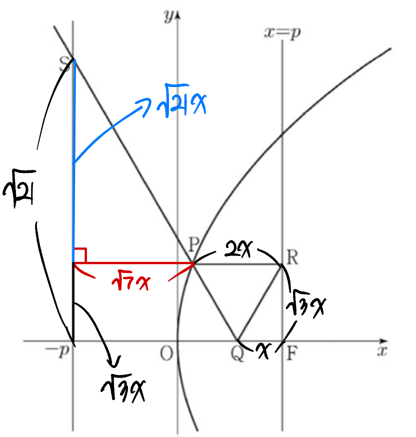
이차곡선		
1.	예비	29
2.	6평	29
3.	7월	28
4.	6평	28
5.	9평	28
6.	예비	27
7.	6평	27
8.	10월	29
9.	4월	28
10.	3월	29
11.	3월	30
12.	사관	29

평면벡터		
13.	예비	28
14.	7월	30
15.	10월	28
16.	사관	27
17.	6평	30
18.	9평	30
19.	4월	29
20.	사관	30

공간도형		
21.	9평	27
22.	7월	29
23.	10월	30
24.	사관	28
25.	9평	29
26.	예비	30

- 경 → 빨 → 파 순서로 보면 됩니다.
- (처음 봤을 때 풀이)는 제가 문제를 처음 봤을 때의 풀이 방식입니다.
- (교과 외)라고 적힌 부분은 평소에 교과 외 공부하셨던 게 아니면 그냥 넘어가세요.

29. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $F(p, 0)\ (p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 x축과 평행하다. 직선 PQ가 점 $S(-p, \sqrt{21})$을 지날 때, $\overline{QF}=\frac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



(예비평가) /

① $\overline{QF} = x$로 두자

② 포물선 정의
$\overline{PF} = \sqrt{7}x$ 이용

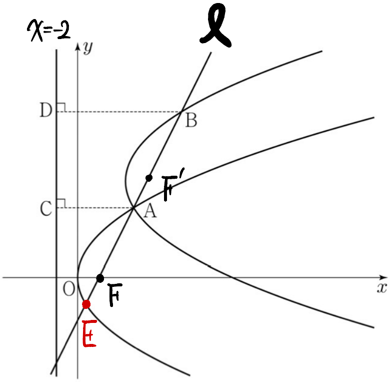
$$\sqrt{21}x + \sqrt{3}x = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7}x + x = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{7-\sqrt{7}}{6}$$

$\boxed{6}$

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



(6평) 2

① $C_1 : y^2=8x$

$F(2 . 0)$

$C_2 : (y-2a)^2=8(x-a)$

$F'(2+a . 2a)$

$F, F' \in l$

② 점 E 설정

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AE}=\sqrt{5}a$

$A(x_1 . y_1)$ $B(x_1+a . y_1+2a)$

$E(x_1-a . y_1-2a)$

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=(\overline{AF})+(x_1+a+2)-(\overline{AE})$

$=(\overline{AF}-\overline{AE})+(x_1+a+2)$

$=-(\overline{EF})+(x_1+a+2)$

$=-(x_1-a+2)+(x_1+a+2)$

$=2a=k$

a 구하자.

③ $l : y = 2x - 4$
$C_1 : y^2 = 8x$) 교점 x좌표 찾기

$\Rightarrow (2x-4)^2 = 8x$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = \underbrace{3+\sqrt{5}}_{A\text{의 } x\text{좌표}},\ \underbrace{3-\sqrt{5}}_{E\text{의 } x\text{좌표}}$

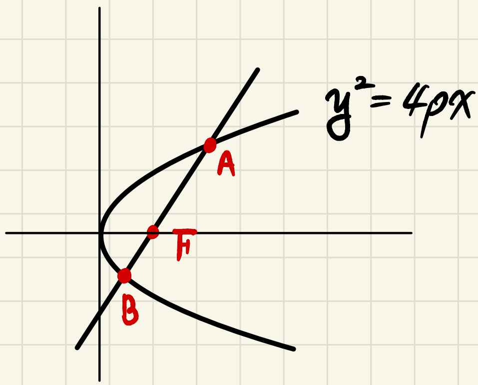
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

$k = 4\sqrt{5}$

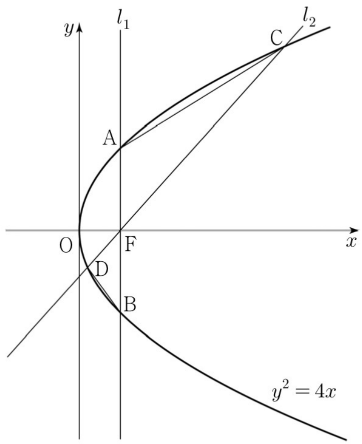
$k^2 = \boxed{80}$

NOTE 포물선 $y^2=4px$ 의 초점 F를 지나는 직선과 포물선의 교점을 A, B라 할 때,

$$\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}}=\frac{1}{p}$$ 이다.



28. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나고 x축과 수직인 직선 l_1이 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 F를 지나고 기울기가 $m\ (m>0)$인 직선 l_2가 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배일 때, m의 값은? (단, 두 점 A, C는 제1사분면 위의 점이고, 두 점 B, D는 제4사분면 위의 점이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(7월) 3

① $\overline{AF}=\overline{BF}$

FCA 밑변 : $\overline{AF}$
FDB 밑변 : $\overline{BF}$
같음

FCA 높이 : C와 l_1 사이 거리

FDB 높이 : D와 l_1 사이 거리

② C와 l_1 사이 거리 : D와 l_1 사이 거리 $=5:1$

$\Rightarrow \overline{FC}:\overline{FD}=5:1$

$\Rightarrow \overline{FC}=5k,\ \overline{FD}=k$

$\frac{1}{5k}+\frac{1}{k}=\frac{1}{p}=1 \Rightarrow k=\frac{6}{5},\ \overline{FC}=6$

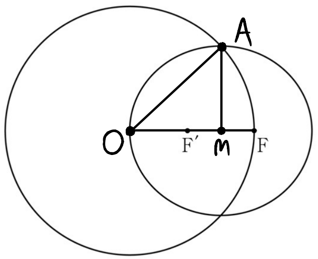
③ $\overline{FC}=6 \Rightarrow$ C와 직선 $x=-1$ 사이 거리 $=6$

$\Rightarrow$ C의 x좌표 5 $\Rightarrow$ C$(5, 2\sqrt{5})$ $\Rightarrow \boxed{m=\frac{\sqrt{5}}{2}}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(6평) 4

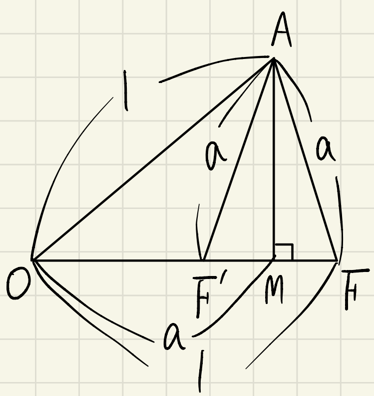
① 원 중심 O

꼭짓점 A 설정

$\overline{FF'}$ 중점 M 설정

$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{OF} = 1$

$\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{OM} = a < 1$



② 직각삼각형 2개

AOM, AFM

$\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 = \underline{1-a^2}$

$\overline{AM}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{FM}^2$

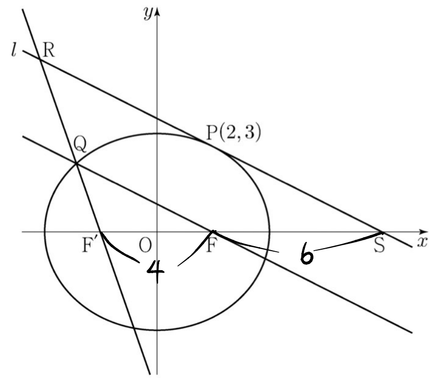
$= \underline{a^2 - (1-a)^2}$

③ $1 - a^2 = 2a - 1$

$\Rightarrow a^2 + 2a - 2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3} - 1}$

28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2, 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F′Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는? [4점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

(9평) 5

① F(2.0), F′(-2.0)

장축 = 8

l: $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$

S(8.0)

