

출제 및 해설 : 명수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	12	④	23	①	23	③	23	⑤
2	③	13	②	24	④	24	④	24	②
3	②	14	⑤	25	②	25	①	25	③
4	②	15	④	26	③	26	②	26	④
5	①	16	7	27	⑤	27	⑤	27	①
6	③	17	4	28	③	28	④	28	④
7	⑤	18	6	29	32	29	85	29	263
8	①	19	21	30	129	30	89	30	48
9	④	20	13						
10	④	21	34						
11	③	22	26						

위 시험지는 수험생들이 '2022학년도 대학수학능력시험'을 준비하는데 있어 도움을 주고자 하는 목적으로 제작되었습니다. 모든 문항의 저작권은 '명수학 연구실'에 있으며 연구실의 허락 없이 문항을 상업적으로 이용하는 행위, 문제를 수정하거나 편집하여 2차 창작물로 만드는 행위 등을 금합니다.

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학 I 지수와 로그]

해설 : $2^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

2. 정답) ③ [수학 II 정적분]

해설 : $\int_0^1 (3x^2 + 4x) dx = \left[x^3 + 2x^2 \right]_0^1 = 1 + 2 = 3$

3. 정답) ② [수학 I 삼각함수]

해설 : $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$,

$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin^2 \left(\frac{7\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$

4. 정답) ② [수학 II 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (-1) + 0 = -1$ 이다.

5. 정답) ① [수학 I 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면,

$8 \times \left(\frac{1}{2} \times r^2 \right) = \left(\frac{1}{2} \times r \right) \times \left(\frac{1}{2} \times r^5 \right)$ 에서

$r^4 = 16$, $r^2 = 4$ 이다.

따라서 $a_3 + a_5 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^4 = 2 + 8 = 10$ 이다.

6. 정답) ③ [수학 II 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{ax+7}-4} = b$ 에서 $b \neq 0$ 인데 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로

(분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+7}-4) = 0$ 에서 $\sqrt{a+7}-4=0$, $a=9$

$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{9x+7}-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{9x+7}+4)}{9x+7-16}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{9x+7}+4)}{9(x-1)} = \frac{\sqrt{9+7}+4}{9} = \frac{8}{9}$

$a=9$, $b = \frac{8}{9}$ 이므로 $ab=8$ 이다.

7. 정답) ⑤ [수학II 도함수의 활용]

해설 : $f(x) = x(x-2)(x-4)$ 라 하면

$$f'(x) = (x-2)(x-4) + x(x-4) + x(x-2) \text{에서}$$

$$f(a) = 0, f'(a) = -4 \text{이므로 } a = 2 \text{이다.}$$

직선 $y = -4x + b$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -8 + b, b = 8 \text{이고,}$$

따라서 $a + b = 2 + 8 = 10$ 이다.

8. 정답) ① [수학I 수열의 합]

해설 : $\frac{2n-1}{2} < k < \frac{4n+3}{2}$, $n - \frac{1}{2} < k < 2n + \frac{3}{2}$ 에서

가능한 자연수 k 의 값의 범위는 $n \leq k \leq 2n + 1$ 이므로

$$a_n = (2n+1) - n + 1 = n + 2 \text{이다.}$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (n+2) = \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 55 + 20 = 75$$

9. 정답) ④ [수학II 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x} = 4$ 에서 함수 $f(x) - 2x^2$ 은

최고차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$$f(x) - 2x^2 = 4x + b \text{라 할 수 있다.}$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 4x + b$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 4}{x - a} = 4 \text{에서 (분모) } \rightarrow 0 \text{이므로, (분자) } \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$f(a) = 4,$$

$$2a^2 + 4a + b = 4,$$

$$b = -2a^2 - 4a + 4$$

이므로 $f(x) = 2x^2 + 4x - 2a^2 - 4a + 4$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 4}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 4x - 2a^2 - 4a}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x+a)(x-a) + 4(x-a)}{x - a} = 4a + 4 \end{aligned}$$

에서 $4a + 4 = 4$ 이므로 $a = 0$ 이다.

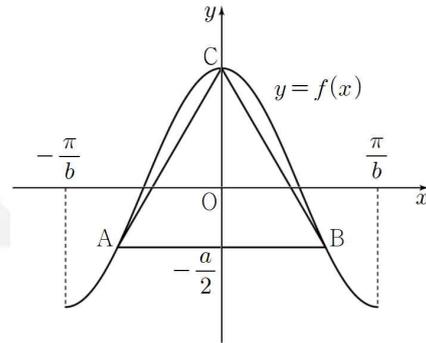
따라서 $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ 이고, $f(a+2) = f(2) = 20$ 이다.

10. 정답) ④ [수학I 삼각함수의 그래프]

해설 : 함수 $a \cos bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고,

주어진 상황을 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.

(점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 작다고 하자.)



두 점 A, B의 x 좌표는 각각

방정식 $a \cos bx = -\frac{a}{2}$ ($-\frac{\pi}{b} < x < \frac{\pi}{b}$)의 실근이므로

$$\cos bx = -\frac{1}{2} \text{에서 } x = -\frac{2\pi}{3b} \text{ 또는 } x = \frac{2\pi}{3b} \text{이다.}$$

$$A\left(-\frac{2\pi}{3b}, -\frac{a}{2}\right), B\left(\frac{2\pi}{3b}, -\frac{a}{2}\right) \text{인데}$$

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$2 \times \frac{2\pi}{3b} = 4, b = \frac{\pi}{3} \text{이다.}$$

선분 AB가 y 축과 만나는 점의 좌표를 D라 하면

선분 CD의 길이는 정삼각형 ABC의 높이와 같으므로

$$\overline{CD} = \frac{3}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4, a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} \text{이다.}$$

11. 정답) ③ [수학 I 지수함수와 로그함수]

해설 : $f(x) = a^{x-1}$, $g(x) = \log_a(x+1)$ 이라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 모두 선분 AB와 만나므로

$$2 \leq f(3) \leq 8 \text{이고 } 2 \leq g(3) \leq 8 \text{이다.}$$

$$2 \leq f(3) = a^2 \leq 8 \text{에서}$$

$$\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2} \dots \textcircled{1}$$

이고,

$$2 \leq g(3) = \log_a 4 \leq 8 \text{에서 } 1 \leq \log_a 2 \leq 4 \text{이고}$$

로그의 밑의 변환에 의해

$$1 \leq \frac{1}{\log_2 a} \leq 4,$$

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 a \leq 1$$

$$2^{\frac{1}{4}} \leq a \leq 2 \dots \textcircled{2}$$

이다. ①, ②에서 실수 a 의 값의 범위는

$$\sqrt{2} \leq a \leq 2$$

이므로 $M=2$, $m=\sqrt{2}$, $Mm=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$ 이다.

