2021 우주설 파이널 8주차
통계 내용 탐구

잘 들어.
온 세상이 너를 환영해도
그 세상이 너를 버릴 테니 gotta let go.
늦기 전에.
Cuz I've been there before.
눈에 보이는 건 화려해도
don't be fooled by the diamonds and gold.
갈채 쏟아질 때 취하지 마.
때로는 칭찬으로 너의 발을 묶을 거야.
레드카펫 깔아줘도 잊지 마라.
그게 너의 피땀으로 붉게 물든 거야.

Epik high, 개화

우주설

2021 수능대비

수학 워크북

Theme 01
이산확률분포와 합의 기호 시그마

001

[9월 모의평가]

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.

002

[수능특강 71page]

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 $1, 3, 5, 7, 9$이다.
상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=2i-1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+a\ (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

이고, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{10}{3}$일 때, $\mathrm{E}(9Y+5)$의 값은?

001-2

9월 모의평가에서 출제된 좌측 페이지의 문항은

$Y=10X+10$이라고 하여도 정답을 구하는 데에 지장이 없다.

확률의 구성이 a, b, c, d로 동일하기 때문인데 이러한 이유를 모르고 이를 풀이하면

스스로에게 치명적인 약점을 만들 수 있다. 그 예시가 좌측 아래의 수능특강 문항이다.

이 문제에서 $Y=2X-1$라 하고 정답을 구할 수 있을까? 확인해보자.

$\sum_{i=1}^{5} \mathrm{P}(Y=2i-1)=\sum_{i=1}^{5} \mathrm{P}(X=i)=1$에 의해 $a=\frac{1}{6}$은 쉽게 알 수 있다.

$\mathrm{P}(Y=2i-1)=\frac{1}{6}\times \mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{6}\ (i=1, 2, 3, 4, 5)$

에 대하여 표를 작성하자.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{p_1}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_2}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_3}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_4}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{p_5}{6}+\frac{1}{6}$	1

$Y=2X-1$가 성립하지 않을 것을 직관적으로 알 수 있다.

그렇다면 풀이는 어떻게 이루어 져야 할 것인가? 해답은 항상 교과개념이다.

이산확률변수 X의 확률분포가 아래의 표와 같을 때,

X	X1	X2	X3	⋯	Xn	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	⋯	p_n	1

를 확률 변수 X의 기댓값 또는 평균이라고 하고 기호로 E(X)와 같이 나타낸다

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)\times \mathrm{P}(Y=2i-1)\\
&=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)\left\{\frac{1}{6}\mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{6}\right\}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5} i\times \mathrm{P}(X=i)+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{5} i-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5}\mathrm{P}(X=i)+5\times\left(-\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+\frac{(1+2+3+4+5)}{3}-\frac{1}{6}\times 1+5\times\left(-\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{10}{9}+5-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\\
&=\frac{46}{9}
\end{aligned}$$

따라서 정답은 51.

003

[설바이벌 2회]

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

Y	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$ap_1+\frac{1}{10}$	$ap_2+\frac{1}{10}$	$ap_3+\frac{1}{10}$	$ap_4+\frac{1}{10}$	1

이고, $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$일 때, $\mathrm{E}(9Y+5)$의 값은?

004

[설바이벌 8회]

이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고 확률변수 Y가 $Y=|X^2-4X+3|$일 때, 각각 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(Y=1)=\frac{1}{6}$ (나) $\mathrm{E}(X^2)=\frac{23}{3}$

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)$일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

003-4

3번 문항의 정답은 32이고 해설은 2번과 같다.

$X=0$이면, $Y=3$이 되므로

$X=0$에 의해 $Y=3$이 될 확률은 $P(X=0)$이다.

$X=1$이면, $Y=0$이 되므로

$X=1$에 의해 $Y=0$이 될 확률은 $P(X=1)$이다.

.

.

.

$X=4$이면, $Y=3$이 되므로

$X=4$에 의해 $Y=3$ 확률은 $P(X=4)$이다.

그러므로 $E(Y)=\sum_{x=0}^{4}\left|x^2-4x+3\right|\times P(X=x)$ 이고

$$E(Y)=\sum_{x=0}^{4}\left|x^2-4x+3\right|\times P(X=x)$$

$$=\sum_{x=0}^{4}\left(x^2-4x+3\right)\times P(X=x)+2P(X=2)$$

이때, $P(Y=1)=P(X=2)$ 이므로

$$E(Y)=\sum_{x=0}^{4}\left(x^2-4x+3\right)\times P(X=x)+2\times\frac{1}{6}$$

$$=\sum_{x=0}^{4}x^2\times P(X=x)-4\sum_{x=0}^{4}x\times P(X=x)+3\sum_{x=0}^{4}P(X=x)+2\times\frac{1}{6}$$

$$=E\left(X^2\right)-4E(X)+3+\frac{1}{3}$$

$$=11-4E(X)$$

$E(X)=E(Y)$이므로, $E(X)=11-4E(X)$

$$E(X)=\frac{11}{5}$$

Theme 02

제곱의 평균 $E(X^2)$

005

[설바이벌 3회]

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{2}X+1\right)=2$일 때, $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} x^2\,{}_{n}\mathrm{C}_{x}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 의 값은?