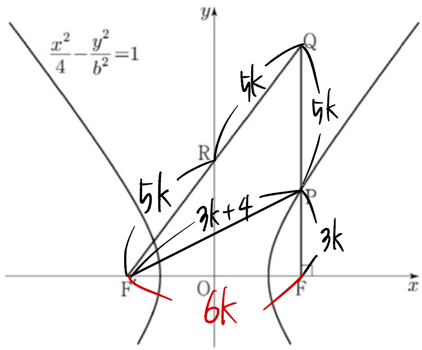
② QF′F 둘레

= 4 + 장축 = 12

③ QF′F : RF′S 닮음 2 : 5

RF′S 둘레 = $12 \times \dfrac{5}{2}$ = $\boxed{30}$

27. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 PF 위에 $\overline{QP}:\overline{PF}=5:3$이 되도록 점 Q를 잡는다. 직선 F$'$Q가 y축과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{QP}=\overline{QR}$이다. b^2의 값은? (단, b는 상수이고, 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



① $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ② $1+2\sqrt{5}$ ③ $\frac{3}{2}+2\sqrt{5}$
④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}+2\sqrt{5}$

(예비평가) **6**

① 주축 = 4

$\overline{QP}=\overline{QR}=\overline{RF'}=5k$

$\overline{PF}=3k$

$\overline{PF'}=3k+4$

② 직각삼각형 QF$'$F

$\Rightarrow \overline{F'F}=6k$

직각삼각형 PF$'$F

$3k+4=3\sqrt{5}k \Rightarrow k=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{3}$

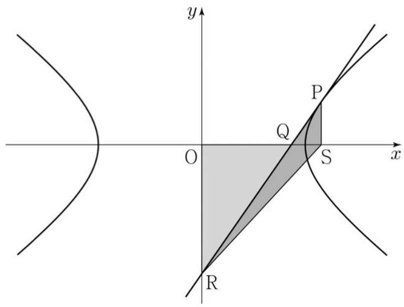
③

$b^2=\overline{OF}^2-4$

$=(3k)^2-4$

$=(\sqrt{5}-1)^2-4=\boxed{2+2\sqrt{5}}$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\ (k>0)$ 에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

(6평) 7

① (처음 봤을 때 풀이) 숫자 감각

Q (3. 0) 으로 잘 찍었더니

$A_1 : A_2 = 4 : 9$ 잘 나옴

P (4. k)

$l: \frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$

$a^2 = 12 \Rightarrow$ $\boxed{\text{주축 } 4\sqrt{3}}$

---

① $\overline{OQ} = m$, $\overline{QS} = n$, $\overline{PS} = k$ 설정

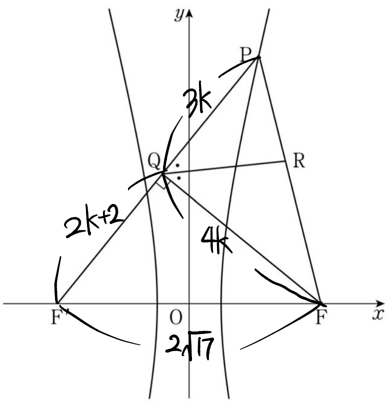
$\Rightarrow m + n = 4$, $\overline{OR} = \frac{m}{n}k$

② $A_1 : A_2 = \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{m}{n}k + k\right) : \frac{1}{2} \times m \times \frac{m}{n}k$

$= n \times \frac{m+n}{n} : m \times \frac{m}{n}$

$= 4 : \frac{m^2}{n} = 4 : 9 \Rightarrow$ <u>$m = 3$</u>

29. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, ∠FQP의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자. $4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, $\angle F'PF<90°$이다.) [4점]



(10월) 8

① 주축 2

F $(\sqrt{17}, 0)$ F′ $(-\sqrt{17}, 0)$

각 이등분선 정리

$\Rightarrow \overline{PQ} : \overline{QF} = 3 : 4$

$\overline{PQ} = 3k$, $\overline{QF} = 4k$

$\overline{PF} = 5k$, $\overline{PF'} = 5k+2$

② 직각삼각형 QF′F

$(k+1)^2 + (2k)^2 = 17$

$\Rightarrow 5k^2+2k+1 = 17 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$

③ $\frac{1}{2} \times (5k+2) \times 4k$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{32}{5} = \boxed{32}$

NOTE

초점이 F, F′인 모든 타원에 대하여

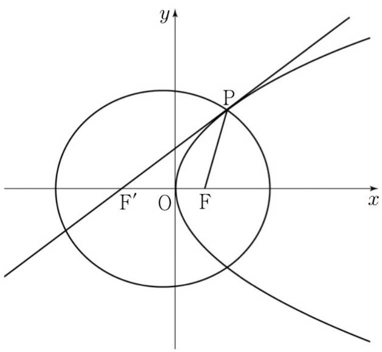
$(\text{장축})^2 - (\text{단축})^2 = \overline{FF'}^2$

$(\text{장축})^2 - \overline{FF'}^2 = (\text{단축})^2$

이다.

28. 좌표평면에서 두 점 F$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, F$'(-c, 0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F$'$을 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]

① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14 ④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15



(4월) 9

① 포물선 준선

$x = -\frac{9}{4}$

$\overline{PF} = \frac{25}{4}$

⇒ P의 x좌표 4

⇒ P(4, 6)

② F′(−4, 0), $\overline{PF'} = 10$, 장축 $= \frac{65}{4}$

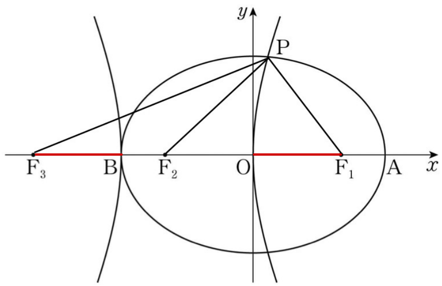
$\overline{FF'} = \frac{25}{4}$

③ $(\text{단축})^2 = \left(\frac{65}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} \times (13^2 - 5^2)$

$= \frac{5^2}{4^2} \times 12^2$

$= 5^2 \times 3^2$ ⇒ $\boxed{\text{단축} = 15}$

29. 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c > 0)$ 인 타원이 x축과 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



(3월) 10

① 타원 장축 $= 6$

쌍곡선 주축 $= 3$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 6$$

$$\overline{PF_3} - \overline{PF_1} = 3$$

$$\Rightarrow \overline{PF_2} + \overline{PF_3} = 9$$

② $\overline{F_3F_2} = ?$

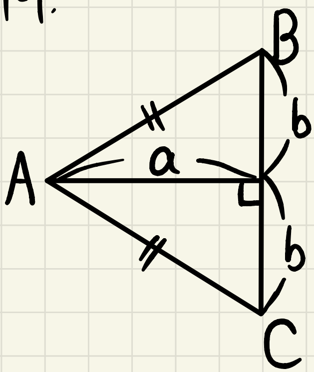
$$\begin{aligned}\overline{F_3F_2} &= \overline{F_3B} + \overline{BF_2} \\ &= \overline{OF_1} + \overline{BF_2} \\ &= \overline{OF_2} + \overline{BF_2} \\ &= \overline{OB} = 3\end{aligned}$$

③ 삼각형 PF_2F_3 둘레 $= \boxed{12}$

NOTE 다음과 같은 이등변삼각형 ABC에 대하여

$$\cos(\angle BAC) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

이다.



