2021 9월 가형

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

#Comment
① 대입, 나열, 관찰이 기본
② 주기가 생기는 경우 관찰
③ 사칙연산을 표시하는게 관찰에 유리한 경우 있음

2022 예시

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M - m$의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$
이다.

#Comment
① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구
② 뒤에서부터 역추적

2021 9월 나형

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 추적 시작지점을 어디로 잡는 지가 센스

2022 9월

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 뒤에서부터 역추적

③ 수열은 n항 넣어서 $n+1$항 나오는 함수, 그래프 이용 가능

2021 사관 가형

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

2020 수능 나형

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

2021 수능 가형

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

2022 사관

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$
이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

#Comment

① 그래프 크게, 비율 맞게 그리기, 정수 격자점 표시

② 교점은 대입해서 등식 세워두기

③ $f(a)$, $g(a)$ 대소 비교하여 a, x_1 대소 비교하기

④ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$은 두 점 사이의 기울기로 해석

⑤ $x_1 y_1$이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$은 사각형의 넓이

⑥ ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기

⑦ 볼록성을 이용한 기울기 대소 비교

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

#Comment

① $a<b$를 증명하기 위해 사이에 $a<x<b$인 x 놓는 센스

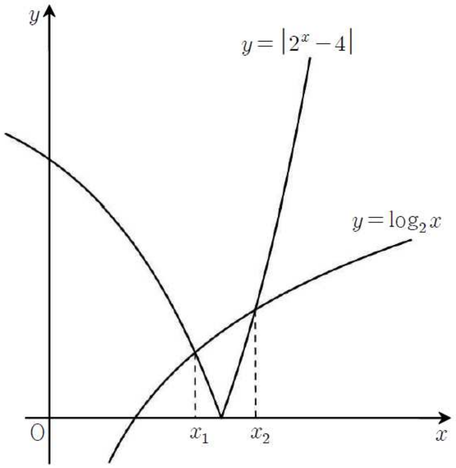
Tip! 1. 보기의 숫자가 이용되는 경우 다수

Tip! 2. 지수는 밑이 같아야 대소 비교 쉬움

② 종종 역함수, 대칭/평행이동 이용

2021 사관(나) 21번

21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

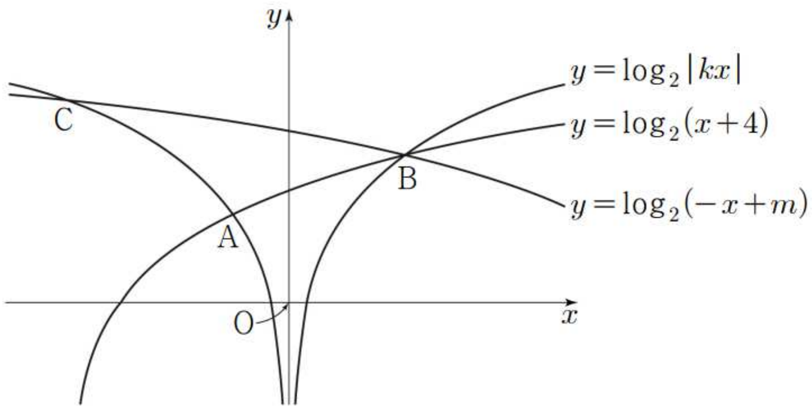
② $a<b<c<d$이면 $c-b<d-a$(수직선에 표시해보면 자명)

③ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

④ $(x_2-x_1)(y_2+y_1)\div 2$는 사다리꼴 넓이

20210415

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

#Comment

① 교점은 대입해서 등식 세워두기

20210626(가)

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

#Comment
① 등차수열은 일반항, 부분 합 이용한 수식적 접근도 가능
② 하지만, 나열하여 관찰하는 것이 더 중요!

20220913

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

#Comment

나열하여 관찰할 때

① 항의 넘버링 차이에 주목하기

② 등차수열 합의 대칭성에 주목하기(등차중항 확장)

③ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

20200917(고2)

17. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = 37$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{13} a_k$ 이다.