① 232　② 240　③ 248　④ 256　⑤ 264

006

[수능특강 91P]

2이상의 자연수 n에 대하여 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 이 모집단의 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=3,\mathrm{E}(X^2)=25$일 때, $\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)\geq 11$을 만족시키는 n의 개수는?

005-6

출제자들에게 $\mathrm{E}\left(X^2\right)$은 매력적인 소재이다. 대부분의 문제에서는

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$를 통해 문제를 풀어 나가도록 의도하지만

항상 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$를 통해서만 물어볼 수 있는 것은 아니다.

좌측 첫 번째 문제에서

$\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 의해 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$를 얻으면

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n} x^2\,{}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{x=0}^{n} x^2\,\mathrm{P}(X=x)\\ &=\mathrm{E}\left(X^2\right)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이는 바로 반응해야 하는 표현 중 하나이다.

$\mathrm{V}(X)=8$에서,

$n=32$를 얻는다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$8=$ 답 $-(16)^2$이므로 답은 264이다.

두 번째 문항의 경우 그 동안 출제되던 소재인

$\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}$ 뿐만 아니라 $\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)=\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)-\left\{\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)\right\}^2$까지 이용하는 문제로서

최근까지 출제된 적이 없어 많은 학생들이 잘 숙지하지 못한 유형이다.

$\mathrm{E}(X)=3,\ \mathrm{E}\left(X^2\right)=25$에서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$를 통해 $\mathrm{V}(X)=16$를 얻고,

$\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{16}{n}$이다. 이때

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)&=\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)+\left\{\mathrm{E}\left(\overline{X}\right)\right\}^2\\ &=\mathrm{V}\left(\overline{X}\right)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\ &=\frac{16}{n}+9\end{aligned}$$
를 얻는다.

n에 관한 부등식

$$\frac{16}{n}+9\ge 11$$

를 만족시키는 n의 값은 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$으로 7개이다.

007

[설바이벌 5주차 워크북]

어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음의 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{6}$	1

이 모집단에서 임의 추출한 크기가 5인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{3}$일 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

007

지금까지의 내용을 종합한 문제이다.

확률변수의 기본 출제요소 (확률의합=1) : $a+b+\frac{1}{6}=1$

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$: $a+2b+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

두 식을 연립하여, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$ 를 얻는다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6}=\frac{10}{3}$ 에서

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

이고,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}=\frac{1}{9}$ 이다. 이때

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$ 에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{1}{9}+\left(\frac{5}{3}\right)^2\\&=\frac{26}{9}\end{aligned}$$

따라서 답은 35이다.

Theme 03
이항분포의 확률변수가 가진 의미

008

[수능특강 70P]

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나오면 3점을 얻고 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 1점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 270번 반복할 때, 얻을 수 있는 총 점수의 기댓값은?

009

[수능완성 실전모의평가 4회]

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 구슬 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 주머니 안에 넣는 시행을 한다. 매회 시행마다 6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 3점을 얻고, 6의 약수가 아닌 수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 2점을 잃는다고 한다. 0점에서 시작하여 162회의 새행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

008-9

문제의 상황은 이항분포 $\mathrm{B}\left(270, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를

확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(90, 60)$를 따른다.

($\mathrm{E}(X) = 90$)

한편 게임에서 얻는 점수를 확률변수 Y라 하면,

$$Y = 3 \times X + 1 \times (270 - X)$$
$$= 270 + 2X$$

를 얻고

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 270 + 2\mathrm{E}(X)$$
$$= 450$$

이다.

마찬가지로

6의 약수가 적힌 공을 뽑을 확률 $\frac{2}{3}$에 대하여

문제의 상황은 이항분포 $\mathrm{B}\left(162, \frac{2}{3}\right)$를 따르고 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를

확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(108, 6^2\right)$을 따른다.

($\mathrm{E}(X) = 90$)

한편 게임에서 얻는 점수를 확률변수 Y라 하면,

$$Y = 3 \times X + (-2) \times (162 - X)$$
$$= 5X - 324$$

이고, 구하는 것은

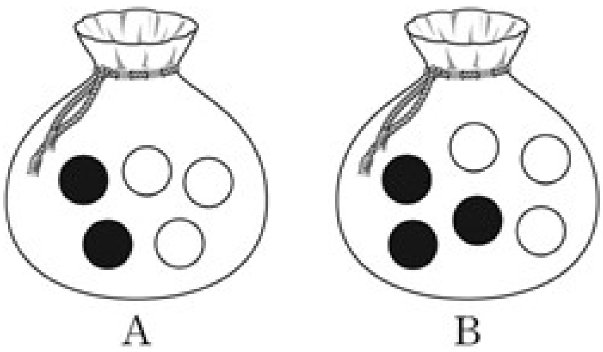
$$\mathrm{P}(201 \leq Y \leq 246) = \mathrm{P}(201 \leq 5X - 324 \leq 246)$$
$$= \mathrm{P}(525 \leq 5X \leq 570)$$
$$= \mathrm{P}(105 \leq X \leq 114)$$
$$= \mathrm{P}(-0.5 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5328$$

010

[설바이벌 4회]

주머니 A에는 검은 공 2개와 흰 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 공 3개와 흰 공 3개가 들어 있다. 동전을 하나 던져서 앞면이 나오면 주머니 A에서 2개의 공을 꺼내고, 뒷면이 나오면 주머니 B에서 2개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 매회 시행마다 꺼낸 공들 중 검은 공이 있으면 1점을 얻고, 그렇지 않으면 2점을 잃을 때, 0점에서 시작하여 192회의 시행 후 획득한 점수가 48점 이상 66점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938



① 0.1525　② 0.3413　③ 0.4772
④ 0.6826　⑤ 0.8185

010

호흡이 길 뿐 이전과 같은 문항이다.
확률변수의 의미만 제대로 파악하면 문제없다.