12. 정답) ④ [수학 II 도함수의 활용]

해설 : 조건 (가)에서 $f(1)=0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x^2+px+q) \text{이라 하면,}$$

$$f'(x) = x^2+px+q+(x-1)(2x+p) \text{이므로 } x > 1 \text{에서}$$

$$g(x) = f(x) - (x-1)f'(x)$$

$$= (x-1)(x^2+px+q) - (x-1)\{x^2+px+q+(x-1)(2x+p)\}$$

$$= (x-1)^2(2x+p)$$

이다. 조건 (나)에서 $1 < x < 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) > 0 \text{이고 } g(4) = 0 \text{이므로}$$

$$8+p=0,$$

$$p=-8$$

이다. $f'(x) = x^2 - 8x + q + 2(x-1)(x-4)$ 에서

$$f'(2) = 4 - 16 + q + 2 \times 1 \times (-2) = 3$$

이므로 $q=19$ 이다. 따라서

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 19)$$

이므로 $f(4) = 3 \times (16 - 32 + 19) = 3 \times 3 = 9$ 이다.

13. 정답) ② [수학 I 삼각함수의 활용]

해설 : $\angle BAC = \theta$ 라 하면 사각형 ACED는 한 원에 내접하고 있으

므로

$$\angle CED = \pi - \theta \text{이다.}$$

$\overline{CE} = a$ 라 하고 삼각형 CDE에서 코사인법칙을 이용하면

$$16 = 9 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \cos(\pi - \theta),$$

$$2a^2 + 3a - 14 = 0,$$

$$(2a+7)(a-2) = 0$$

에서 $\overline{CE} = a = 2$ 이므로 $\overline{BE} = 6 - 2 = 4$ 이다.

삼각형 BDE에서 코사인법칙을 이용하면 $\angle BED = \theta$ 이므

로

$$\overline{BD}^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4}$$

에서 $\overline{BD} = \sqrt{19}$ 이다.

$\angle BAC = \angle BED$, $\angle ABC = \angle EBD$ 에서

두 삼각형 ABC와 EBD는 서로 닮음이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{BD},$$

이다. 따라서 $\overline{AC} = \frac{\overline{BC} \times \overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{6 \times 3}{\sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{19}}$ 이다.

14. 정답) ⑤ [수학 II 정적분의 활용]

해설 : 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$F(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 사차함수이고,

$$g(x) = F(x) - F(a) \text{이다.}$$

따라서 방정식 $g(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

방정식 $F(x) = F(a)$ 가 서로 다른 세 실근을 가져야 한

다.

(i) 함수 $F(x)$ 가 극댓값을 가지지 않을 때,

방정식 $F(x) = F(a)$ 가 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) 함수 $F(x)$ 가 한 개의 극댓값과 두 극솟값을 가지면

서

(ii-1) 두 극솟값이 다를 때,

방정식 $F(x) = F(a)$ 이 서로 다른 세 실근을 가지는

실수 a 의 개수가 3보다 크다.

(ii-2) 두 극솟값이 같을 때,

방정식 $F(x)=F(a)$ 이 서로 다른 세 실근을 가지는 실수

a 는 $F(a)$ 의 값이 함수 $F(x)$ 의 극댓값과 같은 경우이다.

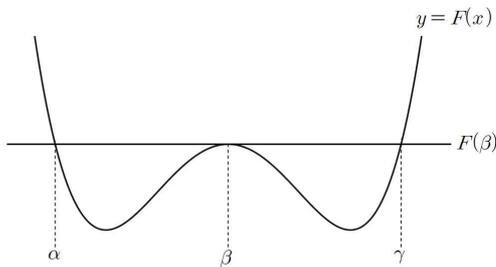
경우 (ii-2)에서

함수 $F(x)$ 가 $x=\beta$ 에서 극댓값을 가질 때,

방정식 $F(x)=F(\beta)$ 의 서로 다른 세 실근을 각각

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\gamma \quad (\alpha < \beta < \gamma)$$

라 하고 함수 $y=F(x)$ 의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



ㄱ. (참)

함수 $F(x)$ 의 두 극솟값이 같으므로

$y=F(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\beta$ 에 대하여 대칭인 그래프이다.

따라서 $k > 2$ 이면 $\alpha=0$, $\beta=2$ 이고 $k=\gamma=4$ 이다.

ㄴ. (참)

$0 < k < 2$ 이면 $\alpha=0$, $\gamma=2$ 이고 $k=\beta=1$ 이므로

함수 $y=F(x)$ 의 그래프는

직선 $x=1$ 에 대하여 대칭인 그래프이고

$F'(x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

점 $(1, f(1))$ 에 대하여 대칭인 그래프이다.

또, 함수 $F(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$F'(1)=f(1)=0$$

이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=-f(2-x)$ 가 성립한다.

따라서 $f(-1)=-f(3)$ 이므로 $f(-1)+f(3)=0$ 이다.

ㄷ. (참)

$k < 0$ 이면 $k=\alpha=-2$, $\beta=0$, $\gamma=2$ 이므로

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4-x^2+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이다. 또, $g(x)=F(x)-F(a)$ 에서

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a g(x)dx &= \int_{-a}^a \left\{ \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right) - \left(\frac{1}{4}a^4 - a^2 \right) \right\} dx \\ &= 2 \times \int_0^a \left\{ \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right) - \left(\frac{1}{4}a^4 - a^2 \right) \right\} dx \\ &= 2 \times \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a - 2 \times \left(\frac{1}{4}a^4 - a^2 \right) \times a \\ &= \frac{1}{10}a^5 - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^5 + 2a^3 \\ &= -\frac{4}{10}a^5 + \frac{4}{3}a^3 = -\frac{4}{30}a^3(3a^2 - 10) \end{aligned}$$

이고, $\int_{-a}^a g(x)dx = -\frac{4}{30}a^3(3a^2 - 10) \leq 0$ 에서

① $a > 0$ 이면 $-\frac{4}{30}a^3 < 0$ 이므로

$a^2 \geq \frac{10}{3}$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $\int_{-a}^a g(x)dx \leq 0$ 이다.

