미적분의 흐름

우리는 무엇을 하는 것인가? 미적분의 근본적인 물음에 대해 짚고 넘어갈 필요가 있다.

우리는 함수를 다루고 있으며, 함수의 해석은 ① Graph의 관점, ② 항등식의 관점 두 가지가 있다고 생각하면 된다.
특히, 항등식을 활용하는 문항은 익숙하지 않기 때문에 고난도 문항으로 느껴질 수 있으므로 연습을 확실히 하고 수능에 임할 필요가 있다.
주로, ① Graph의 관점은 미분의 활용 문항으로 ② 항등식의 관점은 미분법, 적분법, 적분값 구하기 문제로 출제가 된다.

그래프의 해법은 미정계수 구하기와 연관성이 크다. 조건을 만족하는 그래프를 그림으로써 그래프의 특이지점을 발견하고 그 특이지점을 통해 등식을 생성하여 미지의 계수를 구하는 흐름으로 진행되는 경우가 많다. 그래프의 특징이라 하면 ‘근, 극점, 변곡점, 접점’ 4가지를 말하며 이는 수많은 수학문제에서 답이 되는 상황이기에 대한민국 국민이라면 꼭 명심해야 하는 4점이므로 ‘국민4점’이라고 부르도록 하겠다.
그래프를 그리는 모든 상황에서, 그래프를 그리는 순간 ‘국민 4점의 발견’이 최우선 목표가 되어야함을 꼭 명심하자.
초월함수에서는 그래프의 정답 상황 중에 점근선이 추가된다. 점근선의 유무에 따라 그래프의 치역 범위, 실근의 개수, 극대 극소가 달라지기에 정답 상황에 1선을 추가하여 ‘국민4점과 1선’의 발견에 집중하도록 하자.

다만, 미정계수를 구하는 과정에서 꼭 그래프의 특징만 사용되는 것은 아니다.

(1) 함수가 구간별로 다른 상황에서 연결성을 확인함으로써 등식을 생성할 수 있다.
만약 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x\geq a) \end{cases}$이고 $f(x)$가 미분가능하다면 $g(a)=h(a)$, $g'(a)=h'(a)$라는 두 개의 등식을 얻을 수 있을 것이다.
이렇게 연결성 확인도 등식을 이끌어내거나 함숫값, 미분계수의 정보를 전달하므로 미정계수 구하기 문항에서 꼭 확인해야 하는 요소이다.
(2) 그래프의 해석법은 아니지만 미정계수를 구하는 방법으로 항등식에서의 대입값을 이용하는 방식도 있다.
문제의 조건에 항등식이 등장한다면, 대입, 그리고 미분 대입 등으로 원하는 값을 구할 수 있고 이러한 값들을 통해 미정계수를 구해낼 수 있다.

항등식은 연산에 의한 해법으로 진행된다. 항등식의 해법은 ‘값을 구하는 방식’과 ‘함수를 생성하는 방식’으로 나눠볼 수 있다.

(1) 계수비교, 미분과 대입, 적분과 대입은 원하는 값만을 얻어 답을 구하는 방식이다. 특히, 미분법, 적분법 문항에서 자주 볼 수 있는 문제해결 방식이다.
미분법, 적분법 유형의 문항들은 함수를 직접 구하지 않고 항등식으로 원하는 값만 얻어 해결하는 것이 가장 큰 특징이라 볼 수 있다.
(2) 함수의 생성은 항등식의 변형, 활용으로 제로베이스에서 함수를 만들어내는 방식이다. 기출로 많이 출제되지 않아 학생들에게 가장 낯설고 어렵게 느껴질 수 있는 영역이라고 볼 수 있다. 이 부분은 킬러공략법에서 더 자세히 다루도록 하자.

함수가 주어졌을 때, 우리가 할 수 있는 행동들.