흰 공만 뽑을 확률을 구해보자.
i) 동전이 앞면이 나올 경우

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

ii) 동전이 뒷면이 나올 경우

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

흰 공만 뽑을 확률 : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$ 에 의해

뽑은 공 중 검은 공이 포함될 확률 : $\frac{3}{4}$ 이고

문제의 상황은 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \frac{3}{4}\right)$을 따르고

뽑은 공 중 검은 공이 포함되어 1점을 얻는 횟수를

확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(144, 6^2)$을 따른다.

한편 게임에서 얻는 점수를 확률변수 Y라 하면,

$$\begin{aligned}Y&=1\times X+(-2)\times(192-X)\\&=3X-384\end{aligned}$$

이고, 구하는 것은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(48\le Y\le 66)&=\mathrm{P}(48\le 3X-384\le 66)\\&=\mathrm{P}(432\le 3X\le 450)\\&=\mathrm{P}(144\le X\le 150)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.3413\end{aligned}$$

Theme 04
정규분포의 확률밀도 함수

011

[2017학년도 수능 가18 / 나29]

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

012

[2015년 9월 가18]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x),\ g(x)$이다.

$$f(12)=g(26), \quad \mathrm{P}(Y \geq 26) \geq 0.5$$

일 때, $\mathrm{P}(Y \leq 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896

④ 0.1587 ⑤ 0.2255

011-12

정규분포의 확률밀도함수의 그래프를 관찰하자.

$x=t$에서의 함숫값 $f(t)$는 대칭축 $x=m$(평균)까지의 거리에 반비례 한다.

그러므로 하나의 확률밀도함수 그래프 내에서 다음의 명제는 참이다.

$f(t_1)<f(t_2)$이면 $\Leftrightarrow$ $|m-t_1|>|m-t_2|$이다.

(필요 • 충분)

(가) $f(10)>f(20)$: $|m-10|<|m-20|$ $\Rightarrow$ $m<15$

(나) $f(4)<f(22)$: $|m-4|>|m-22|$ $\Rightarrow$ $13<m$

$m=14$를 얻고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(17\le X\le 18)&=\mathrm{P}(m+0.6\sigma\le X\le m+0.8\sigma)\\&=\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\&=0.062\end{aligned}$$

답: 62

아래의 문제도 마찬가지로 두 정규분포의 표준편차가 같으므로 개형이 같은 것을 이용하여 평균과의 거리 식을 세우자

$f(12)=g(26)$: $|10-12|=|m-26|$ $\Rightarrow$ $m=24$ 또는 28

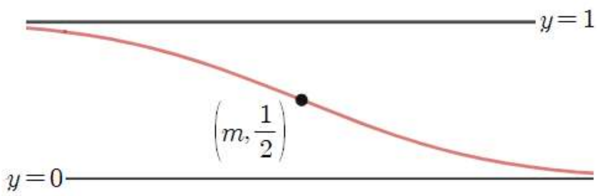
$\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge 0.5$: $\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge \mathrm{P}(Y\ge m)$

사전학습

확률변수 Y가 정규분포를 따를 때, t에 대한 함수

$$h(t)=\mathrm{P}(Y\ge t)$$

는 다음과 같은 개형의 감소함수이다.



그러므로 $h(t_1)<h(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $t_1>t_2$ 이다. (필요 • 충분)

$\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge \mathrm{P}(Y\ge m)$: $26\le m$

그러므로 $m=28$이고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 20)&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=0.0228\end{aligned}$$

답: 2

013

[2013년 9월 나19]

확률변수 X 가 평균이 $\frac{3}{2}$, 표준편차가 2 인 정규분포를 따를 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $H(t)$ 는

$$H(t) = \mathrm{P}(t \leq X \leq t+1)$$

이다. $H(0)+H(2)$ 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.25	0.0987
0.50	0.1915
0.75	0.2734
1.00	0.3413

① 0.3494　② 0.4649　③ 0.4852　④ 0.5468　⑤ 0.6147

014

실수 전체집합에서 정의된 연속확률변수 X는 평균이 m인 정규분포를 따른다. 함수 $f(t)$를 $f(t)=\mathrm{P}(t \leq X \leq t+4)$로 정의할 때, 아래의 조건을 만족시킨다.

