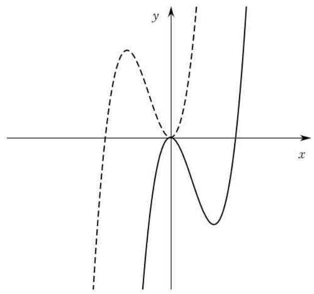
14. ③

알고 있는 함수는 $f(x)$이므로 $f(x)$에 대해 조건을 정리해서 보는 것이 깔끔할 것이다. 따라서

$$g(x)=\frac{|xf(x-p)+qx|}{x}=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x\geq 0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

라 할 수 있다. 이 때, $g(x)$는 연속이므로 $y=|f(x-p)+q|$라는 함수가 원점을 지난다.

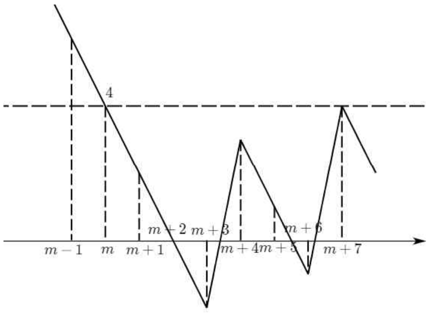
$y=|f(x)|$가 평행 이동해 원점을 지나고, (나)조건을 만족하면 $y=f(x-p)+q$가 아래의 점선, 실선의 상황만 가능하다.



$y=f(x)$의 개형을 고려했을 때, p, q는 양수이므로 점선이 $y=f(x-p)+q$의 그래프로 가능한 경우이다. 따라서 극소의 좌표는 $(-1,-7)$이 되고, $p=1$, $q=7$이 되어 $p+q=8$이다.

15. ①

수열 $\{a_n\}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그래프에서 알 수 있듯이 $n=m-1$일 때까지는 계속 감소하다가 임의의 자연수 m에서부터 $a_m = a_{m+7}$을 만족한다. 이 때, 문제의 조건에 의해 $m \geq 2$이다. 그래프를 보면, 주기성을 갖는 값은 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2로 정해져 있다. 따라서 가능한 a_1의 최솟값은 5이다.

16. 4

17. 71

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$이다.

$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \frac{71}{30}$

18. 17

$ar^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+1+r+r^2\right)=341$,

$\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+1+r+r^2\right)=\frac{341}{16}$, $r=4$이다.

따라서 $a_1=1$이고, $\frac{S_4}{S_2}=17$이다.

19. 6

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(1-\sin^2 x)+2n\sin x \\ &= -4\sin^2 x+2n\sin x+4 \\ &= -4\left(\sin x-\frac{n}{4}\right)^2+4+\frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

이다. $0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\sin x<1$이고, $f(x)$가 최댓값을 갖기 위한 조건은 $0<\frac{n}{4}<1$이다. 따라서 가능한 n의 값은 1, 2, 3이고, 이들의 곱은 6이다.

20. 21

(i) $f(x) \leq -x$일 때는 주어진 방정식의 실근의 개수는 항상 1이다.

(ii) $f(x) > -x$일 때, $2f(x)-5x=k$이고 이는 $x^3-9x^2+15x=k$의 서로 다른 실근 개수가 3이면 된다. $g(x)=x^3-9x^2+15x$라 하면, $g'(x)=3(x-1)(x-5)$이므로, $g(x)$는 극댓값 7과 극솟값 -25를 가진다. 이 때, $f(x)>-x$가 되려면 $x>0$이고, $k>0$이다. 따라서 $0<k<7$이므로 구하려는 값은 21이다.

21. 191

(나)조건에 의해 $f(x)$의 차수는 이차 혹은 사차라는 것을 알 수 있다. (가)에서 $f(x)=\pm 1$을 만족하는 x의 값이 3개이다. 이 때, $f(x)=0$의 해가 2, 6이라는 것은 너무나 당연하다.