② $a=0$ 이면 $\int_{-a}^a g(x)dx=0$ 이다.

③ $a < 0$ 이면 $-\frac{4}{30}a^3 > 0$ 이므로

$a^2 \leq \frac{10}{3}$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $\int_{-a}^a g(x)dx \leq 0$ 이다.

따라서 부등식 $\int_{-a}^a g(x)dx \leq 0$ 을 만족시키는 실수 a 의 최

솟값

m 에 대하여

$$m < 0, \quad m^2 = \frac{10}{3}$$

이다. 이때, $F'(x)=f(x)=x^3-2x$ 이고,

$$f'(x)=3x^2-2 \text{이므로 } f'(m)=3 \times \frac{10}{3} - 2 = 8 \text{이다.}$$

15. 정답) ④ [수학 I 삼각함수의 그래프]

해설 : 양수 k 에 대하여 방정식 $\sin kx = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값을

작은 수부터 크기순으로 나열하면 아래와 같다.

$$x = \frac{\pi}{6k}, \frac{5\pi}{6k}, \frac{13\pi}{6k}, \frac{17\pi}{6k}, \dots$$

따라서 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식 $\sin kx = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개

수를

$f(k)$ 라 할 때, 함수 $f(k)$ 는 위에 나열한 x 의 값이 각각 2π 가 될 때 불연속이다. 따라서

$$\frac{\pi}{6a_1} = 2\pi, \frac{5\pi}{6a_2} = 2\pi, \frac{13\pi}{6a_3} = 2\pi, \frac{17\pi}{6a_4} = 2\pi, \dots$$

이고,

$$a_1 = \frac{1}{12}, a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{13}{12}, a_4 = \frac{17}{12}, \dots$$

이다.

임의의 자연수 l 에 대하여

$$a_{2l-1} = l - \frac{11}{12}, a_{2l} = l - \frac{7}{12}$$

이므로 $a_{2l-1} + a_{2l} = 2l - \frac{3}{2}$ 이다.

임의의 자연수 p 에 대하여

(i) $m = 2p - 1$ 이면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n &= \sum_{n=1}^{2p-1} a_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{p-1} a_{2i} \right) + a_{2p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \left(2i - \frac{3}{2} \right) + a_{2p-1} \\ &= p(p-1) - \frac{3(p-1)}{2} + p - \frac{11}{12} \\ &= p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{7}{12} \end{aligned}$$

(ii) $m = 2p$ 이면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n &= \sum_{n=1}^{2p} a_n \\ &= \sum_{i=1}^p a_{2i-1} + \sum_{i=1}^p a_{2i} \\ &= \sum_{i=1}^p \left(2i - \frac{3}{2} \right) \\ &= p(p+1) - \frac{3}{2}p = p^2 - \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{m+1} a_n > \sum_{n=1}^m a_n$ 이

고

(ii)에서 $p = 8$ 이면 $\sum_{n=1}^{16} a_n = 64 - \frac{1}{2} \times 8 = 60$ 이므로

$\sum_{n=1}^m a_n > 60$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값은 17이다.

16. 정답) 7 [수학II 부정적분]

$$\begin{aligned} \text{해설 : } f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (6x^2 + 3) dx = 2x^3 + 3x + C \quad (C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

에서 $f(0) = 2$ 이므로 $C = 2$,

$$f(x) = 2x^3 + 3x + 2$$

이므로 $f(1) = 2 + 3 + 2 = 7$ 이다.

17. 정답) 4 [수학I 지수함수와 로그함수]

해설 : $g(1) = 4$ 이므로 $f(4) = 1$ 이다.

$$f(4) = \log_2(4-3) + a = 1 \text{이므로 } a = 1,$$

$$f(x) = \log_2(x-3) + 1$$

에서 곡선 $y = f(x)$ 의 점근선이 $x = 3$ 이므로

곡선 $y = g(x)$ 의 점근선은 $y = 3$ 이다. 따라서 $b = 3$ 이고,

$$a + b = 1 + 3 = 4 \text{이다.}$$

18. 정답) 6 [수학II 정적분의 활용]

해설 : 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 3t^2 + 2at$$

이다. 점 P가 시간 $t = 2$ 에서 운동방향을 바꾸므로

$$v(2) = 0, 12 + 4a = 0, a = -3$$

이다. 따라서 $v(t) = 3t^2 - 6t$ 이고, 시간 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까

지

점 P의 이동거리를 구하면

$$\begin{aligned} \int_1^3 |v(t)| dt &= \int_1^3 |3t^2 - 6t| dt \\ &= \int_1^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^3 (3t^2 - 6t) dt \\ &= \left[-t^3 + 3t^2 \right]_1^2 + \left[t^3 - 3t^2 \right]_2^3 \\ &= \{(-8 + 12) - (-1 + 3)\} + \{(27 - 27) - (8 - 12)\} \\ &= (4 - 2) + (0 + 4) = 6 \end{aligned}$$

※별해

$$x(1) = -1 \rightarrow x(2) = -3 \rightarrow x(3) = 1$$

에서

시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 이동거리는 2,

시각 $t=2$ 에서 $t=3$ 까지 이동거리는 4

이므로

시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 이동거리는 $2+4=6$ 이다.

19. 정답) 21 [수학 I 지수와 로그]

해설 : 10 이하의 자연수 n 에 대하여

$$(11-n) \times \log_3 a_n = \log_3 9^n = 2n \text{ 이므로}$$

$$f(n) = \log_3 a_n = \frac{2n}{11-n}$$

이다. $f(4) = \frac{8}{7}$ 이므로

$$f(4) \times f(m) < 4,$$

$$f(m) < \frac{7}{2},$$

$$\frac{2m}{11-m} < \frac{3}{2},$$

$$4m < 7(11-m),$$

$$11m < 77,$$

$$m < 7$$

에서 가능한 자연수 m 은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

모든 자연수 m 의 값의 합은 21이다.

20. 정답) 13 [수학 II 도함수의 활용]

해설 : 함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지므로 $f'(x) = 3x^2 - 8px + q$ 에서

방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2 - 8px + q = 0$ 에서 판별식을 이용하면

$$16p^2 - 3q > 0 \dots \textcircled{1}$$

이때, 이차방정식 $3x^2 - 8px + q = 0$ 의 두 근을 직접 구하

면

$$x = \frac{4p \pm \sqrt{16p^2 - 3q}}{3}$$

인데, $\textcircled{1}$ 을 만족하는 모든 자연수 p, q 에 대하여

$$4p = \sqrt{16p^2} > \sqrt{16p^2 - 3q}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 는

모든 극값을 $x > 0$ 에서 갖는다.