(가) m은 자연수이다.
(나) $f(6) < f(18) < f(10)$

$f(6)=f(\alpha)$, $f(18)=f(\beta)$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha \neq 6$, $\beta \neq 18$)

013-14

정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균 m과 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

함수 $H(t)=\mathrm{P}(t \leqq X \leqq t+1)$ 가 $t=m-\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는 것은 기존 기출을 통해서 알 수 있다. 거기에 $f(x)$의 $x=m$에서의 대칭성까지 고려하면

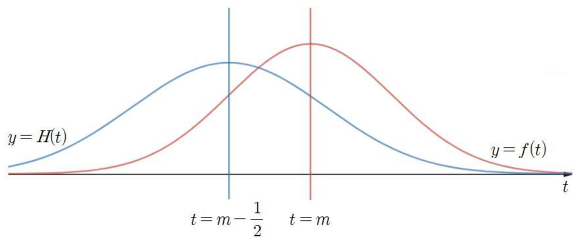
함수 $y=H(t)$의 그래프를 그릴 수 있다.

사전학습

함수 $H(t)=\mathrm{P}(t \leqq X \leqq t+1)$ 와 함수 $y=f(t)$를 같은 좌표 상에 표시하자.

$y=f(t)$의 함숫값이 대칭축 $t=m$에 가까울수록 값이 커지듯,

$y=H(t)$의 함숫값 또한 대칭축 $m-\frac{1}{2}$에 가까울수록 값이 커진다.



그러므로

$h(t_1)< h(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $\left|m-\frac{1}{2}-t_1\right|>\left|m-\frac{1}{2}-t_2\right|$ 이다.

(필요 • 충분)

위 문제는 $H(0)=H(2)=\mathrm{P}(0.25 \leq Z \leq 0.75)$이므로 $0.1747+0.1747=0.3494$다.

답은 1번

아래 문제는 사전 학습을 통해 $f(t)=\mathrm{P}(t \leq X \leq t+4)$의 그래프가 $t=m-2$에서

최댓값을 갖고 $t=m-2$를 대칭축으로 갖도록 그려지는 것을 알 수 있다.

$f(t_1)< f(t_2)$ $\Leftrightarrow$ $|m-2-t_1|>|m-2-t_2|$ 이다.

(필요 • 충분)에 의해

$f(6)<f(18)<f(10)$ $\Leftrightarrow$

$|m-8|>|m-20|>|m-12|$ 이고,

$|m-8|>|m-20|$: $14<m$

$|m-20|>|m-12|$: $m<16$ 에 의해 $m=15$이다.

$f(6)=f(\alpha)$: $|m-8|=|m-2-\alpha|$,

$7=|13-\alpha|$ 에서 $\alpha=20$이고,

$f(18)=f(\beta)$: $|m-20|=|m-2-\beta|$,

$5=|13-\beta|$ 에서 $\beta=8$이다.

답은 28

015

[2020학년도 수능 가18]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(12) \le g(20)$$

을 만족시키는 m에 대하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

016

[수능특강 85P]

m, σ가 자연수일 때, 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\mathrm{P}(32 \le X \le 35) > \mathrm{P}(35 \le X \le 38)$
> (나) $\mathrm{P}(32 \le X \le 35) > \mathrm{P}(29 \le X \le 32)$
> (다) $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}(33 \le X \le 35) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$\mathrm{P}(30 \le X \le 34)$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

015-16

지금까지의 사전 학습내용을 모두 이용하자.
확률변수 X, Y의 표준편차가 같은 것을 인지하여

$f(12) \le g(20)$: $|12-10| \ge |20-m|$ $\Rightarrow$
$18 \le m \le 22$

$\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$: $H(t) = \mathrm{P}(t \le Y \le t+3)$일 때,
$H=21$으로 해석 되므로

$y=H(t)$의 그래프의 대칭 축 $t=m-\dfrac{3}{2}$에 대하여

$\left|m-\dfrac{3}{2}-21\right|$의 값이 작을수록 $H(21)$의 값은 커진다.

$m=22$일 때 최대인 것을 기존 따름 정리들을 활용하여 알 수 있다.

답은 1번

아래 문항도 마찬가지로 $H(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+3)$이라 하면,

$y=H(t)$의 그래프의 대칭 축 $t=m-\dfrac{3}{2}$에 대하여

(가): $H(32) > H(35)$: $\left|m-\dfrac{3}{2}-32\right| < \left|m-\dfrac{3}{2}-35\right|$

$\Rightarrow m < 35$

(나): $H(32) > H(29)$: $\left|m-\dfrac{3}{2}-32\right| < \left|m-\dfrac{3}{2}-29\right|$

$\Rightarrow 32 < m$

$m=33$ 또는 34

(다): $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}(33 \le X \le 35) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
(행동영역: 3개 항의 부등식은 비교 형태를 통일해준다.)

$m=33$이면,

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

인데

함수 $\mathrm{P}(0 \le Z \le t)$는 증가함수 이므로 t의 들어갈 값만 비교하면 된다

$1 < \dfrac{2}{\sigma} < 2$가 도출된다. 양변을 2로 나누고,

역수를 취하면 $1 < \sigma < 2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 σ는 없다.

그렇다면 $m=34$이고,

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) < \mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma} \le Z \le \frac{1}{\sigma}\right) < \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

에서

$0.3413 < 2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{1}{\sigma}\right) < 0.4772$에서 $\sigma = 2$임을 알 수 있다.