- 함수
  - Graph 해법(해석)
    - 미정계수 구하기
      - 미지수를 구하기 위한 등식생성이 목표
      - 그래프의 특징 (국민4점 + 1선의 발견)
      - 연결성의 확인
      - 항등식에 대입
        - 극대극소의 발견
        - 접선의 활용
        - 방정식과 부등식
        - 미분가능성의 확인
        - 최대, 최소
        - 새롭게 정의된 함수와 문자
        - 계산 되지 않는 조건의 해석
  - 항등식의 해법(연산)
    - 계수비교
      ① 미정계수를 확정하여 $f(x)$ 구하기
      ② 다항함수에서 사용하기 때문에 수학2에서 사용
    - 미분과 대입
      ① 원하는 값만 구하기 — 미적분의 미분법
      ② 미정계수 구하기
    - 적분과 대입
      — 주로, 원하는 값만 구할 때 발문이 적분일 때
    - 함수 생성의 해석
      - $f(x), f'(x)$가 동시에 있는 경우 — 적분하여 $f(x)$ 구하기
      - $f(x+y)$와 같이 이변수 항등식이 있는 경우 — 미분정의 이용하여 도함수 구하기
      - $f'(x)$에 대한 부등식과 함숫값이 주어진 경우 — 정적분을 이용하여 $f(x)$추론 가능
      - $f(x+a), f(x)$의 함수 관계식 + 특정 구간의 함수가 주어진 경우 — 확장으로 함수 구하기
      - 문제에 주어진 표현을 식으로 옮길 수 있는 경우

미적분의 흐름

행동의 선택은 기준이 중요하다.

우리는 많은 공략법들을 배우지만 정작 중요한 기준에 대해 깊이 고민하지 않는 경우가 많다. 공략법을 선택하는 첫 번째 기준은 바로 문제의 목표, 즉 발문이라 할 수 있다. 미적분 문항은 문제를 위에서부터 읽어가면서 할 수 있는 것들을 생각하면 안 된다. 왜냐하면 하나의 조건을 수많은 방식으로 해석할 수 있기 때문이다. 처음 방향성을 잘 못 잡으면 문제의 의도를 파악하지 못 한 채 시간만 보내는 경험을 쉽게 할 수 있다.

미적분 문항은 거꾸로 보자. 문제의 목적(발문)과 주어진 조건을 확인하면서
① 함수구하기, ② 함수의 생성, ③ 원하는 값만 구하기
상황 중 어디에 해당하는지 대략적으로 결론을 낼 필요가 있다. 각각의 상황에서 우리가 해야 하는 행동이 확연히 다르기 때문이다. 다만, **다항함수의 경우 대부분 미정계수를 통한 함수 구하기**이므로 그 발문이 잘 구분되지 않는다면 함수구하기로 목표를 이해하고 문제풀이를 시작하자. **기출 분석 시, 확실한 기준을 통해 적절한 공략법을 선택하는 연습을 많이 하면 할수록 미적분이 굉장히 쉽게 느껴질 것이다.**

발문부터 확인하고 문제의 목표를 어느 정도 고민한 다음 조건을 방향성 맞게 해석하려고 하는 태도. 이 태도 하나로
미적분 실력이 크게 달라질 수 있음을 기억하자.

문제의 발문 상황과 우리가 해야 하는 행동들.

발문과 문제상황 확인

1. 함수 구하기 상황
① 함수의 형태를 알고 있다.
② 미정계수를 포함하고 있다.
③ 함숫값 혹은 $\int_0^6 f(x)dx$와 같이 단일 함수의 적분을 구한다.
(다항함수는 미분계수여도 함수를 구하는 문항이다.)

미정계수의 해법으로 진행
① 그래프를 이용한 국민4점과 1선 발견
② 연결성을 통한 등식 생성
③ 항등식의 대입을 통한 등식 생성
항등식에 대입할 때는 미분하여 대입할 수 있다.
미분은 가능하다면 반복할 수 있다.
④ 다항함수는 계수 비교할 수 있다.

2. 함수의 생성 상황
① 함수의 형태를 모른다.
② 함숫값 혹은 $\int_0^6 f(x)dx$와 같이 단일 함수의 적분을 구한다.
(다항함수는 미분계수여도 함수를 구하는 문항이다.)