(i) $f(x)$가 이차함수일 때, (가)에 의해 $f(x)$의 최솟값은 -1이 되어, $f(x)$의 식은 $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x-6)$이다.

(ii) $f(x)$가 사차함수일 때, 마찬가지로 최솟값은 -1이고, 허근을 갖지 않는다. (나)에 의해 $f(x)$는 삼중근을 가져야 한다. 이 때, $f(x)=a(x-2)^3(x-6)$ 또는 $f(x)=b(x-2)(x-6)^3$이 되는데 두 함수 모두 최솟값이 -1임을 고려하면, $a=b=\frac{1}{27}$이다.

(i), (ii)에서 $f(1)$으로 가능한 값은 $\frac{5}{27}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{125}{27}$이고, 각각 a_1, a_2, a_3이므로 $3(a_1+a_2)=\frac{155}{36}$이다.

22. 39
$|f(x)-g(x)|$는 실수 전체 집합에서 미분가능해야 하므로 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 접하며 만난다.⋯⋯⋯㉠
또한 $h(x)$의 미분가능성과 연속성을 고려해주면, $f(1)=f'(1)=0$임을 알 수 있다. ($\because g(x)$는 일차함수) 이 때, $f(x)=(x-1)^2(x-a)$라 할 수 있고, ㉠의 사실을 이용하면, $f(x)-g(x)=x^2(x-b)$의 꼴이 되어야 하므로, $g(x)=(2a+1)x-a$이 된다. (단, $a+2=b$) $h(2)=5$이므로
$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$이다. 따라서
$f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$이고
$h(4)=39$이다.

▶확률과 통계

23. ②
E(X)=40, V(X)=24

24. ④
$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^5\left(\frac{4}{5}a^2x-4a+2\right)dx=1$$
이므로, $a=\dfrac{1}{2}$이다.

25. ②
P$(A\cap B)$= $\dfrac{1}{6}$이고, A와 B는 독립이므로
P$(B|A)$=P(B)= $\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 P(A)= $\dfrac{1}{2}$
이므로, P$(A\cup B)$= $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$이다.

26. ③
(수학의 정석 - 확률과 통계 p.208)
반응시간을 확률변수 X라 했을 때,
P$(X<2.93)$=0.1003이다. 이 때 X는 정규분포 N$(m,1)$을 따르므로
P$(X<2.93)$=P$(Z>m-2.93)$이고,
P$(0\le Z\le m-2.93)$=0.3997이므로
표에서 $m-2.93=1.28$, $m=4.21$이다.

27. ①
주사위와 동전을 던졌을 때 가능한 경우의 수는 $6^2\times2^4$이다. 앞면이 나온 동전의 수로 가능한 것은 1~4고, 차례대로 확인하자.
$n(1\le n\le 4)$이 나올 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_n\times$(주사위 눈의 곱이 n인 경우의 수)
이므로 1,2,3,4일 때 각각 4,12,8,3이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{6^2\times2^4}=\dfrac{3}{64}$이다.

28. ⑤
음이 아닌 정수 a, b, c에 대하여 방정식 $a+b+c=9$의 해는 ${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_2$=55개
이다. 이 때 더 계산하기 쉬운 여사건의 확률로 접근해보자. $a<2$ 또는 $b>2$의

여사건은 $a \geq 2$, $b \geq 2$인데, 이 때 $a-2=a'$, $b-2=b'$이라 하자. 따라서 위의 방정식은 $a'+b'+c=5$의 형태로 바뀌고, 이를 만족하는 해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$이다. 따라서 구하는 확률은 $1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$이다.

29. 84

(가)에 $n=1,2$를 대입하면, $x_2 \geq x_1+2$, $x_3 \geq x_2+2$이다. 이 때, $x_3 \leq 10$이므로 $0 \leq x_1 \leq x_2-2 \leq x_3-4 \leq 6$이 성립한다. $x_2-2=x_2'$, $x_3-4=x_3'$라 하면, $0 \leq x_1 \leq x_2' \leq x_3' \leq 6$이 되고, 이는 모두 음이 아닌 정수이므로 ${}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$이다.