답은 0.4772

017

실수 전체집합에서 정의된 연속확률변수 X는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 함수 $f(t)$를

$$f(t) = \mathrm{P}(X \leq t) + \mathrm{P}(X \geq t+6)$$

로 정의할 때, 함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다. 다음 조건을 만족시키는 m의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\alpha+\beta+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 통해 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

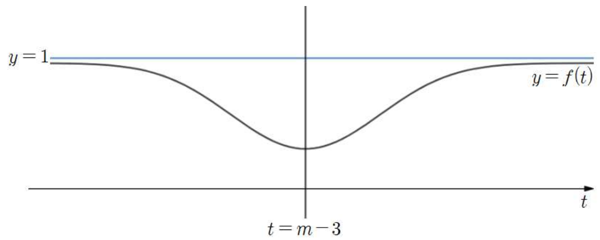
$$\boxed{f(10) \leq f(12) \leq 0.5228}$$

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

017

확률변수 X의 확률밀도함수의 개형을 그린 뒤
$f(t) = \mathrm{P}(X \le t) + P(X \ge t+6)$를 관찰하면,
$f(t) = 1 - \mathrm{P}(t \le X \le t+6)$임을 알 수 있다.

사전 학습을 통해 $\mathrm{P}(t \le X \le t+6)$가 $t = m-3$에서 최댓값을 갖는 함수인 것을
알 고 있다. 그러므로 $f(t) = 1 - \mathrm{P}(t \le X \le t+6)$는 $t = m-3$에서 최솟값을 갖는
다음과 같은 개형을 갖는 것을 예상할 수 있다. (관찰을 통한 그래프 그리기)



그러므로 $f(t_1) < f(t_2) \Leftrightarrow |m-3-t_1| < |m-3-t_2|$이다. (필요 • 충분) $\cdots$ (ㄱ)

함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다.
$\Rightarrow f(m-3) = 0.3174$
$f(m-3) = 1 - \mathrm{P}(m-3 \le X \le m+3) = 0.3174$
$\mathrm{P}(m-3 \le X \le m+3) = 0.6826$
$\mathrm{P}(m \le X \le m+3) = 0.3413$
$\Rightarrow \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{3}{\sigma}\right) = 0.3413 \Rightarrow \sigma = 3$

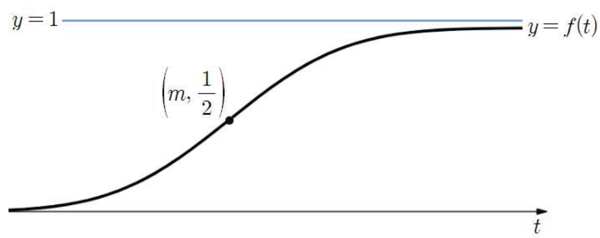
한편, $f(10) \le f(12) \le 0.5228$ (행동영역: 3개 항의 부등식은 비교 형태를 통일해준다.)
$0.3413 < 0.5228 < 1$이므로 $f(k) = 0.5228$을 만족시키는 k가 존재한다. 그것을 찾아보자.
$f(k) = 1 - \mathrm{P}(k \le X \le m+6) = 0.5228$
$\mathrm{P}(k \le X \le k+6) = 0.4772$
$\Rightarrow \mathrm{P}(k \le X \le k+2\sigma) = 0.4772$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\dfrac{k-m}{\sigma} \le Z \le \dfrac{k-m}{\sigma}+2\right) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
조건을 만족시키는 $k = m-6$ 또는 m (무엇을 선택하든 상관없다.)

$f(10) \le f(12) \le f(m)$에서 (ㄱ)에 의해
$\Rightarrow |m-3-10| \le |m-3-12| \le |m-3-m|$
$|m-3-10| \le |m-3-12|$: $m \le 14$
$|m-3-12| \le 3$: $12 \le m \le 18$
그러므로 $12 \le m \le 14$이다.
답은 3번

< 여러 가지 따름정리 >

$f(t) = \mathrm{P}(X \le t)$의 그래프를 그려보자



$f(t)$는 증가함수로서 $t_1 < t_2 \Leftrightarrow f(t_1) < f(t_2)$이다.
(필요 • 충분) $\cdots$ (ㄱ)

$\mathrm{P}(X \ge t) = \mathrm{P}(X \le 2m - t)$ $\cdots$ (ㄴ)

(ㄱ)+(ㄴ)에 의해 다음과 같은 정리를 도출해 낼 수 있다.

$\mathrm{P}(X \le t_1) < \mathrm{P}(X \ge t_2) < \mathrm{P}(X \le t_3) \Leftrightarrow$
$\mathrm{P}(X \le t_1) < \mathrm{P}(X \le 2m - t_2) < \mathrm{P}(X \le t_3) \Leftrightarrow$
$t_1 < 2m - t_2 < t_3$

$\mathrm{P}(X \ge t) = 1 - \mathrm{P}(X \le t)$에 의해
$f(x) = 1 - \mathrm{P}(X \le t)$로 볼 수도 있다.

Theme 05

2개의 확률밀도 함수 그래프 비교

018

실수 전체에서 정의된 연속확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\, \sigma^2\right)$와 $\mathrm{N}\left(2m,\, 4\sigma^2\right)$를 따를 때, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$와 $g(x)$라 하자. 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 자연수이다.)