Proof) $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, $\overrightarrow{AC} = (a, -b)$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{a^2+b^2}}$$

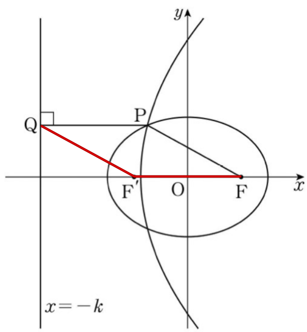
$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \blacksquare$$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k$ $(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{F'FP}) = \frac{7}{8}$

(나) $\overline{\mathrm{FP}} - \overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{FF'}}$

$c+k$의 값을 구하시오. [4점]



(3월) 11

① $\overline{PF} + \overline{PF'} = 12$

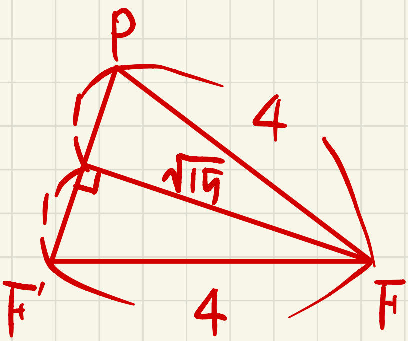
(나) $\cancel{\overline{FP}} - \overline{F'Q} = \cancel{\overline{PQ}} - \overline{FF'}$

$\Rightarrow \overline{F'Q} = \overline{FF'}$

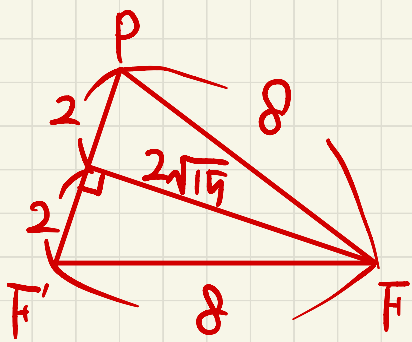
사각형 PQF'F : 마름모

② $\overline{FP} = \overline{FF'}$

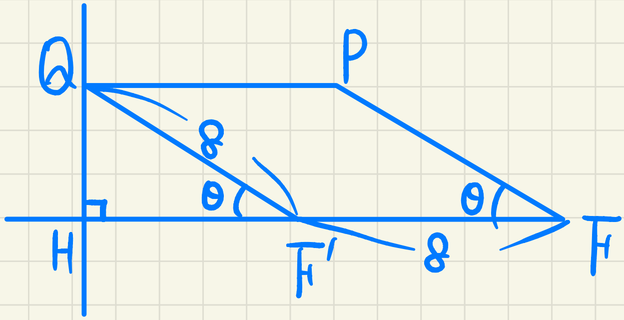
$\cos(\angle F'FP) = \frac{7}{8} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow a^2=15,\ b^2=1$ 로 두자.



$\xRightarrow{\times 2}$
(∵ 장축 12)



③



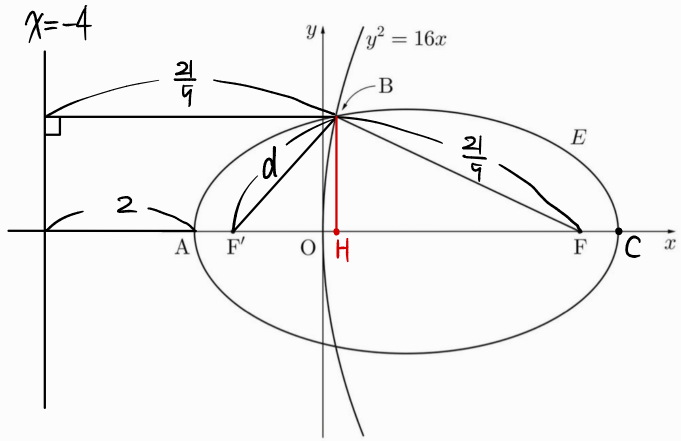
$H(-k, 0)$ $F(c, 0)$ $c+k = \overline{HF}$

$\cos\theta = \frac{7}{8} \Rightarrow \overline{HF'} = 7$, $c+k = \boxed{15}$

29. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 A$(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F′이 선분 AF 위에 있는 타원 E가 있다. 포물선 $y^2=16x$가 타원 E와 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{21}{5}$일 때, 타원 E의 장축의 길이는 k이다. $10k$의 값을 구하시오. [4점]

사관

12



① $F(4.\ 0)$

준선 $x=-4$ 설정, 타원 꼭짓점 $C(c,0)$ 설정

$\overline{BF'}=d$로 두면

타원 장축 $= d+\frac{21}{5} = c+2$

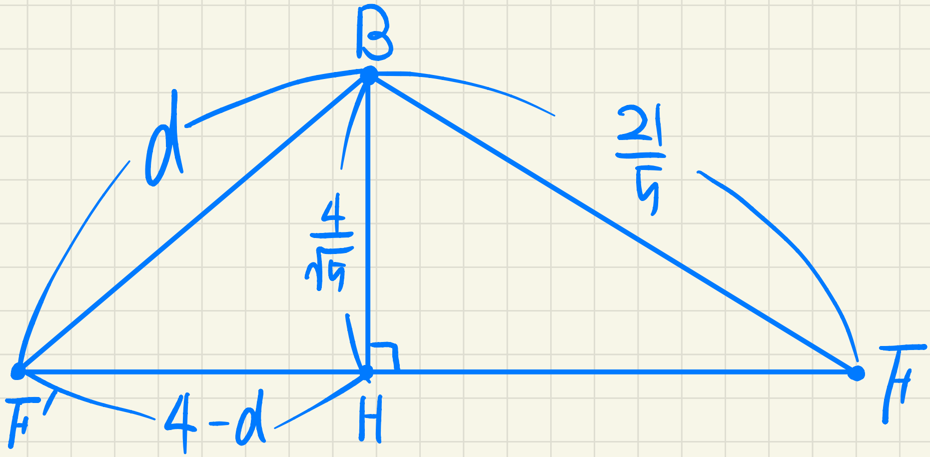
② B x좌표 $\frac{1}{5}$ ⇒ $B\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$\overline{AF'}=\overline{CF}=c-4=d-\frac{9}{5}$

$\overline{OF'}=2-\overline{AF'}=\frac{19}{5}-d$

B에서 x축에 내린 수선의 발 H 설정 ⇒ $\overline{F'H}=4-d$

③



직각삼각형 BF'H

$$d^2 = (4-d)^2 + \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow d^2 = d^2 - 8d + 16 + \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow d = 2 + \frac{2}{5}$$

$$\text{장축} = 2 + \frac{23}{5} = k$$

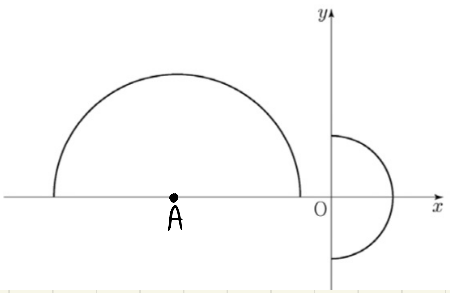
$$\therefore 10k = 20 + 46 = \boxed{66}$$

28. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4$ $(x \ge 0)$ 위의 한 점 P(a, b)에 대하여

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$$

를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16$ $(y \ge 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$



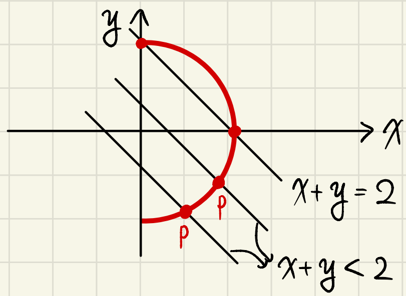
(예비평가) 13

P가 제4사분면 위에 있으면

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$ 일 수 없음

∴ P는 제1사분면 위에 있다.

(사실 선택지만 봐도 그렇다.)



P가 제4사분면에 있으면

$a+b<2$ 인데

선택지가 다 2보다 크다.

(처음 봤을 때 풀이)

① 반원 중심 A 설정 $(-5, 0)$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$

$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ}$

$= -5a + |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|$ Q 유일

$= -5a + 8 = 2$

$\Rightarrow a = \frac{6}{5}, \ b = \frac{8}{5}$ $\boxed{\frac{14}{5}}$

(다른 풀이)

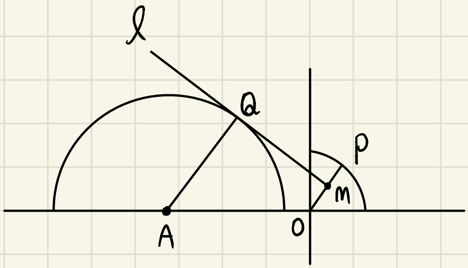
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 = |\overrightarrow{OP}| \times \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|$

⇒ Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발은 $\overline{OP}$의 중점이다.