30. 191

(EBS 해설 축약)

사건 A: $a_5+b_5 \geq 7$

사건 B: $a_k=b_k$인 $k(1 \leq k \leq 5)$가 존재

사건 A는 주머니에 있는 흰 공과 검은 공의 수의 합이 7이상이어야 한다는 것이다. 따라서 7~10의 총 5개의 1,2로 가능한 합의 분할은 7=2+2+1+1+1, 8=2+2+2+1+1, 9=2+2+2+2+1, 10=2+2+2+2+2이 된다. 한편, 주사위를 던졌을 때 5이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 4이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 이 때 각 시행은 독립적이므로 a_5+b_5의 값이 몇이냐에 따라 그 확률이 달라질 것이다.

a_5+b_5	확률
7	${}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{3^5}$
8	${}_5\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{4}{3^5}$
9	${}_5\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\times\frac{2}{3^5}$
10	${}_5\mathrm{C}_5\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}$

각각의 경우에 의해

$\mathrm{P(A)}=10\times\frac{8}{3^5}+10\times\frac{4}{3^5}+5\times\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}$가 된다. 이 때 사건 A∩B는 a_5+b_5의 값이 7,8일 때 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 나오는 경우이다. 따라서 이는

$$\begin{aligned}\mathrm{P(A\cap B)}&={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\\&\quad+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\\&=3\times\frac{16}{3^5}+3\times\frac{4}{3^5}\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{48}{3^5}+\frac{12}{3^5}}{\frac{80+40+10+1}{3^5}}=\frac{60}{131}$$

이므로, $p+q=191$이다.

▶수고하셨습니다. 나를 믿어! -띠꾸'-

▶미적분

23. ③

24. ②

(준 식)$=\int_0^1 (x\sin 2\pi x)dx$

$=\left[-\frac{x}{2\pi}\cos 2\pi x+\frac{1}{4\pi^2}\sin 2\pi x\right]_0^1$

$=-\frac{1}{2\pi}$

25. ⑤

$\frac{dx}{dt}=\frac{2t+5}{t^2+5t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(e^t+4)(t^2+5t)}{2t+5}$ 이므로 $t=2$를 대입하면, $\frac{dy}{dx}=\frac{14}{9}(e^2+4)$이다.

26. ①

$a(t)=\left(-\frac{a}{t^2}, \frac{b}{2\sqrt{t}}\right)$이고,

$a(4)=\left(-\frac{a}{16}, \frac{b}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$이므로 $a=4$, $b=1$이다.

27. ④

$g(x)=-e^{-x}$이고, $l: y=e^t(x-t)+e^t$라 했을 때, l은 $f(x)$와 $g(x)$에 동시에 접하므로 $t=1$이 되어 $l: y=ex$이다. 이 때 넓이가 S_1인 도형과 넓이가 S_2인 도형은 원점 대칭이다. 따라서 $S_1=S_2$ 이다. $S_1=\int_0^1 e^x dx-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1$이므로, $S_1+S_2=e-2$이다.

28. ①

$\overline{QB}=2+2\cos\theta$고 $\angle QBP=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$

이다. 사인법칙에 의해 $\overline{BP}=4\sin\theta$이고

따라서

$f(\theta)=\overline{BP}-\overline{BR}$
$=2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta$

이므로

(준 식)$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta$

$=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

이다.

29. 24

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=-3$이어야 한다. 이 때 주어진 조건에 의해 $f'(a)=0$, $f(b)+3=0$, $f(b+6)+3=0$이다. 이를 이용하여 $f(x)$의 식을 세우면, $f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$이고, $f'(a)=0$임을 이용해주면, $b=a-3$이다. $f(a)=6$이므로 $p=-1$이고, $f(x)=0$에서 $x=a\pm\sqrt{6}$이다.