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{m}^{m+n} f(x)\,dx = \int_{2m}^{2(m+n)} g(x)\,dx$

ㄴ. $f(m) < g(2m)$

ㄷ. $f(x) = g(2m)$을 만족하는 x값의 합은 $2m$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

019

실수 전체의 집합에서 정의된 확률변수 X와, X의 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 X와 $\overline{X}$는 각각 $f(x)$, $g(x)$를 확률밀도함수로 하는 정규분포를 따른다. $f(x)=g(x)$의 실근 $x=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $n\geq 2$)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)< g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ㄴ. $0<k<1$인 임의의 상수 k에 대하여
$f((1-k)\alpha+k\beta)< g((1-k)\alpha+k\beta)$가 항상 성립한다.

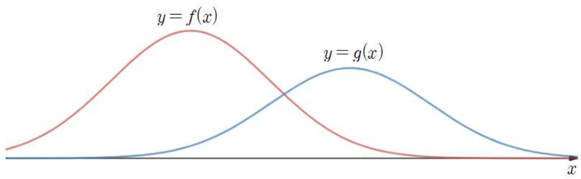
ㄷ. $\mathrm{P}(X\geq\beta)+\mathrm{P}(\overline{X}\leq\beta)>1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

018-19

표준편차가 같고 평균이 다른 경우 평균이 같고 표준편차가 다른 경우 $(\sigma_1 < \sigma_2)$

첫 번째 문제의 상황은 다음과 같다.

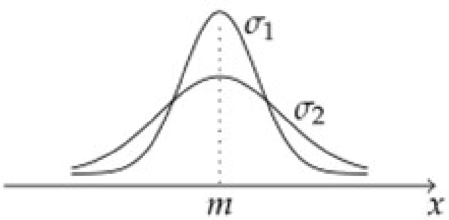


답은 4번

아래의 문제 상황은

X의 표준편차가 σ_2이고, $\overline{X}$의 표준편차가 $\sigma_1\left(\dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)$일 때

다음과 같다.



ㄱ. $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)< g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(m)< g(m)$ (참)

ㄴ. $f((1-k)\alpha+k\beta)< g((1-k)\alpha+k\beta)$에서

$(1-k)\alpha+k\beta$는 내분점의 식이다.

$\alpha < x < \beta$인 모든 x값을 의미한다. (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(X \ge \beta)+\mathrm{P}(\overline{X}\le \beta)> 1$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\le \beta)= 1-\mathrm{P}(\overline{X}\ge \beta)$에 의해

$\mathrm{P}(X \ge \beta)+\mathrm{P}(\overline{X}\le \beta)> 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{P}(X \ge \beta)+1-\mathrm{P}(\overline{X}\ge \beta)> 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{P}(X \ge \beta)> \mathrm{P}(\overline{X}\ge \beta)$ (참)

답은 5번

020

[수능특강 98P]

모평균이 58이고, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 모평균이 m이고 모 표준편차가 $\sigma+2$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=60$에 대하여 서로 대칭이다. $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 60)+\mathrm{P}(\overline{Y}\leq 60)$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

021

[수능특강 138P]

두 확률변수 X, Y는 평균이 각각 m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$인 정규분포를 따른다. X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x), g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

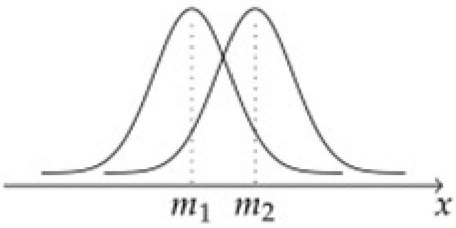
(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.
(나) $f(\alpha)=g(\alpha)$ $(m_1 < \alpha < m_2)$

$\mathrm{P}(m_1 \leq X \leq \alpha)+\mathrm{P}(\alpha \leq Y \leq m_2)=0.5468$일 때, $\mathrm{P}(m_1 \leq X \leq m_2)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.75	0.2734
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332

020-21

문제 상황은 오른쪽과 같이 두 확률변수의 표준편차가 서로 같고 $\dfrac{m_1+m_2}{2}=60$인 상황이다.

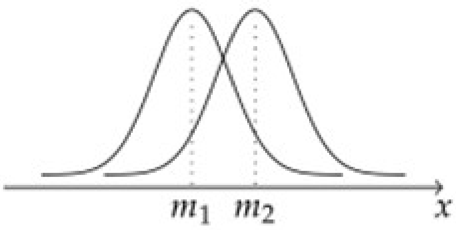


그러므로 $\dfrac{\sigma}{4}=\dfrac{\sigma+2}{5}$에서, $\sigma=8$이고

$\dfrac{58+m}{2}=60$에서

$m=62$이다. $\mathrm{P}(Z\geq 1)+\mathrm{P}(Z\leq -1)=0.3174$

답은 0.3174



방금 전과 상황이 일치한다. $\alpha=\dfrac{m_1+m_2}{2}$이다.

$\mathrm{P}\left(m_1\leq X\leq \alpha\right)=0.2734=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.75)$이므로

$\mathrm{P}\left(m_1\leq X\leq m_2\right)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$

답은 0.4332

022

[수능특강 83P]

$0<\sigma_1<\sigma_2$일 때, 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \sigma_1^2\right), \mathrm{N}\left(10, \sigma_2^2\right)$ 를 따르고, 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x), g(x)$이다. $10<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(10 \leq X \leq a) \leq \mathrm{P}(a \leq X \leq b)$이고, $f(a)=g(a)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(b)<g(b)$

ㄴ. $2a<b+10$

ㄷ. $\mathrm{P}(10 \leq Y \leq c)=0.25$ 이면, $a<c$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

023

[수능특강 99P]

모집단의 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 1)$을 따르고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 양의 실수 k에 대하여

$$f(k) = \mathrm{P}(0 \le X \le m+k+1),\ g(k) = \mathrm{P}\left(0 \le \overline{X} \le m+k\right)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $m \ge 0$)

<보 기>

ㄱ. $m=1$이면, $f(1) < g(1)$이다.