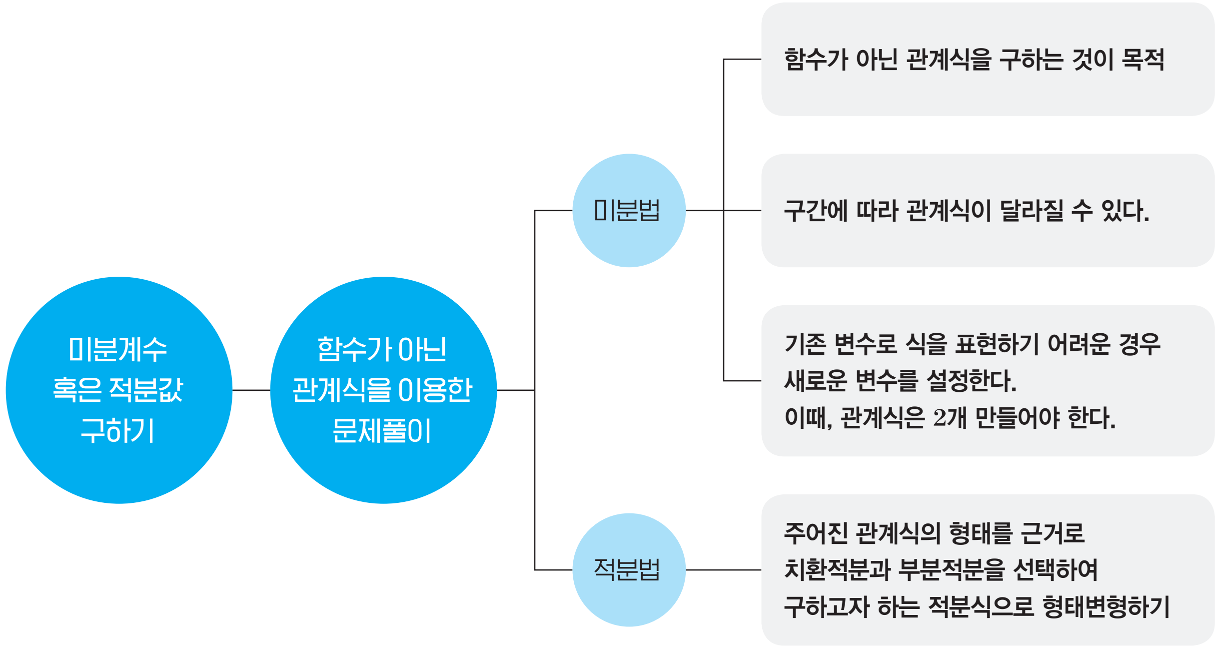
함수의 생성으로 진행
① 함수의 생성은 '말을 식으로'와 '항등식의 해석'이 있다.
② 제한된 방식으로만 함수를 생성할 수 있으므로 구분이 어렵지 않다.

3. 원하는 값만을 구하는 상황
① 항등식이 주어져 있다.
② 항등식을 생성할 수 있는 식 생성 표현이 있다.
(길이, 기울기, 넓이, 대입, 접하는상황)
③ 함수의 생성을 적용할 수 없다.

주로, 미분법과 적분법 문항일 가능성이 높다.
① 다항함수는 주로 함수가 구해지기에 항등식으로 원하는 값만을 얻는 경우는 많지 않다.
② 대부분 '여러 가지 미분법', '적분법' 문항으로 항등식에서 원하는 값만 구한다.
③ 미적분 과목의 발문이 $f'(1)$과 같이 미분계수를 묻는다면 조건에 맞게 항등식을 생성 후 미분계수만을 구한다.
④ $\int_a^b tf'(t)dt$와 같이 복잡한 적분을 적분법 문항이며 주어진 항등식을 이용하여 올바른 적분법을 선택한다.
⑤ 발문이 적분이면 항등식을 적분하여 원하는 값만을 얻을 수 있다. 물론 함숫값도 함수를 구하지 못한다면 대입하여 구할 수 있다.

미적분의 흐름도

미분법 / 적분법 흐름도



미분법과 적분법은 함수를 구하는 것이 아니라 항등식을 생성, 혹은 주어진 항등식을 이용하여 원하는 값만을 구하는 유형이다.

미분법 4점문항은 항등식을 생성하는 과정을 반드시 물어보게 되어 있다. 항등식을 생성할 때는 다음 2가지에 유의하자.

① 구간에 유의하기 ② 새로운 변수의 설정

1 미분법의 응용은 관계식을 만드는 것이다.

(1) $f'(1)$과 같이 미분계수를 물어보는 문항은 미분법 문항이라고 생각할 수 있다.
이러한 유형은 함수를 구하여 $f'(x)$를 구한 후 원하는 값을 찾는 것이 목적이 아님을 알아야 한다.
(2) f가 포함된 관계식(항등식)을 생성한 후 미분하고 대입하여 '값'만을 찾아내는 것이 목표이다.
(3) 식을 생성하는 기본적인 표현은 '길이, 기울기, 넓이, 대입, 접하는 상황'임을 기억하자.

역함수 미분법은 특별한 것이 아니다.
역함수는 정의를 이용하여 항등식을 생성할 수 있는 표현이기에 미분법과 연결되는 것 뿐이다.
항등식이 필요한 미분법, 적분법 문항에서 역함수가 나왔다면 정의를 통한 항등식 생성이 풀이의 시작임을 기억하자.

01 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 10이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.