$f(x) = x(x^2 - 4px + q)$ 에서 $f(x)$ 의 극솟값이 0 이상이므로

이차방정식 $x^2 - 4px + q = 0$ 은 서로 다른 두 허근 또는

중근인 실근을 가져야 한다.

$$4p^2 - q \leq 0 \dots \textcircled{2}$$

두 부등식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 주어진 조건을 만족시키는

두 자연수 p, q 는 아래의 부등식을 만족시켜야 한다.

$$4p^2 \leq q < \frac{16}{3}p^2$$

(i) $p=1$ 이면

$$4 \leq q < \frac{16}{3} \text{에서 } q \text{가 자연수이므로 } 4 \leq q \leq 5 \text{이고,}$$

조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q) 의 개수는 2이다.

(ii) $p=2$ 이면

$$16 \leq q < \frac{64}{3} \text{에서 } q \text{가 자연수이므로 } 16 \leq q \leq 21 \text{이고,}$$

조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q) 의 개수는 6이다.

(iii) $p=3$ 이면

$$36 \leq q < 48 \text{에서 } q \text{가 } 40 \text{ 이하의 자연수이므로}$$

$$36 \leq q \leq 40$$

이고, 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q) 의 개수는 5이다.

(iv) $p \geq 4$ 이면

$$q \geq 4p^2 \geq 64 \text{이므로 } 40 \text{ 이하의 자연수 } q \text{는 존재하지 않}$$

는다.

(i), (ii), (iii)에 의해 주어진 함수 $f(x)$ 가 0 이상인 극솟값을

가지도록 하는 40 이하의 두 자연수 p, q 의 모든 순서쌍

의

개수는 $2+6+5=13$ 이다.

21. 정답) 34 [수학 I 수학적 귀납법]

해설 : $a_5 > 0$ 이면 $a_6 = 2 - a_5$ 인데 $a_6 = -a_5$ 이므로 모순이다.

따라서 $a_5 \leq 0$ 이고, $a_6 = a_5 + 4$ 이므로 $a_5 = -2$ 이다.

$a_4 > 0$ 이면 $a_5 = 2 - a_4$ 이므로 $a_4 = 4$ 이고,

$a_4 \leq 0$ 이면 $a_5 = a_4 + 4$ 이므로 $a_4 = -6$ 이다.

같은 방법으로 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항으로 가능한 값들을 5항부터 1항까지의 순서로 나열하면 아래와 같다.

a_5	-2					
a_4	4			-6		
a_3	0			8		
a_2	2	-4		×		-10
a_1	-2	6	-8	×	12	-14
				×	16	-18

따라서 $M = 16$, $m = -18$ 이므로 $M - m = 16 - (-18) = 34$ 이다.

* $a_3 = 8$ 일 때,

$a_2 > 0$ 이면 $a_3 = 2 - a_2$ 에서 $a_2 = -6$ 이므로 모순이고,

$a_2 \leq 0$ 이면 $a_3 = a_2 + 4$ 에서 $a_2 = 4$ 이므로 모순이다.

* $a_2 = 12$ 일 때,

$a_1 > 0$ 이면 $a_2 = 2 - a_1$ 에서 $a_1 = -10$ 이므로 모순이고,

$a_1 \leq 0$ 이면 $a_2 = a_1 + 4$ 에서 $a_1 = 8$ 이므로 모순이다.

22. 정답) 26 [수학II 도함수의 활용]

해설 : 함수 $f'(x)$ 는 일차항의 계수가 양수인 일차함수이고,

함수 $xf'(x)$ 는 이차항의 계수가 양수인 이차함수이므로

$$g(x) = \int_a^x tf'(t)dt \text{는 삼차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.}$$

다.

$g(a) = 0$ 이므로 양수 m 에 대하여

$$g(x) = m(x-a)(x^2 + qx + r)$$

이라 할 수 있고,

함수 $|(x-a)g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

함수 $|x^2 + qx + r|$ 이 미분가능해야하고,

방정식 $x^2 + qx + r = 0$ 은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

따라서 방정식 $g(x) = g(a) = 0$ 의 근이

① $x = a$ 로 유일하거나

② $x = a$ 와 $x = b$ ($a \neq b$)인 중근

일 때, 함수 $|(x-a)g(x)|$ 가 미분가능하므로

주어진 조건을 만족하려면

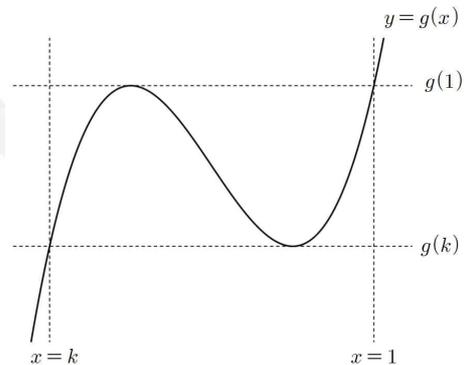
함수 $g(x)$ 는 $x = k$ 에서 극값을 가지지 않고,

$g(k)$ 는 함수 $g(x)$ 의 극솟값과 같아야 하고,

함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 가지지 않고,

$g(1)$ 은 함수 $g(x)$ 의 극댓값과 같아야 한다.

위의 결과를 그래프를 그려 나타내면 아래와 같다.



이때, $g(x) = \int_a^x tf'(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = xf'(x)$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 가지고 $f'(0) \neq 0$ 이다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극댓값을 가질 때,

$$g(x) = mx^2(x-1) = mx^3 - mx^2 \text{이므로}$$

$$g'(x) = 3mx^2 - 2mx \text{에서 } f'(x) = 3mx - 2m \text{이다.}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}mx^2 - 2mx + C_1 \text{ (} C_1 \text{은 적분상수)라 하면}$$

$$f(1) = 1 \text{이므로 } C_1 = \frac{m}{2} + 1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}mx^2 - 2mx + \frac{m}{2} + 1 \text{이고}$$

방정식 $f(x) = g'(x)$ 가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x) - g'(x) = 0$ 이 중근을 가진다.

$$\begin{aligned} f(x) - g'(x) &= \left(\frac{3}{2}mx^2 - 2mx + \frac{m}{2} + 1\right) - (3mx^2 - 2mx) \\ &= -\frac{3}{2}mx^2 + \frac{m}{2} + 1 \end{aligned}$$

에서 $\frac{m}{2} + 1 = 0$, $m = -2$ 인데 m 는 양수이므로 모순이다.