따라서 $(\alpha-\beta)^2=24$이다.

30. 216

(EBS 해설 약간 참고)

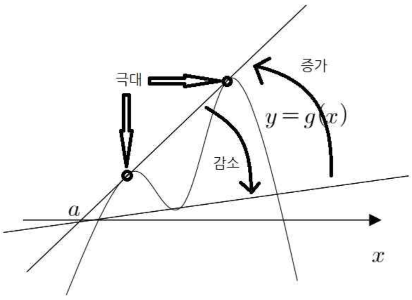
(가)의 식을 변형시키면 $f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$가 되고 이는 $(a,0)$과 $(x,g(x))$를 잇는 직선의 기울기 함수라고 생각해도 된다. (나)에서 $g(x)$의 공통접선은 $x=\alpha,\beta$에서 동시에 접하고 이 때 접선의 기울기는 M이다.

따라서 $g(x)-M(x-a)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$라 할 수 있고, $f(x)$는 극값을 3개 가지므로 $g(x)$는 극값을 1개 가질 수밖에 없다.

$2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)=M$은 실근을 1개 또는 2개 가져야 한다. 이 때 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$이므로 $y=4x(x^2-27)$에서 이 함수는 $x=-3$에서 극댓값 216을 가진다.

따라서 M의 최솟값은 216이다.

(참고 1) 그래프와 움직이는 형태



(참고 2)

$y=2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)$

=> $y=4x(x^2-27)$ with $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$

x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동 시킨 식이다.

▶수고하셨습니다. 나를 믿어! -띠꾸'-

▶기하

23. ④

24. ③

Q$(-1,-1,-5)$, R$(1,1,-5)$이므로

삼각형 PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times10\times2\sqrt{2}$이다.

25. ①

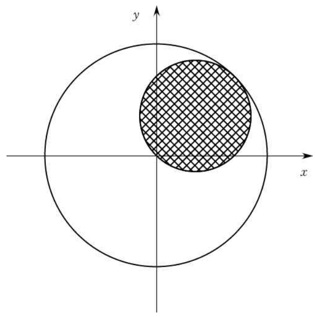
(수학의 정석 기하와 벡터 p.170)

P(x,y)일 때 $(x-2,y)\cdot(x+2,y)\le4$,

$x^2+y^2\le8$이다. 또 두 번째 조건에 의해

$(x-2,y)\cdot(x,y-2)\ge0$,

$(x-1)^2+(y-1)^2\ge2$이 되어 좌표평면에 해당부분을 표시하면,



원 내부의 흰 영역이다. 따라서 이 넓이는 $8\pi-2\pi=6\pi$이다.

26. ②

$\overline{AF}+\overline{AF'}=16$이고 원 C와 두 직선 AF, AF'과 만나는 점을 각각 P, Q라 했을 때

(사각형 AFBF'의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{AF}+\dfrac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{AF'}=72$

이다. 따라서

$\overline{BP}=72\times\dfrac{2}{\overline{AF}+\overline{AF'}}=72\times\dfrac{1}{8}=9$이다.

27. ①

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P'라 할 때, 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DP'}\perp\overline{BC}$이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{DP}$의 최솟값은 $\overline{AP'}+\overline{DP'}$라 할 수 있다.

삼각형 BCD는 직각삼각형이므로

$\overline{DP'} = \sqrt{3}$ 이고, 삼각형 ADP 또한

직각삼각형이므로 $\overline{AP'} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $\overline{AP'} + \overline{DP'} = 3\sqrt{3}$ 이다.

28. ⑤

$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta = 2$에서 점 Q를 직선 OP에 정사영한 점을 P′라 할 때, P′은 선분 OP의 중점이다. 이 때 점 Q는 오직 하나 존재해야하기 때문에 직선 P′Q는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16$에 접한다.