ㄴ. $m>0$이면, $2f(m) > g(m)$이다.

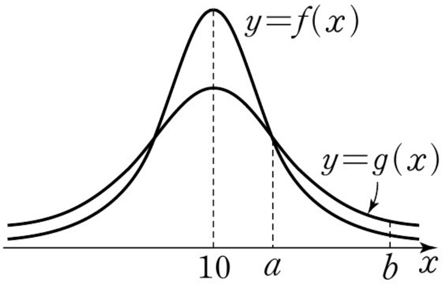
ㄷ. $f(k) = g(k)$이면, $k \le 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

022-23

아래와 같은 그림에서 $m=10$이 상황이다.

$\mathrm{P}(10 \le X \le a) \le \mathrm{P}(a \le X \le b)$



ㄱ. $f(b) < g(b)$ (참)

$\mathrm{P}(10 \le X \le a) \le \mathrm{P}(a \le X \le b)$에서

$10 < x$에서 $f(x)$는 감소함수이므로 $a-10 < b-a$이다.

ㄴ. $2a < b+10$ (참)

ㄷ. $P(X \ge 10) = 0.5$이므로

$P(10 \le X \le a) + P(a \le X \le b) < 0.5$이다.

$P(10 \le X \le a) = P(a \le X \le b)$이므로

$2P(10 \le X \le a) < 0.5$

즉, $P(10 \le X \le a) < 0.25$이다.

따라서 $P(10 \le Y \le a) < P(10 \le X \le a) < 0.5$이므로

$P(10 \le Y \le x) = 0.25$이면 $a < c$이다. (참)

답은 5번

$E(\overline{X}) = m$, $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$이므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_1 = \dfrac{X-m}{1}$, $Z_2 = \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_1, Z_2는

모두 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르고,

$f(k) = P(-m \le Z_1 \le k+1), g(k) = P(-2m \le Z_2 \le 2k)$이다.

ㄱ. $m=1$일 때,

$f(1) = P(-1 \le Z_1 \le 2)$, $g(1) = P(-2 \le Z_2 \le 2)$이므로

$f(1) < g(1)$ (참)

ㄴ. $m > 0$일 때,

$f(m) = P(-m \le Z_1 \le m+1) > 2P(0 \le Z_1 \le m)$

$g(m) = P(-2m \le Z_2 \le 2m) = 2P(0 \le Z_2 \le 2m)$이고,

$2P(0 \le Z_1 \le m) > P(0 \le Z_2 \le 2m)$이므로

$2f(m) > 2 \times 2P(0 \le Z_1 \le m)$
$> 2P(0 \le Z_2 \le 2m)$
$= g(m)$ (참)

ㄷ. $f(k) = g(k)$에서

$P(-m \le Z_1 \le k+1) = P(-2m \le Z_2 \le 2k)$

(i) $m=0$이면

$P(0 \le Z_1 \le k+1) = P(-2m \le Z_2 \le 2k)$에서

$k+1 = 2k$, $k=1$

(ii) $m > 0$이면

$P(-m \le Z_1 \le k+1) = P(-2m \le Z_2 \le 2k)$이고

$-2m < -m < 0$이므로 $0 < 2k < k+1$이다.

즉, $k < 1$ (i), (ii)에 의하여 $k \le 1$ (참)

답은 5번

024

실수 전체의 집합에서 정의된 확률변수 X와, X의 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 X와 $\overline{X}$는 각각 $f(x)$, $g(x)$를 확률밀도함수로 하는 정규분포를 따른다. $f(x)=g(x)$의 실근 $x=\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$라 할 때, 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $n \geq 2$)

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}\left(X \leq \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=1$

ㄴ. $\dfrac{\mathrm{P}(\alpha \leq \overline{X} \leq \beta)-\mathrm{P}(\alpha \leq X \leq \beta)}{\mathrm{P}(X \leq \alpha)-\mathrm{P}(\overline{X} \leq \alpha)}=2$

ㄷ. 함수 $h(t)=\mathrm{P}(X \leq t)-\mathrm{P}(\overline{X} \leq t)$라 하면,
$h(t)$는 $t=\beta$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

025

[수능완성 실전 모의평가 2회]

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$를 따르는 확률변수가 X인 모집단에서 임의 추출한 크기 n $(n \geq 2)$인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $F(t)$를

$$F(t) = \mathrm{P}(X \geq t) - \mathrm{P}(\overline{X} \geq t)$$

라 할 때, 함수 $y = F(t)$의 그래프가 직선 $y = k$와 한 점에서만 만나도록 하는 서로 다른 모든 실수 k의 개수는?