$\sum_{k=1}^{21} |a_k|$ 의 값은? [4점]

#Comment

① 등차수열은 부호가 일정하거나 “단 한 번” 바뀜

② 부호가 변하는 부분이 핵심이 되는 경우가 많고

③ 이를 조건에서 숨기는 방법이 다양하다.

④ 부호 변화 힌트 : 부분 합의 대소(조건 나)

⑤ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

20200717(가형)

17. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

#Comment

① 부호 변화 힌트 : 절댓값

20190921(고2 가형)

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14} 의 값은? [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 을 만족시키는 자연수 m 이 존재한다.

(나) $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

#Comment

① 부호 변화 힌트 : 절댓값

20191017(나형)

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다.
(나) $S_{10}=S_{50}=10$
(다) S_n은 $n=30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은? [4점]

#Comment

① 수식적 접근 : 등차수열 부분 합과 이차식의 관계

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

#Comment

① $y=|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성

② 꺾이면 뾰족점이 생기므로

③ 접히는 경계 미분계수가 0이어야 미분가능

④ 다항함수라면 중근을 가져야함

20200330(가)

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a)=0$
> (나) 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

#Comment

① |삼차 or 사차함수| 개형, 미분 불가 점 개수 관찰해보기

20220614

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

#Comment

① $y=\pm|f(x)|$ 꼴의 미분 가능성

② $y=-|f(x)|$ 그래프는 두 번 접으면 제자리($f(x)<0$일 때)

③ $y=f(x-a)+b$ 그래프 그리는 연습($x=a$ 경계점 기준)

20211022

22. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$

이다.

(나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

#Comment

① 복잡해보여도 결국 $x=0$, $x=2$ 경계로 $\pm(|f(x)|-a)$

② 접히는 경계에서 미분계수 0

20211128(가)

28. 두 상수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

#Comment

① $y=f(x)|g(x)|$꼴의 미분가능성

20211130(나)

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

20190921(나)

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

#Comment

① $f(x)>0$이면 (정적분)=(넓이)>0

② $f(x)<0$이면 (정적분)=$-$(넓이)<0

20201128(나)

28. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$ 이다.
>
> (나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^1 x f(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

#Comment

① (가) 조건을 사다리꼴 넓이로 해석하기

② (사다리꼴 넓이) VS (정적분) 대소 비교 → 위/아래 볼록성

2022예시12

12. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-3x+k)\,dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

#Comment

① $f(x)\geq 0$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

② $f(x)\geq g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq \int_a^b g(x)dx$

③ $m\leq f(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\geq m(b-a)$

④ $f(x)\leq M$이면 $\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

20210918(가)

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

#Comment

① $f(a-x)=f(a+x)$이면 $x=a$ 선대칭

② $f(x)=f(2a-x)$이면 $x=a$ 선대칭

③ $x=a$ 선대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2\int_a^{a+p} f(x)dx$

④ $f(x)\le M$이면 $\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

20220914

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \ge 0$이다.

#Comment

① $y=f(x-a)+b$그래프 그리는 방법(경계점에 주목)

② 삼차함수는 점대칭(변곡점)

③ $f(a-x)+f(a+x)=2b$이면 $(a,\ b)$ 점대칭

④ $f(2a-x)+f(x)=2b$이면 $(a,\ b)$ 점대칭

⑤ $(a,\ b)$ 점대칭이면 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2bp$

20211120(가)

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

#Comment

① (기함수)×(기함수)=(우함수)

② (일차함수)×(삼각함수) 꼴 정적분

곱함수의 연속성과 미분가능성

#세 줄 요약

$x=a$에서

① $f(x)$ 불연속, $g(x)$ 연속, $f(x)g(x)$ 연속이면 $g(a)=0$

② $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 존재)이면

$(x-a)f(x)$ 연속, $(x-a)^2f(x)$ 미분가능

(주의 : 극한값 존재 시 $(x-a)f(x)$ 미분가능)

③ $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 중 적어도 하나 존재X)이면

연속성, 미분가능성 정의대로 따져보기

20201120(나)

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

20171030(나)

30. 함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$ 의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

(가) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) $h'(3)=15$