⇒ $\overline{OP}$의 중점을 지나고 $\overrightarrow{OP}$와 수직인 직선 l에 대하여

l과 반원 $(x+5)^2+y^2=16$ $(y \geq 0)$은 한 점에서만 만난다.

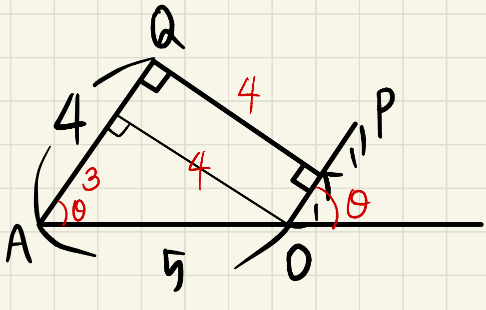
⇒ l은 반원 $(x+5)^2+y^2=16$ $(y \geq 0)$과 접한다.



$l \perp$ 직선 AQ

$l \perp$ 직선 OP

$\overrightarrow{AQ}$ $\overrightarrow{OP}$ 평행

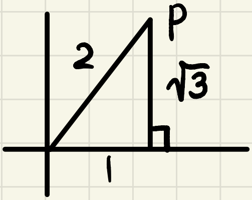


$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

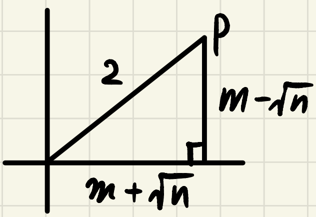
선택지 숫자 감각

P(a, b) $a^2+b^2=4$ 일 때 $a+b$를 물었는데 선택지가

$\frac{12}{5}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{13}{5}$ $\frac{27}{10}$ $\frac{14}{5}$ 이다. 다 유리수다.

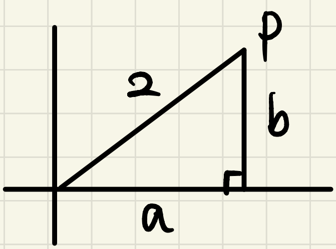


P가 이런 식으로 생겨먹었으면 답이 유리수가 나오지 않는다.



m, n은 유리수

P가 이런 식으로 생겨먹었으면 답이 유리수가 되긴 하는데 이렇게 더러울 것 같진 않다.



a, b가 둘 다 유리수일 것 같다.

저 직각삼각형의 세 변의 길이를 자연수 비로 표현될 수 있다.

$3:4:5 \Rightarrow a+b=\frac{3+4}{5}\times 2=\boxed{\frac{14}{5}}$

$5:12:13 \Rightarrow a+b=\frac{5+12}{13}\times 2=\frac{34}{13}$

$8:15:17 \Rightarrow a+b=\frac{8+15}{17}\times 2=\frac{46}{17}$

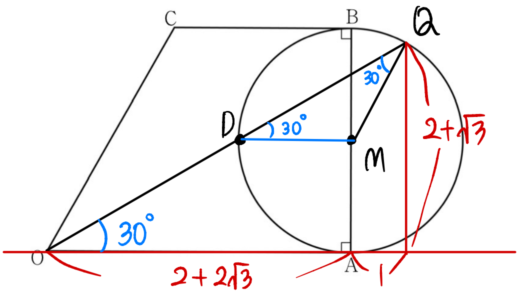
등등

정 안 풀리면 이렇게 찍을 수라도 있어야 될 것 같다.

30. 평면 위에

$$\overline{OA}=2+2\sqrt{3},\ \overline{AB}=4,\ \angle COA=\frac{\pi}{3},\ \angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC 가 있다. 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P 를 Q 라 할 때, 직선 OQ 가 원과 만나는 점 중 Q 가 아닌 점을 D 라 하자. 원 위의 점 R 에 대하여 $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}$ 의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]



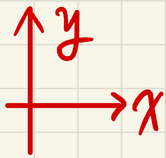
(7월) 14

① 원 중심 M 설정

Q 위치 바로 정할 수 있음

② D 위치 정확히 어딘지 확인

좌표 설정



$\overrightarrow{OQ}=(3+2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$

$=\left(\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3}),\ 1\times(2+\sqrt{3})\right)$

$\overrightarrow{DM}=(2,0)$

③ $\overrightarrow{DQ}=(3,\sqrt{3})$, $|\overrightarrow{DQ}|=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{MR}$

$\le 2\sqrt{3}+|\overrightarrow{DQ}||\overrightarrow{MR}|=6\sqrt{3}=M$

$M^2=\boxed{108}$

28. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$, $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$
>
> (나) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|=-2|\overrightarrow{PC}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{PD}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

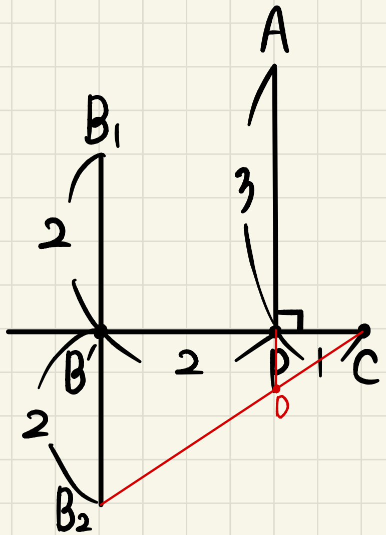
(10월) 15

선분 길이들이 다 바로 주어짐
⇒ 임의로 설정해서 풀자.

(가)(나) 둘 다 $\overrightarrow{PC}$ 있으니까
$\overrightarrow{PC}$를 눕혀서 그리자.

(가) $|\overrightarrow{PA}|=3$ $|\overrightarrow{PC}|=1$

(나) $\angle BPC=135°$, B에서 직선 PC에 내린 수선의 발은 PC를 2:3으로 외분한다.



B가 B_1이면 점 P는 삼각형 ABC 외부에 있다.

∴ $B=B_2$

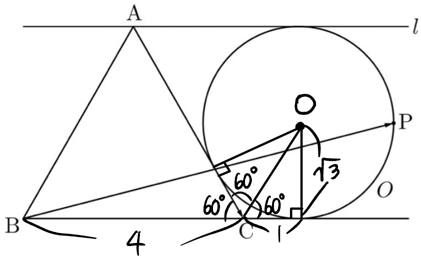
② 삼각형 CPD, CB'B 닮음 1 : 3

⇒ $\overline{PD}=\frac{2}{3}$, $\overline{AD}=\frac{11}{3}$ ⇒ $\boxed{k=\frac{11}{2}}$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]

(사관)

16



① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49 ⑤ 50

① 원 반지름 $= \frac{1}{2} \times$ (l과 직선 BC 사이 거리) $= \sqrt{3}$

원 중심 O 설정

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|$

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}|-\sqrt{3} \le |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}| \le |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}|+\sqrt{3}$

② $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}|$ 구하자. $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}|^2-3 = ?$

좌표 설정 y x

$\overrightarrow{AC} = (2, -2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BO} = (5, \sqrt{3})$

$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}| = |(7, -\sqrt{3})| = \sqrt{52}$

③ Mm

$= 52-3 = \boxed{49}$

30. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다.
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

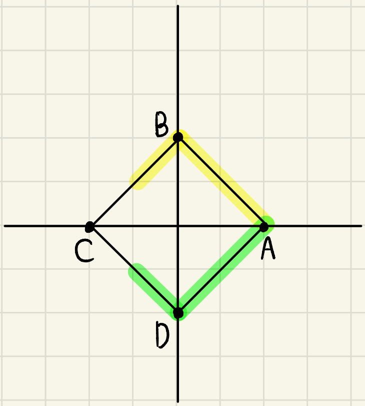
점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(6평) 17

① (가) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
또는
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$
또는
$\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$

(나) P 영역

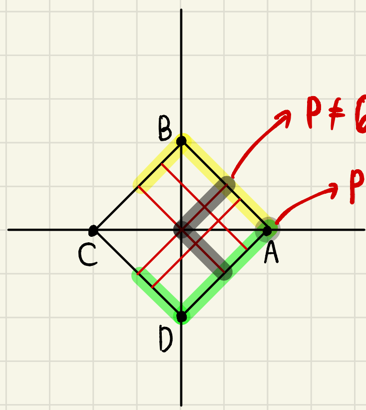
(다) Q 영역



② $\overline{PQ}$ 중점 M

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$
$=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2$