미적분의 흐름도

02

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

03

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

미적분의 흐름도

2 주어진 변수로 관계식이 완성되지 않는 경우, 혹은 함수를 표현할 변수가 없는 경우 변수를 직접 도입하자.

(1) $t-f(t)$의 직접적인 관계식이 만들어지지 않을 때, 새로운 변수를 도입한다.
(2) 이 때, t와 new변수, $f(t)$와 new변수 2개의 관계식을 생성해야 한다.
(3) 생성된 관계식은 항등식이므로 적절한 미분법과 대입을 통해 목표값을 구한다.

04

$0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은? [4점]

① -28　② -24　③ -20　④ -16　⑤ -12

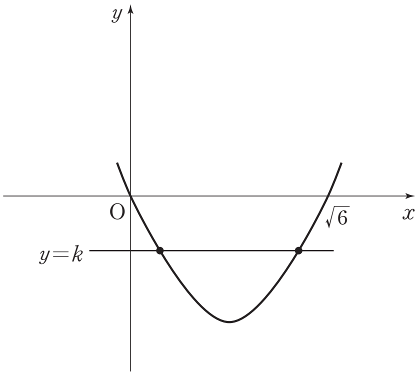
05

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

미적분의 흐름도

06

곡선 $y=x^3-6x$의 $0<x<\sqrt{6}$인 부분과 직선 $y=k$가 아래 그림과 같이 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리를 $f(k)$라고 하자. 이 때, $f'(-5)$의 값을 구하시오.



Tr's knowhow

• 변수설정에 대하여

변수 설정
식생성의 기본상황

- **미분법**
- **방정식과 부등식의 생성**
- **최대, 최소 문제에 식이 없는 경우**
- **꼭 필요한 점, 각이나 길이가 없을 때**

꼭 필요한 것을 문자로 설정하고 이 설정한 문자에 대한 관계식을 만든다.

(1) 고난도 문제는 하나의 문자로 식이 정리되지 않는 경우가 많다. 또한, 문제에 주어진 문자만으로 문제가 해결되는 것도 아니다. 그러므로 꼭 필요한 상황에서는 문자를 스스로 설정하는 시도가 굉장히 중요하다.

(2) 설정한 문자는 쉽게 구해지지 않는다. 애초에 연립을 통해 구해지지 않기에 설정한 것이기 때문이다.
그러므로 문자를 새로 설정한 경우에는 관계식을 생성하는 것만으로 충분하다.

(3) 문자를 새로 잡는 것이 보편적인 상황
① 미분법
② 방정식을 새로 생성하는 경우
③ 최대 최소의 식을 생성해야 하는 경우
④ 계산에 있어서 꼭 필요한 점이나 문자(미적분에서의 연산),
각, 길이(사인, 코사인법칙)이 설정되어 있지 않은 경우

3 관계식이 정의역 구간에 따라 달라지는 경우가 있다. 특히, 발문에서 미분계수를 2개 물어보는 경우에 구간에 유의하자.

(1) $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)$와 같이 발문에서 미분계수 2개를 물어보면 각각의 정의역에서 관계식이 다른 문항이다.
(2) 구간이 나눠지는 함수나 관계식은 일반적으로 그 경계의 정의역을 구하는 것이 중요하다.
하지만 미분법 문항은 그 경계의 값은 중요하지 않으므로 시간이 없다면 구하지 않아도 좋다.
(3) 구간의 유무를 확인하고 싶다면 애매한 상황을 보지 말고 정의역 양 극단을 보는 것이 관찰에 용이하다.

07

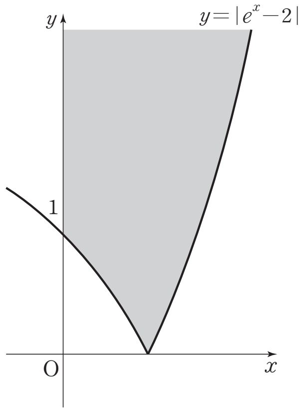
좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
(나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



4 음함수, 매개변수 미분의 활용도 같은 접근법을 갖는다.

미분할 식이 없는 경우의 문제해결 방법

(1) 문제에 나와 있는 변수를 이용하여 관계식을 생성할 수 있으면 생성한다.

(2) 문제에 제시 되어 있는 변수로 부족한 경우에는 그 둘을 이어 줄 수 있는 새로운 변수를 도입하고 삼각관계를 완성한다.

$$t \quad \not\leftrightarrow \quad f(t)$$

① New 변수 ②

(3) 적절한 미분법을 선택하여 미분한다.

(4) 상수 값을 대입한다.

08

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, $t\,(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

미적분의 흐름도

09

실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)