(ii) 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극솟값을 가질 때,

$$g(x) = mx^2(x-k) = mx^3 - mkx^2 \text{이므로}$$

$$g'(x) = 3mx^2 - 2mkx \text{에서 } f'(x) = 3mx - 2mk \text{이다.}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}k\right) = 0 \text{이므로 함수 } g(x) \text{는 } x = \frac{2}{3}k \text{에서 극댓값을 가}$$

지고,

$$g\left(\frac{2}{3}k\right) = g(1) \text{이므로 } -\frac{4}{27}k^3 = 1 - k \text{에서 } k = -3 \text{이다.}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}mx^2 + 6mx + C_2 \text{ (} C_2 \text{는 적분상수)라 하면}$$

$$f(1) = 1 \text{이므로 } C_2 = -\frac{15}{2}m + 1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}mx^2 + 6mx - \frac{15}{2}m + 1 \text{이고}$$

방정식 $f(x) = g'(x)$ 가 중근을 가지므로

이차방정식 $f(x) - xf'(x) = 0$ 이 중근을 가진다.

$$\begin{aligned} f(x) - xf'(x) &= \left(\frac{3}{2}mx^2 + 6mx - \frac{15}{2}m + 1\right) - (3mx^2 + 6mx) \\ &= -\frac{3}{2}mx^2 - \frac{15}{2}m + 1 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } -\frac{15}{2}m + 1 = 0, m = \frac{2}{15} \text{이다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x \text{이므로}$$

$$f(3) = \frac{21}{5} \text{이고, } p+q = 21+5 = 26 \text{이다.}$$

확률과 통계

23. 정답) ① [확률과 통계 경우의 수 | 이항정리]

해설 : ${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \dots + {}_7C_6 + {}_7C_7 = 2^7$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 {}_7C_n &= ({}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \dots + {}_7C_6 + {}_7C_7) - ({}_7C_0 + {}_7C_7) \\ &= 2^7 - 2 = 128 - 2 = 126 \end{aligned}$$

24. 정답) ④ [확률과 통계 확률분포 | 이항분포]

해설 : $E(X) + V(X) = 36p + 36p(1-p)$ 에서

$$-36p^2 + 72p = 32, 9p^2 - 16p + 8 = 0, (3p-2)(3p-4) = 0$$

$$\text{이므로 } p = \frac{2}{3} \text{이다. } (\because p \leq 1)$$

25. 정답) ② [확률과 통계 조건부확률 | 사건의 독립]

해설 : 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이면

두 사건 A 와 B^C 도 서로 독립이므로

$$P(A \cap B^C) = P(A) \times P(B^C)$$

$$= P(A) \times (1 - P(B))$$

$$= P(A) - P(A) \times P(B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} \dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{두 식 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } P(B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \text{이다.}$$

26. 정답) ③ [확률과 통계 경우의 수 | 중복순열]

해설 : $f(3)$ 의 값으로 경우를 분류하여 함수 f 의 개수를 세자.

(i) $f(3) = 1$ 일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 가 $(1, 1)$ 인 경우를 제외하고

항상 성립하므로 ${}_3P_2 - 1 = 8$

(ii) $f(3) = 2$ 일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 가 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 인 경우를

제외하고 항상 성립하므로 ${}_3P_2 - 3 = 6$

(iii) $f(3) = 3$ 일 때

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 가 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$

인

경우를 제외하고 항상 성립하므로 ${}_3P_2 - 5 = 4$

(i), (ii), (iii)에 의해 가능한 함수 f 의 개수는

$$8 + 6 + 4 = 18 \text{이다.}$$

27. 정답) ⑤ [확률과 통계 확률분포 | 정규분포]

해설 : $P(X \leq 2) = P(X \geq 5)$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{2-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5-m}{\sigma}\right) \text{이므로}$$

$$2-m = -(5-m), m = \frac{7}{2} \text{이다.}$$

$$P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-\frac{7}{2}}{\sigma}\right) = 0.1587 = 0.5 - 0.3413 \text{에서}$$

$$\frac{3}{2\sigma} = 1, \sigma = \frac{3}{2} \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} P(m \leq X \leq m+3) &= P\left(\frac{m-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+3-m}{\sigma}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772 \end{aligned}$$

28. 정답) ③ [확률과 통계 조건부확률]

해설 : 두 주머니에서 공을 한 개씩 꺼내는 시행을 두 번 할 때

가능한 전체 경우의 수는 $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ 이다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자가 서로소인 사건을 A , 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의

합이 8 이상인 사건을 B 라 하자.

첫 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 순서쌍으로 가능한 것 중 두 수가 서로소인 순서쌍은 아래와 같다.

(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (3, 5)

각각의 경우에서 두 번째 시행의 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

이므로

$$P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

위의 각각의 경우에서 두 번째 시행에서 꺼낸 공 두 개에 적혀있는 숫자의 합이 8 이상이 되는 순서쌍을 나열해보자.

시행 1	시행 2
(1, 4)	(2, 6), (3, 5), (3, 6)
(1, 5)	(2, 6), (3, 6)
(1, 6)	(3, 5)
(2, 5)	(3, 6)
(3, 4)	(2, 6)
(3, 5)	(2, 6)

위의 표에 의해 두 사건 A 와 B 가

$$\text{모두 일어나는 경우의 수는 } 9 \text{이므로 } P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

이다.

$$\text{따라서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8} \text{이다.}$$

29. 정답) 32 [확률과 통계 통계적 추정 | 표본평균]

해설 : 한 번의 시행에서 나오는 흰 공의 개수를 X 라 할 때, 확률 변수 X 의

값으로 가능한 것은 0, 1, 2이다.

따라서 $P(\bar{X}=2) = P(X=2) \times P(X=2)$ 이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{5} \text{이다. } (\because P(X=2) \geq 0)$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2} = \frac{4}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{5}$$

$$(n+3)(n+2) = 20,$$

$$n^2 + 5n - 14 = 0,$$

$$(n+7)(n-2) = 0$$

이므로 $n=2$ 이다. ($\because n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \text{이때, } P(X=0) &= \frac{1}{3} \times \frac{{}_2C_1}{{}_5C_1} + \frac{2}{3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

위의 표를 이용하여 $P(\bar{X} < 1)$ 을 계산하자.