M 영역



$P\neq Q \Rightarrow \overline{PQ}=2\sqrt{2}, \overline{MP}=\sqrt{2}$

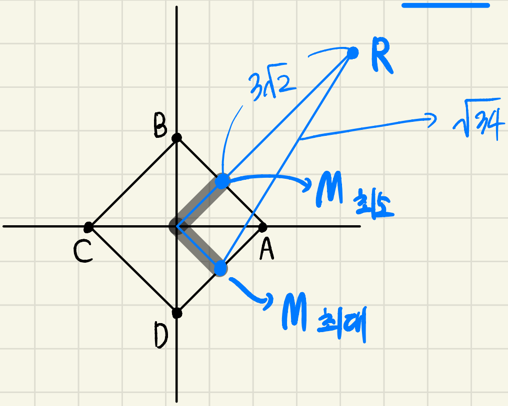
$P=Q=A$, $\overline{MP}=0$

③ $|\overrightarrow{RM}|^2 - |\overrightarrow{MP}|^2$

(i) $P = Q$ 일 때 $|\overrightarrow{RM}|^2 - |\overrightarrow{MP}|^2 = |\overrightarrow{RA}|^2 = \underline{20}$

(ii) $P \neq Q$ 일 때 $|\overrightarrow{RM}|^2 - |\overrightarrow{MP}|^2 = |\overrightarrow{RM}|^2 - 2$

$$\underline{16} \le |\overrightarrow{RM}|^2 - 2 \le \underline{32}$$



$$M = 32 \quad m = 16$$

$$M + m = \boxed{48}$$

30. 좌표평면에서 세 점 A$(-3,1)$, B$(0,2)$, C$(1,0)$에 대하여 두 점 P, Q가

P 영역

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=2,\quad \underline{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.

선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0} \ge 1$일 때, $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

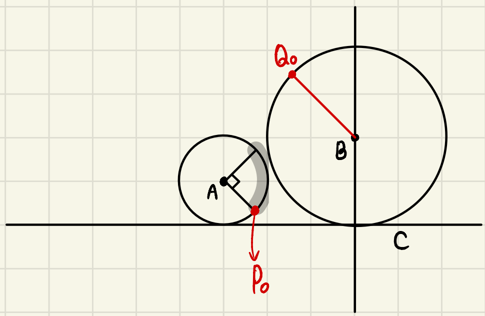
(9평) 18

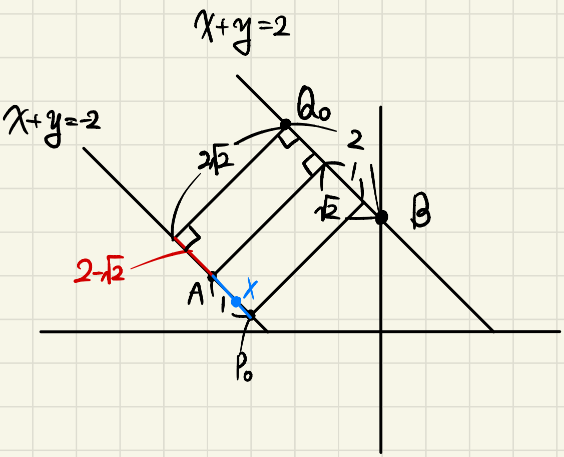
① $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$가 최소가 되도록 하는 P $\underline{=P_0}$

$\underline{\overrightarrow{BQ_0}=-2\overrightarrow{AP_0}}$





$\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BQ_0}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}$

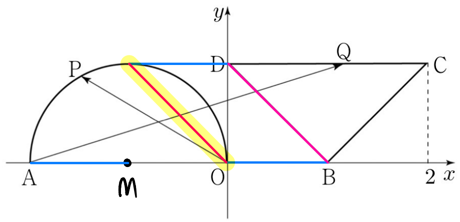
$=2\sqrt{2}-|\overrightarrow{AX}|\times 2 \ge 1$

$\Rightarrow \underline{|\overrightarrow{AX}| \le \sqrt{2}-\frac{1}{2}}$

$$|\overrightarrow{Q_0X}|^2 \le (2\sqrt{2})^2+\left[(2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\frac{1}{2})\right]^2 = 8+\frac{9}{4}=\frac{41}{4}$$

$\boxed{45}$

29. 좌표평면 위에 네 점 A$(-2, 0)$, B$(1, 0)$, C$(2, 1)$, D$(0, 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1\,(0 \le y \le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



(4월) 19

① 반원 중심 M 설정

$$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}|$$
$$=|(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})|$$
$$=|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$$

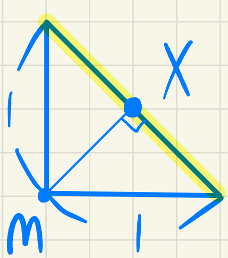
$M=|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{MC}|$ (Q = C, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MC}$ 평행)

$=\sqrt{10}+1$

② $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$ 언제 최소?

P = A, Q ∈ 선분 BD

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MX}$라 할 때, X 위치



$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|=|\overrightarrow{MX}|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$M^2+m^2=10+2\sqrt{10}+1+\frac{1}{2}$

$p=11+\frac{1}{2}$, $q=10$

$\boxed{115}$

30. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$k \ge 0$

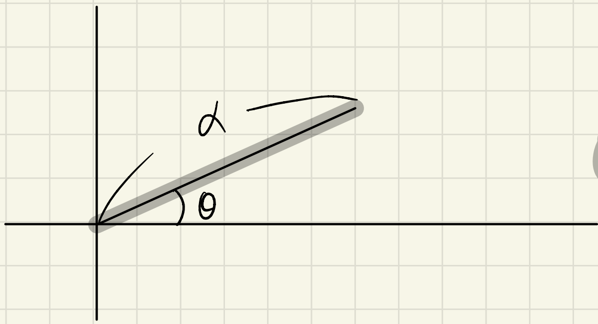
(사관) 20

(가) $\overrightarrow{OP} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$이고 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \le 21$이다.
(나) $|\overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{AB}|$이고 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} \le 21$이다.

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $\overrightarrow{OP} = (12k.\ 5k)$, $12k \times 6 \le 21 \Rightarrow 0 \le k \le \frac{7}{24}$

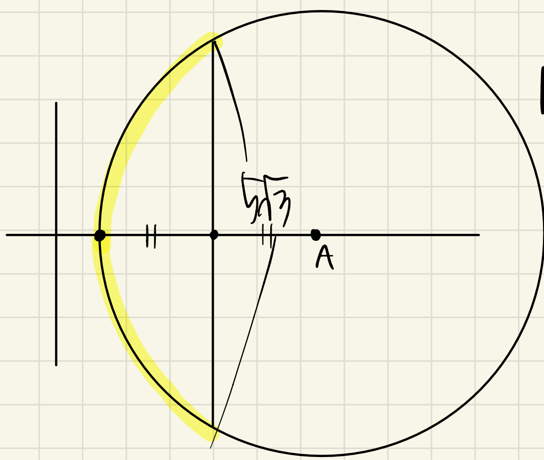
$0 \le |\overrightarrow{OP}| \le \frac{7}{24} \times 13 = \alpha$



P 영역

$\cos\theta = \frac{12}{13}$

(나)