직선 P′Q가 x축과 만나는 점을 R라 하고 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16$의 중심을 C라 할 때 닮음비를 이용하면

$\overline{CQ} : \overline{OP'} = \overline{CR} : \overline{OC}$가 되어,

$\cos(\angle POR) = \frac{3}{5}$가 된다. 따라서 P$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

이고, $a+b=\frac{14}{5}$이다.

29. 8

(EBS 해설 축약)

긴 설명보다는 계산과 관찰 위주로 풀이를 해보자.

선분 AC의 중점을 F, 선분 MN의 중점을 E라 할 때 $\overline{MN}=2$, $\overline{AE}=3\sqrt{3}$, $\overline{AM}=2\sqrt{7}$ 이고 $\triangle AMN = 3\sqrt{3}$ 이다. 점 P를 평면 AMN에 정사영한 점을 H, P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하면,

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{MP}\times\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$,

$\overline{PQ} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ 이다.

한편, $\overline{AP}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{PE}^2 - \overline{HE}^2$ 이므로

$16-\left(3\sqrt{3}-\overline{HE}\right)^2 = 3-\overline{HE}^2$,

$\overline{HE} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$, $\overline{PH} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$,

$\overline{QH} = \frac{10\sqrt{21}}{63}$ 이다. ($\because$ 피타고라스 정리)

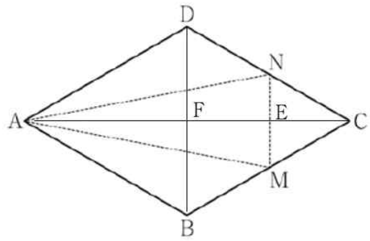
이 때, $\overline{PH}\perp$(평면 AMN), $\overline{PQ}\perp\overline{AM}$가 되어 삼수선 정리에 의해 $\overline{HQ}\perp\overline{AM}$이다.

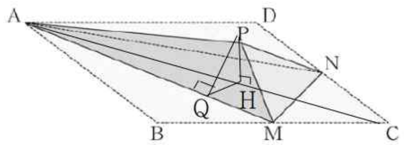
평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 했을 때,

$\cos\theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{9}$ 이고, 이 때 구하는 정사영의 넓이는 $3\sqrt{3}\times\frac{5}{9} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $p+q=8$이다.

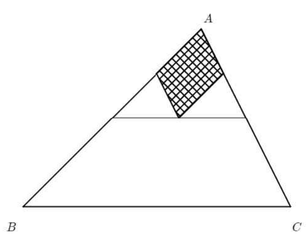
(참고) EBS에서 제공한 그림이다.





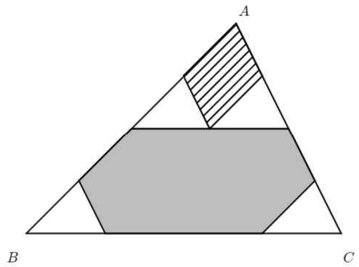
30. 53

$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$은 다음의 빗금 친 부분에 존재할 수 있다.



이제 우리는 경계 부분을 살펴서 영역의 끝부분을 알아볼 것이다. 만약 Q가 B이면, X가 존재 가능한 영역의 마지노선은 선분 AB 의 4등분점 중 B에 가장 가까운 점까지일 것이다. C일 때도 마찬가지이다.

이 때, $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$의 크기도 최대가 되면, 선분 BC의 4등분점 중 B와 C에 가장 가까운 두 점이 존재가능 영역의 마지노선이 될 것이다. 이를 그림으로 표현하면 다음의 회색 영역과 같다.



X가 나타내는 영역은 회색부분이므로 이 넓이는 $9-\frac{9}{4}-2\times\frac{9}{16}=\frac{45}{8}$이 되어, $p+q=53$이다.

▶수고하셨습니다. 나를 믿어! -띠꾸'-