확률변수 \bar{X} 가 가질 수 있는 값은 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2이므로

로

$\bar{X} < 1$ 은 $\bar{X}=0$ 또는 $\bar{X}=\frac{1}{2}$ 과 같다. 따라서

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 1) &= P(\bar{X}=0) + P\left(\bar{X}=\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

이므로 $p+q=25+7=32$ 이다.

30. 정답) 129 [확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]

해설 : 조건 (가)에 의해 모든 상자에는 반드시 흰 공의 개수 이상의 검은 공을 담아야 하므로

(흰 공 1개+검은 공 1개)의 묶음을 x ,

검은 공 1개의 묶음을 y

라 할 때 조건 (가)를 3개의 x 와 4개의 y 를

세 상자 A, B, C에 나누어 담는다고 생각할 수 있다.

따라서 조건 (가)를 만족하는 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_4 = {}_5C_3 \times {}_6C_4 = 150 \dots \textcircled{1}$$

이다.

세 상자에 담은 공의 개수의 순서쌍 중에서

조건 (가)는 만족하고,

조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수를 구하자.

각각의 상자에 담긴 공의 개수의 최댓값과 최솟값의

차가 7보다 큰 순서쌍은

$$(0, 0, 10), (0, 1, 9), (0, 2, 8)$$

이다.

(i) 세 상자에 담은 공의 개수의 순서쌍이 (0, 0, 10)일 때,

조건 (가)를 만족하고 (i)인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$ 이다.

(ii) 세 상자에 담은 공의 개수의 순서쌍이 (0, 1, 9)일 때,

상자 안에 담은 공의 개수가 1인 경우는 $y \times 1$ 뿐이므로 조건 (가)를 만족하고 (ii)인 경우의 수는 $3! = 6$ 이다.

(iii) 세 상자에 담은 공의 개수의 순서쌍이 (0, 2, 8)일 때,

상자 안에 담은 공의 개수가 2인 경우는

- ① $x \times 1$ 또는 ② $y \times 2$

에서 조건 (가)를 만족하고 (iii)인 경우의 수는 $3! \times 2 = 12$ 이다.

(i)~(iii)에서 조건 (가)는 만족하고, 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는

$$3 + 6 + 12 = 21 \dots \textcircled{A}$$

이다.

따라서 ㉠, ㉡에 의해 주어진 조건을 만족하며 세 상자 안에 공을 담은 경우의 수는 $150 - 21 = 129$ 이다.

미적분

23. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

$$\begin{aligned} \text{해설 : } & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+3}-n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}{\sqrt{n^2+3}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

24. 정답) ④ [미적분 정적분]

$$\begin{aligned} \text{해설 : } & \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x + 1) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx + \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\ &= 2 \times \int_0^{\pi} x \sin x dx + 0 \\ &= 2 \times \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \times \{(\pi+0) - (0+0)\} = 2\pi \end{aligned}$$

25. 정답) ① [미적분 도함수의 활용]

해설 : $\frac{dx}{dt} = \frac{3\sqrt{t}}{2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{t\sqrt{t}}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{3\sqrt{t}}{2}, -\frac{8}{t\sqrt{t}} \right)$$

이다. 따라서 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 속도는 (3, -1)이고
시각 $t=4$ 에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ 이다.

26. 정답) ② [미적분 급수]

해설 : $\angle D_1A_1E_1 = \angle B_1A_1D_1 - \angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{6}$ 이고,

삼각형 $A_1B_1D_1$ 은 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1D_1} = \sqrt{3} : 1$, $\angle B_1A_1D_1 = \frac{\pi}{2}$ 인

직각삼각형이므로 $\angle A_1D_1B_1 = \frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 삼각형 $A_1D_1E_1$ 에서

$\angle A_1E_1D_1 = \pi - \angle D_1A_1E_1 - \angle A_1D_1E_1 = \frac{\pi}{2}$ 이고,

삼각형 $A_1B_1C_1$ 은 정삼각형이므로 $\overline{A_1E_1} = \overline{C_1E_1}$ 이다.

$\overline{A_1E_1} = \overline{A_1D_1} \times \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\overline{B_1E_1} = \overline{A_1B_1} \times \cos \frac{\pi}{6} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \times \overline{A_1E_1} \times \overline{A_1D_1} \times \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \overline{B_1E_1} \times \overline{C_1E_1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\overline{A_1A_2} = k$ 라 하면,

$\overline{A_2D_2} = \overline{A_1A_2} \times \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}k$, $\overline{A_2B_2} = \overline{A_2D_2} \times \tan \frac{\pi}{3} = 3k$ 이고

삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형이므로 $\overline{A_2C_2} = 3k$ 에서

$\overline{A_2C_2} = \overline{A_2B_1} \times \cos \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{A_2B_1} = 6k$ 이다.

따라서 $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2B_1} = 7k$ 이므로 $k = \frac{2\sqrt{3}}{7}$ 이다.

$\overline{A_2D_2} = \frac{6}{7}$ 이므로 그림 R_1 에서 색칠한 부분의 넓이와

그림 R_2 에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$$2^2 : \left(\frac{6}{7}\right)^2 = 1 : \frac{9}{49}$$

이므로, 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{49\sqrt{3}}{20}$ 이다.

27. 정답) ⑤ [미적분 부정적분+정적분]

해설 : (나)의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0) = a$ 이다.

(나)의 양변을 미분하면,

$$-2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x) = e^{-2x}f(x),$$

$$e^{-2x}f'(x) = 3e^{-2x}f(x),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \quad (\because f(x) > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

이고, ①을 부정적분하면,

$$\ln f(x) = 3x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

에서

$$f(x) = e^{3x+C}$$

인데, $f(1) = 1$ 이므로 $f(1) = e^{3+C} = 1$ 에서 $C = -3$ 이다.

따라서 $f(x) = e^{3x-3}$ 이고,

$$a \times f(4) = f(0) \times f(4) = e^{-3} \times e^9 = e^6$$

이다.

28. 정답) ④ [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : $\angle OAB = \angle ADC = \theta$ (엇각),

$$\frac{1}{2} \times \angle AOB = \angle ADC = \theta \text{이므로}$$

원주각과 중심각의 관계에 의해

점 D는 점 O를 중심으로하고 반지름의 길이가 \overline{OA} 인 원 위의 점이다.