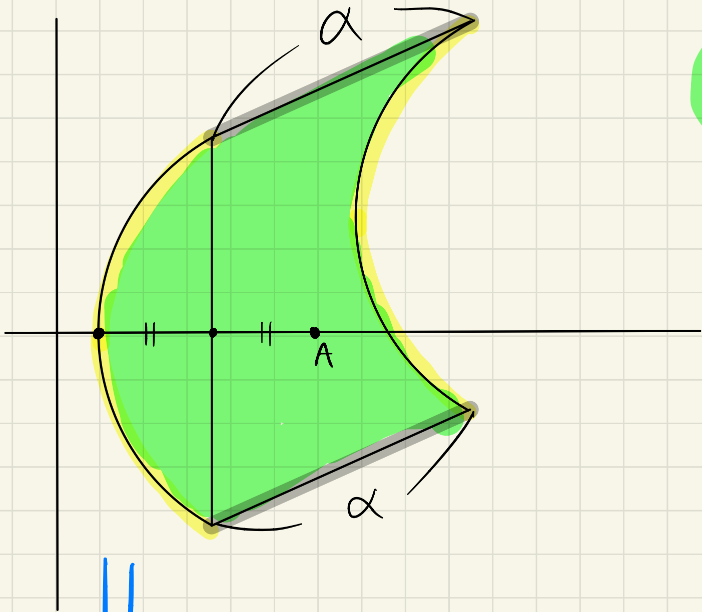


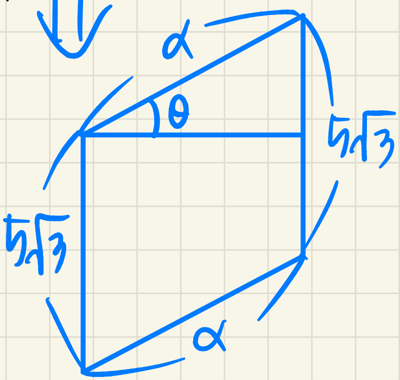
$R=5$

Q x좌표 $\le \frac{7}{2}$

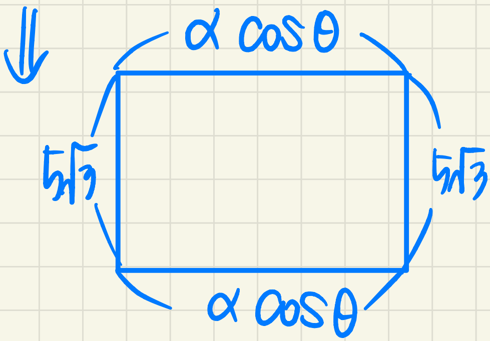
Q 영역

X 영역





$\cos\theta = \frac{12}{13}$



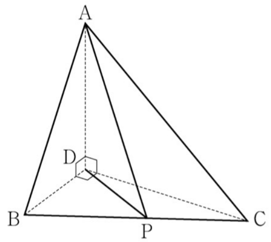
넓이

$= 5\sqrt{3} \times \frac{7}{24} \times 13 \times \frac{12}{13}$

$= \frac{35}{2}\sqrt{3}$

$\boxed{37}$

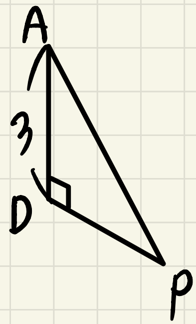
27. 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=\frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{DP}$ 의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

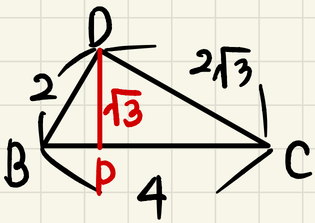
(9평) 21

①

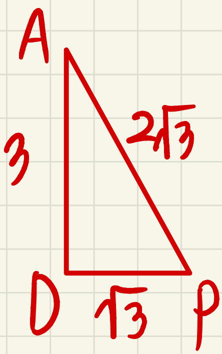


$\overline{DP}$가 최소면 $\overline{AP}$도 최소이다.

⇒ P는 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발이다.



$\overline{DP}=\sqrt{3}$

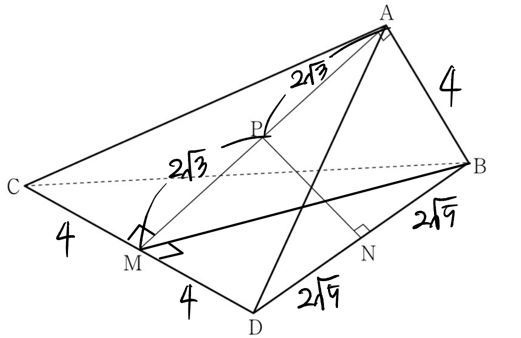


$\boxed{3\sqrt{3}}$

29. 그림과 같이

$$\overline{AB}=4,\ \overline{CD}=8,\ \overline{BC}=\overline{BD}=4\sqrt{5}$$

인 사면체 ABCD에 대하여 직선 AB와 평면 ACD는 서로 수직이다. 두 선분 CD, DB의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 AM 위의 점 P에 대하여 선분 DB와 선분 PN은 서로 수직이다. 두 평면 PDB와 CDB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $40\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



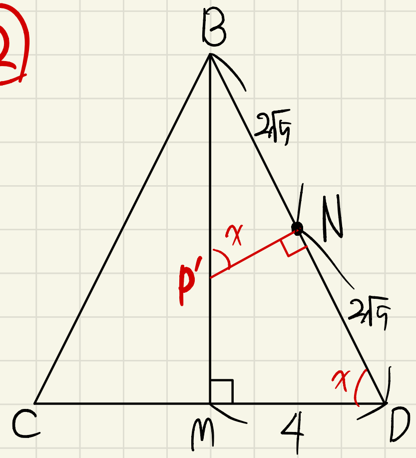
(7월) 22

① $\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{BM}=8$ 확인

P에서 평면 BCD에 내린 수선의 발
= P에서 직선 BM에 내린 수선의 발
= P′

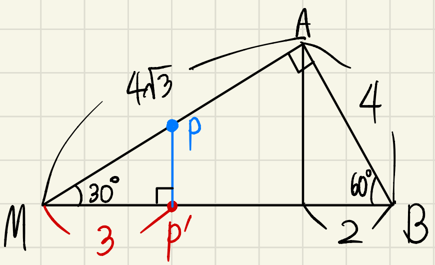
P′에서 직선 BD에 내린 수선의 발
= N

②



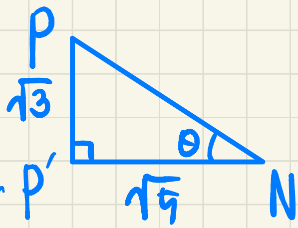
$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\overline{P'N}=\sqrt{5}$, $\overline{BP'}=5$, $\overline{P'M}=3$



$\overline{PP'}=\sqrt{3}$

③ PDB, CDB 교선 : 직선 BD



P' : P에서 교선에 내린 수선의 발

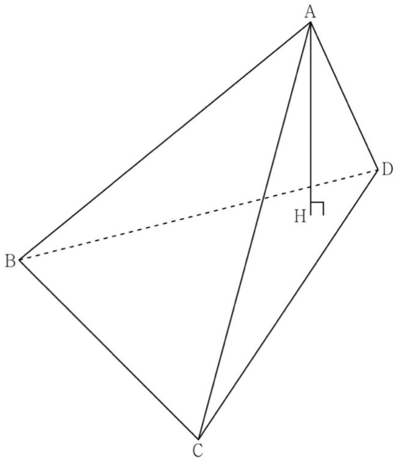
↳ P에서 평면 CDB에 내린 수선의 발

$\cos^2\theta = \frac{5}{8} \Rightarrow 40\cos^2\theta = \boxed{25}$

30. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\angle AEH = \angle DAH$
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE}=4$이다.

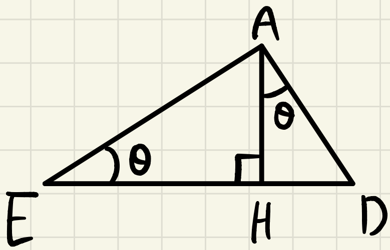
삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(10월) **23**

(가) D, H, E가 한 직선 위에 있으므로

A, D, H, E는 한 평면 위에 있다.