따라서 $\overline{OD} = \overline{OA} = 1$ 이므로 삼각형 OAD는 이등변삼각형 이고

$\angle ODA = \angle OAD = \theta$ 이다.

삼각형 OAB에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{OB}}{\sin(\angle OAB)} = \frac{\overline{OA}}{\sin(\angle OBA)},$$

$$\frac{\overline{OB}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

이므로 $\overline{OB} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

$f(\theta) = (\text{삼각형 OAD의 넓이}) - (\text{삼각형 OAB의 넓이})$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OD} \times \sin(\angle AOD) - \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin(\angle AOB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin \theta \times \sin 2\theta}{2\sin 3\theta}$$

$$\text{이므로 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} - \frac{\sin \theta \times \sin 2\theta}{2\theta \times \sin 3\theta} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \dots \textcircled{7}$$

$g(\theta)$ = (부채꼴 OAC의 넓이) - (삼각형 OAB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta$$

$$= \theta - \frac{\sin \theta \times \sin 2\theta}{2 \sin 3\theta}$$

이므로 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\theta}{\theta} - \frac{\sin \theta \times \sin 2\theta}{2\theta \times \sin 3\theta} \right)$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \dots \textcircled{8}$$

따라서 ⑦, ⑧에서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \text{이다.}$$

29. 정답) 85 [미적분 도함수의 활용]

해설 : 곡선 $y = \ln(t\alpha - 2)$ 와 직선 $y = x - f(t)$ 가

$x = \alpha$ 에서 접한다고 하면

$$\ln(t\alpha - 2) = \alpha - f(t), \quad \frac{t}{t\alpha - 2} = 1$$

에서

$$t = t\alpha - 2, \quad \alpha = 1 + \frac{2}{t}$$

이고, $f(t) = \alpha - \ln(t\alpha - 2) = \alpha - \ln t = 1 + \frac{2}{t} - \ln t$ 이다.

$g(t) = 3t + f(t)$ 라 하면

$$g(t) = 1 + \frac{2}{t} - \ln t + 3t$$

이므로

$$g'(t) = -\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} + 3 = \frac{3t^2 - t - 2}{t^2} = \frac{(3t+2)(t-1)}{t^2}$$

이고, 함수 $g(t)$ 는 $t = 1$ 에서 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

따라서 실수 a 의 최댓값 M 은

$$M = g(1) = 6$$

이고, $f'(t) = -\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}$ 에서 $f'(6) = -\frac{1}{18} - \frac{1}{6} = -\frac{2}{9}$ 이므로

로

$$\{f'(6)\}^2 = \frac{4}{81}, \quad p+q = 81+4 = 85$$

이다.

30. 정답) 89 [미적분 도함수의 활용+정적분의 활용]

해설 : 조건 (나)에서 $\ln e^{f(x)} + \ln f'(x) = \ln x$ 이므로 $e^{f(x)} f'(x) = x$ 이다.

따라서 모든 양수 x 에 대하여

$$e^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \dots \textcircled{1}$$

이다.

함수 $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이

므로

함수 $f(x)$ 는 $x \neq \pm 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 연속이다.

조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 에서 미분가능하므로 연속이고

함수 $f(x)$ 는 $x \neq -1$ 인 모든 실수 전체에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다. 조건 (가)에 의

해

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -\ln 2$$

이고 ①에 의해 $C = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 구간 $[0, \infty)$ 에서

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right)$$

이다.

$$-2 < x < -1 \text{일 때 } x(x^2 - 1) < 0,$$

$$-1 < x < 0 \text{일 때 } x(x^2 - 1) > 0$$

이므로 $\int_{-2}^1 xg(x)dx = \int_{-2}^1 \{x(x^2 - 1)f(x)\}dx$ 가

최솟값을 가지는 경우는

$$-2 < x < -1 \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{이고 } \int_{-2}^{-1} f(x)dx \text{가 최댓}$$

값,

$$-1 < x < -2 \text{에서 } f(x) \leq 0 \text{이고 } \int_{-1}^0 f(x)dx \text{가 최솟값}$$

을 가질 때이다. 이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\ln 2$ 이고,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않고,

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\ln 2$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ -\ln 2 & (-1 < x \leq 0) \\ \ln \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) & (x > 0) \end{cases}$$

일 때 $\int_{-2}^1 xg(x)dx$ 는 최솟값을 가진다.

(*이때, $-\ln 2 \leq f(-1) \leq 0$ 이다. 함수 $xg(x)$ 는 $f(-1)$ 의 값에 관계 없이 연속이고, 구하려는 적분값도 변함이 없다.)

따라서 $\int_{-2}^1 xg(x)dx$ 의 최솟값은 위의 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 \{x(x^2-1)f(x)\}dx \\ &= \int_{-1}^0 \{x(x^2-1) \times (-\ln 2)\}dx + \int_0^1 \left\{x(x^2-1) \times \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right\}dx \\ &= -\ln 2 \int_{-1}^0 x(x^2-1)dx + \int_0^1 \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx \\ & \quad - \ln 2 \int_0^1 x(x^2-1)dx \\ &= -\ln 2 \int_{-1}^1 x(x^2-1)dx + \int_0^1 \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx \\ &= \int_0^1 \{x(x^2-1) \times \ln(x^2+1)\}dx \\ &= \frac{1}{2} \times \int_1^2 \{(t-2) \times \ln t\}dt \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 - 2t \ln t + 2t \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{8} - \ln 2 \end{aligned}$$

이다.

따라서 $a = \frac{5}{8}$, $b = -1$ 이므로 $64(a^2 + b^2) = 25 + 64 = 89$ 이다.

기하

23. 정답) ⑤ [기하 공간좌표]

해설 : 점 $(2, a, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(-2, a, -4)$ 이므로 $a=3$, $b=-4$ 이다. 따라서 $a+b=3-4=-1$ 이다.

24. 정답) ② [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 점 $(2, 4)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{p}=(a, a+2)$ 직선은

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{a+2}$$

인데, y 절편이 -2 이므로

$$-\frac{2}{a} \times (a+2) + 4 = -2, \quad \frac{a+2}{a} = 3$$

에서 $a=1$ 이다.

25. 정답) ③ [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 점 $(3, a)$ 에서의 접선은

$$ay = 2p(x+3)$$

이고, 이 직선의 기울기가 -1 이므로

$$a = -2p \dots \textcircled{1}$$

이다. 또, 점 $(3, a)$ 는 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 점이므로

$$a^2 = 12p \dots \textcircled{2}$$

이다. ①, ②를 연립하면 $a = -6$, $p = 3$ 이므로

$$p+a = 3-6 = -3 \text{이다.}$$

26. 정답) ④ [기하 공간도형]

해설 : 점 B'에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{B'H} = \sqrt{3}$ 이다.

또, $\angle BB'H = \angle B'HA = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해

$$\angle BHA = \frac{\pi}{2}$$

이고, 두 직선 AB, l이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 ABH는 $\angle BAH = \frac{\pi}{3}$ 인 직각삼각형이고,

$$\overline{BH} = \overline{AB} \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

이다. 따라서 직각삼각형 BB'H에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BB'} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

이다.

27. 정답) ① [기하 이차곡선 | 쌍곡선]

해설 : 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 P(a, b)에 대하여

$$\frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{12} = 1 \dots \textcircled{1}$$

이고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 두 점근선은

$$y = \sqrt{2}x \text{ 또는 } y = -\sqrt{2}x$$

이므로 ①에 의해

$$\begin{aligned} m &= \frac{|\sqrt{2}a+b|}{\sqrt{3}} \times \frac{|\sqrt{2}a-b|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2a^2-b^2}{3} = 4 \times \left(\frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{12} \right) = 4 \end{aligned}$$

이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에 접하고 기울기가 4인 두 직선은

$$y = 4x \pm \sqrt{6 \times 4^2 - 12} = 4x \pm \sqrt{84}$$

이므로 이 두 직선의 y절편의 곱은 -84이다.

28. 정답) ④ [기하 공간좌표+공간도형]

해설 : 좌표공간에서 두 점 A C는 한 평면 z=3 위에 있다.

점 C를 중심으로 하고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는

점 C와 xy평면 사이의 거리와 같으므로 3이다.

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \overline{CP} = 3 \text{ (구의 반지름의 길이)}$$

이고 삼각형 ACP는 $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

이다. 직선 AP와 xy평면이 이루는 예각을 θ 라 할 때, xy평면과 평면 z=3은 서로 평행하므로 직선 AP와 평면 z=3이 이루는 각도 θ 이다.

이때, $\cos \theta$ 의 값이 최소가 되는 경우는 삼각형 ACP를 포함한 평면이 평면 z=3과 수직인 경우이므로

$$\frac{4}{5} \leq \cos \theta \leq 1$$

이고, 선분 AP의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{AP} \times \cos \theta$$

이므로

$$4 \times \frac{4}{5} \leq \overline{AP} \times \cos \theta \leq 4 \times 1$$

에서 $M=4, m = \frac{16}{5}$ 이다. 따라서 $M+m = 4 + \frac{16}{5} = \frac{36}{5}$

이다.

29. 정답) 263 [기하 이차곡선 | 타원]

해설 : $\overline{AF} = \overline{AF'} = 4$ 이고 $\angle FBF' = \theta$ 라 하면

네 점 A, B, F, F'이 한 원 위에 있으므로

$$\angle FAF' = \pi - \theta$$

이다.

$\overline{BF} = b, \overline{BF'} = c (b < c)$ 라 하면 타원의 성질에 의해

$$b+c=8 \dots \textcircled{1}$$

이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{AF'} \times \sin(\angle FAF') = 8 \sin \theta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{BF'} \times \sin(\angle FBF') = \frac{bc}{2} \sin \theta$$

에서 $3S_1 = 4S_2$ 이므로 $24 = 2bc$ 이고

$$bc = 12 \dots \textcircled{2}$$

이다. 따라서 ①, ②에 의해 $b=2, c=6$ 이다.

두 삼각형 BFF', AFF'에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{FF'}^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos \theta$$

$$= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos(\pi - \theta)$$

이므로 $\cos \theta = \frac{1}{7}$ 이고 $\overline{FF'}^2 = \frac{256}{7}$ 이므로

$p+q = 7 + 256 = 263$ 이다.

30. 정답) 48 [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ 라 하면 조건 (가)에서

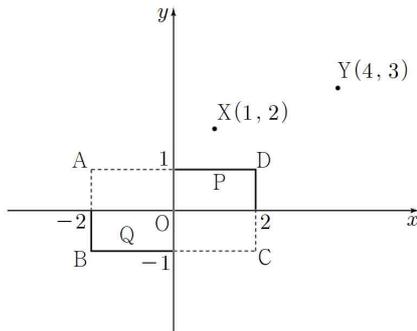
$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = p_1 + 2p_2 \geq 2,$$

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OX} = q_1 + 2q_2 \leq -2$$

이므로 점 P는 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 의 점 또는 위쪽의 점
이고

점 Q는 직선 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 의 점 또는 아래쪽의 점이다.

두 점 P, Q로 가능한 점들을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



조건 (나)를 만족하는 점 R가 직사각형 ABCD의 둘레
위에
존재하도록 두 점 P, Q를 점 P의 경우를 나누어 나타내
자.

(i) P(0, 1)일 때,

$-1 \leq t \leq 0$ 인 t 에 대하여 $Q(-2, t)$ 이고

$$\overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (4, 2) \cdot (6, 3-t) = 30 - 2t$$

(ii) $0 < t < 2$ 인 t 에 대하여 P(t, 1)일 때,

$$Q(-2, 0) \text{이고 } \overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (4-t, 2) \cdot (6, 3) = 30 - 6t$$

(iii) P(2, 1)일 때,

$$Q(-2, 0) \text{이면 } \overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (2, 2) \cdot (6, 3) = 18$$

$$Q(0, -1) \text{이면 } \overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (2, 2) \cdot (4, 4) = 16$$

(iv) $0 < t < 1$ 인 t 에 대하여 P(2, t)일 때,

$$Q(0, -1) \text{이고 } \overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (2, 3-t) \cdot (4, 4) = 20 - 4t$$

(v) P(2, 0)이면

$-2 \leq t \leq 0$ 인 t 에 대하여 $Q(t, -1)$ 이고

$$\overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY} = (2, 3) \cdot (4-t, 4) = 20 - 2t$$

따라서 $\overrightarrow{PY} \cdot \overrightarrow{QY}$ 는 (i)에서 최댓값 $M=32$,

(iii)에서 $Q(0, -1)$ 일 때 최솟값 $m=16$ 를 가지므로
 $M+m=32+16=48$ 이다.

(※ 두 점 P, Q의 중점을 M이라 하면

조건 (나)에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \overrightarrow{OM}$ 이어야 한다.)