$\therefore \underline{\angle EAD = 90^\circ}$

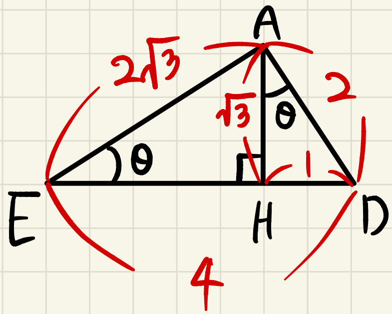
(나) $\angle CED = 90^\circ$

⇒ E는 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발

⇒ E는 H에서 직선 BC에 내린 수선의 발 ($\because$ D, H, E가 한 직선 위에 있다)

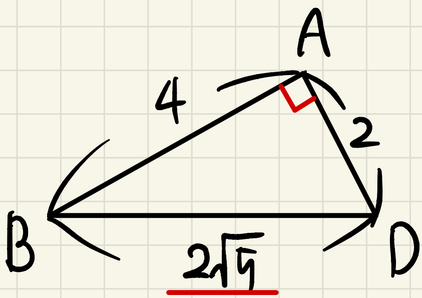
⇒ E는 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발

⇒ $\underline{\text{E는 }\overline{BC}\text{ 중점}}$, $\overline{DE}=4$



AHD 넓이 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AHD, ABD 교선 : 직선 AD



∵ $\overline{DE} = 4$

$\overline{AB} \perp \overline{AD}$

$\overline{AE} \perp \overline{AD}$

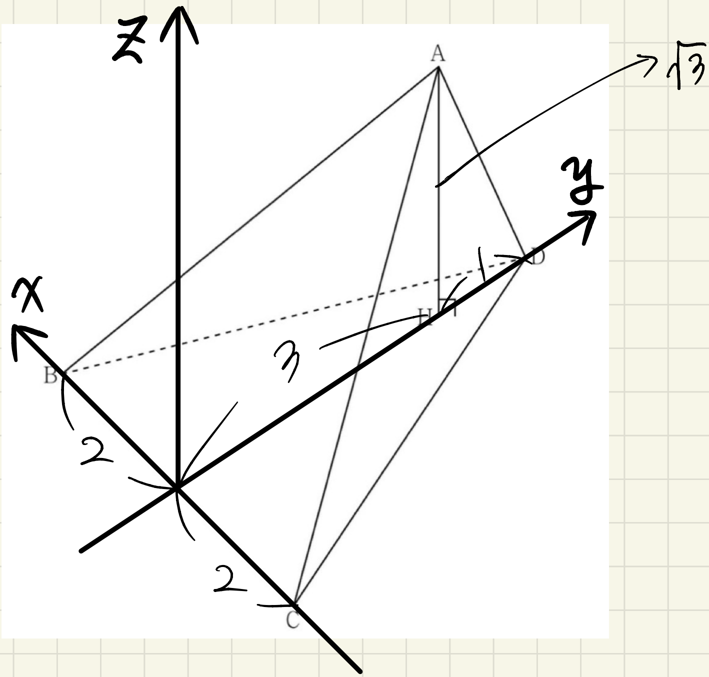
∴ ABD, AHD 이면각 = $\angle BAE = 30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$

$\boxed{7}$

NOTE $abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c에 대하여
세 점 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$를 지나는 평면의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 이고 법선벡터는 $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ 이다.

다른 풀이 (교과 외)



평면 AHD = yz평면 $\perp \vec{e_1}=(1, 0, 0)$

B$(2, 0, 0)$ D$(0, 4, 0)$ A$(0, 3, \sqrt{3})$

ABD 방정식 : $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{c}=1$

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{c}=1 \Rightarrow c=4\sqrt{3}$$

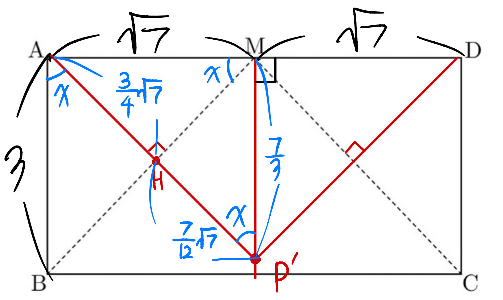
ABD 법선벡터 $= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \Rightarrow (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) = \vec{n}$

ABD, AHD 이면각 θ

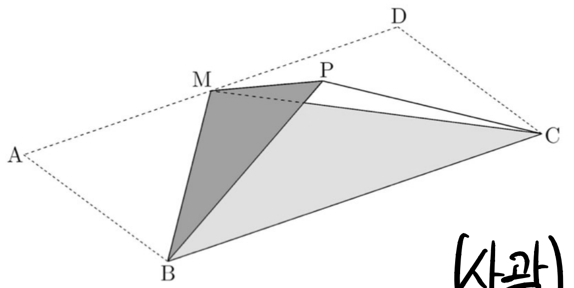
$$\cos\theta = \frac{\vec{e_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{e_1}|\,|\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

28. [그림 1]과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=2\sqrt{7}$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AD 의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림 2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

A = D = P



[그림 1]



[그림 2]

(사관)

① $\frac{17}{27}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{19}{27}$　④ $\frac{20}{27}$　⑤ $\frac{7}{9}$

24

PBM, BCM 교선 : 직선 BM

P에서 평면 BCM에 내린 수선의 발 P'

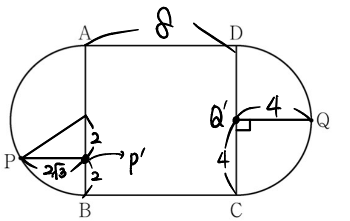
P에서 직선 BM에 내린 수선의 발 H

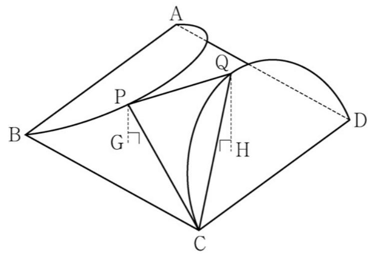
$\theta = \angle PHP'$

$$\cos\theta = \frac{\overline{P'H}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{P'H}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{7}{12}\sqrt{7}}{\frac{3}{4}\sqrt{7}} = \boxed{\frac{7}{9}}$$

$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$　$\sin x = \frac{3}{4}$　$\tan x = \frac{3}{\sqrt{7}}$

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

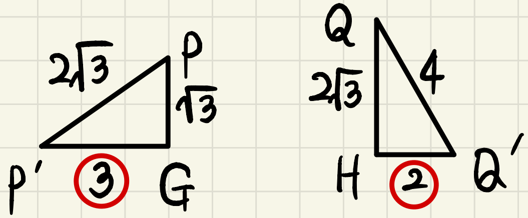




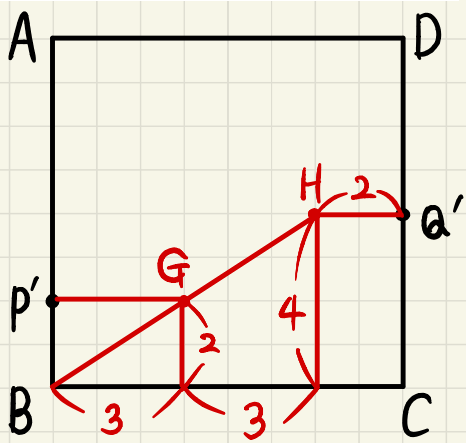
(9평) 25

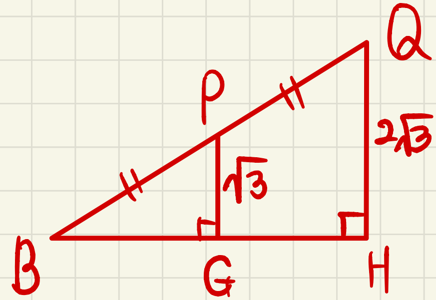
① P에서 직선 AB에 내린 수선의 발 P'

Q에서 직선 CD에 내린 수선의 발 Q'



②

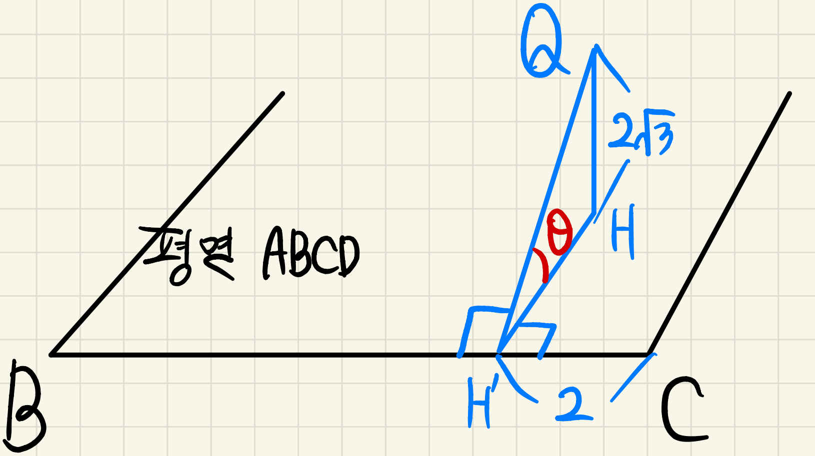


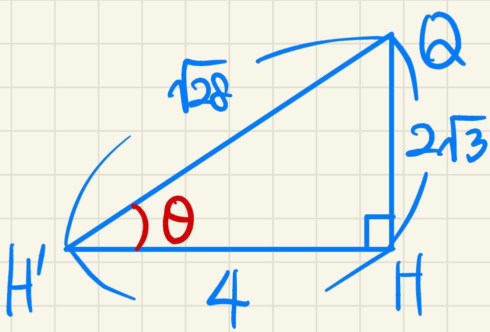


③ B ∈ 직선 PQ

평면 PCQ = 평면 BCQ

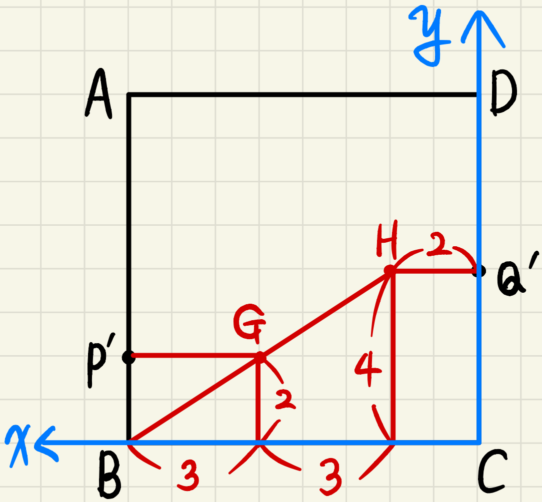
평면 BCQ, 평면 ABCD 교선 : 직선 BC





$$70 \times \frac{16}{28} = \boxed{40}$$

다른 풀이 (교과 외)



좌표축 설정

평면 ABCD : xy평면

$\perp \vec{e_3} = (0 . 0 . 1)$

평면 PCQ 방정식 찾기

$C(0 . 0 . 0)$
$P(5 . 2 . \sqrt{3})$
$Q(2 . 4 . 2\sqrt{3})$

$\Rightarrow ax + by + \sqrt{3}z = 0$ 으로 두자.

원점 포함

P.Q z좌표가 $\sqrt{3}$의 자연수 배니까 그냥 그렇게 둠.

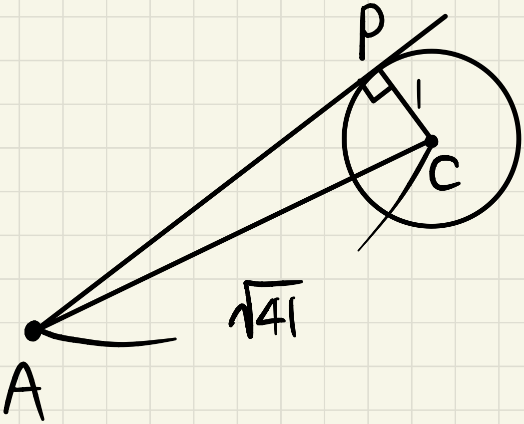
$$5a + 2b + 3 = 0$$
$$2a + 4b + 6 = 0$$
$$\Rightarrow a = 0, \quad b = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{n} = \left(0 . -\frac{3}{2} . \sqrt{3}\right) \Rightarrow (0 . -\sqrt{3} . 2)$$

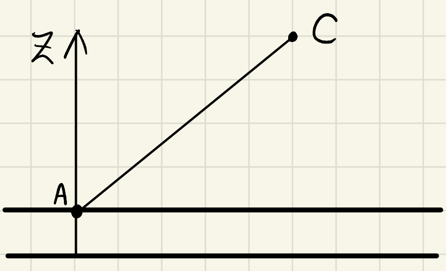
$$\cos\theta = \frac{\vec{e_3} \cdot \vec{n}}{|\vec{e_3}|\,|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

30. 좌표공간에서 점 A$(0, 0, 1)$을 지나는 직선이 중심이 C$(3, 4, 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(예비평가) **26**



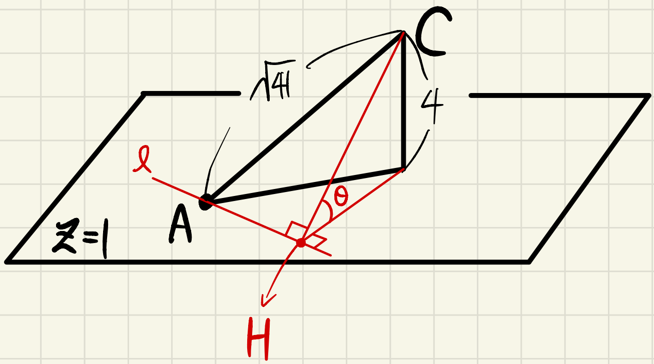
세 점 A, C, P를
지나는 원의 지름 $= \sqrt{41}$
넓이 $= \frac{41}{4}\pi$



xy평면 위로의 정사영
$=$ $z=1$ 위로의 정사영

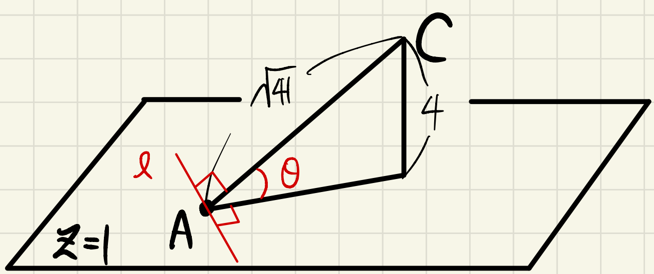
평면 ACP와 평면 $z=1$의 교선을 l이라 하자.

평면 ACP, 평면 $z=1$ 이면각 $= \theta$



$\cos\theta$가 최대이려면 $\overline{CH}$가 최대이어야 한다.

$\overline{CH} \le \sqrt{41}$ (H = A 일 때)



$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore \frac{41}{4}\pi \times \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4}\sqrt{41}\pi$$

$\boxed{9}$

다른 풀이 (교과 외) (처음 봤을 때 풀이)

세 점 A. C. P 지나는 원 넓이 $\frac{41}{4}\pi$

평면 ACP 법선벡터 $= \vec{n}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} = (3.4.4)$

xy 평면 법선벡터 $\vec{e_3} = (0.0.1)$

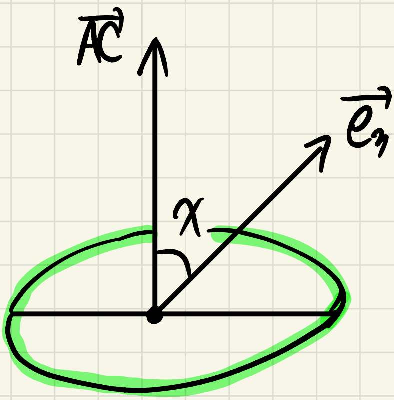
$$\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{e_3}}{|\overrightarrow{AC}||\vec{e_3}|} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \cos x$$

$\overrightarrow{AC}$가 공통

$\Downarrow$

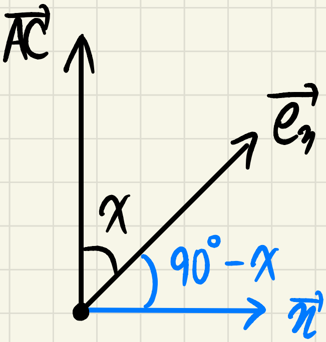
$\overrightarrow{AC}$를 세워서 그리고,

세 벡터 $\overrightarrow{AC}, \vec{e_3}, \vec{n}$의 시점이 모두 같아지도록 그림 그리자.



$\vec{n}$ 종점 자취

언제 $\vec{n}$과 $\vec{e_3}$가 이루는 각이 최소?



이때가 최소

$\therefore$ A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값

$$= \frac{41}{4}\pi \times \cos(90° - x)$$

$$= \frac{41}{4}\pi \times \sin x$$

$$= \frac{41}{4}\pi \times \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4}\sqrt{41}\,\pi$$

$\boxed{9}$