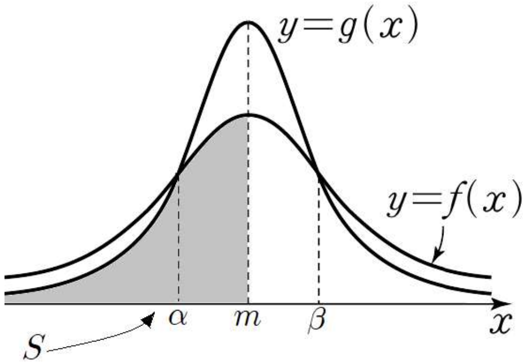
024-25

문제 상황을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=m$이므로

$\mathrm{P}(X \le m)=\mathrm{P}(\overline{X} \ge m)=\dfrac{1}{2}$이다.

그러므로 ㄱ은 참이다.



그림에서 색칠한 영역의 넓이 S에 대하여

$\mathrm{P}(X \le m)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(X \le \alpha)-\mathrm{P}(\overline{X} \le \alpha)=\dfrac{1}{2}-S$

이고, 마찬가지로

$\mathrm{P}(\overline{X} \le m)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(\alpha \le \overline{X} \le m)-\mathrm{P}(\alpha \le X \le m)=\dfrac{1}{2}-S$ 이다.

도형의 넓이 차를 구하는 S_1-S_2 형태의 문제를 떠올리면 이해가 쉽다.

대칭성에 의해 마찬가지로

$\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le \beta)-\mathrm{P}(m \le X \le \beta)=\dfrac{1}{2}-S$ 이고,

$\mathrm{P}(\beta \le X)-\mathrm{P}(\beta \le \overline{X})=\dfrac{1}{2}-S$ 이다.

그러므로

$$\frac{\mathrm{P}(\alpha \le \overline{X} \le \beta)-\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)}{\mathrm{P}(X \le \alpha)-\mathrm{P}(\overline{X} \le \alpha)}=\frac{\left(\frac{1}{2}-S\right)+\left(\frac{1}{2}-S\right)}{\left(\frac{1}{2}-S\right)}$$

이고, ㄴ은 참이다.

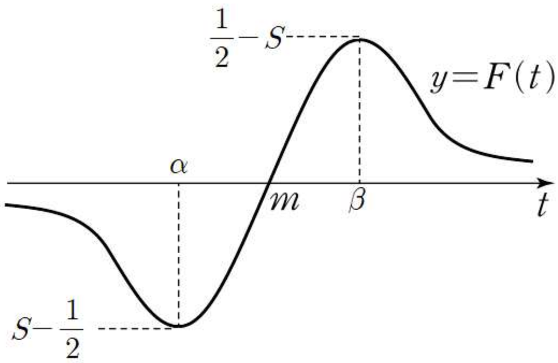
$f(x), g(x)$의 그래프를 관찰하여

$h(t)=\mathrm{P}(X \le t)-\mathrm{P}(\overline{X} \le t)$의 그래프를 그리면

$t=\alpha$에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}-S$, $t=\beta$에서 극솟값 $S-\dfrac{1}{2}$을 갖는 것을 알 수 있다.

아래 문항은 위 문항을 해설할 때의 학습한 내용을 통해

함수 $F(t)=\mathrm{P}(X \ge t)-\mathrm{P}(\overline{X} \ge t)$의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.



답은 3개

Theme 06
이산확률변수에서의 표본평균

026

[수능특강 99P]

모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 $1, 3, 5$이고, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{16}$, $\mathrm{E}(\overline{X})=4$이다. $\mathrm{P}(X=3)-\mathrm{P}(\overline{X}=3)$의 값은?

027

[수능특강 99P]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})\leq 4$

ㄴ. $n=3$이면, $\mathrm{V}(\overline{X})\leq 1$

ㄷ. $n=2$이고, $a\leq\frac{1}{4}$이면, $\mathrm{P}(\overline{X}\leq 4)\leq\frac{1}{2}$이다.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

026-27

$P(X=1)=a$, $P(X=3)=b$, $P(X=5)=c$라 하고,
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

$P(\overline{X}=2)=a\times b\times 2=\frac{1}{16}$ 이므로

$2ab=\frac{1}{16}$ ⋯ ㉠

$E(\overline{X})=4$에서 $E(X)=4$이므로
$a+3b+5c=4$, $c=1-a-b$이므로
$a+3b+5(1-a-b)=4$
$4a+2b=1$, $2b=1-4a$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면

$a(1-4a)=\frac{1}{16}$

$4a^2-a+\frac{1}{16}=0$, $64a^2-16a+1=0$

$(8a-1)^2=0$, $a=\frac{1}{8}$

㉡에서 $b=\frac{1}{4}$, $c=1-a-b=\frac{5}{8}$

따라서 $P(\overline{X}=3)=a\times c\times 2+b\times b$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}\times 2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{7}{32}$$
이므로

$P(X=3)-P(\overline{X}=3)=\frac{1}{4}-\frac{7}{32}=\frac{1}{32}$

답은 $\frac{1}{32}$

ㄱ. 모든 확률의 합은 1이므로
$\frac{1}{4}+a+b=1$에서 $a+b=\frac{3}{4}$

따라서 $E(X)=2\times\frac{1}{4}+4a+6b$
$$=\frac{1}{2}+4a+6\left(\frac{3}{4}-a\right)$$
$$=5-2a$$
이므로

$a=\frac{1}{4}$이면 $E(\overline{X})=E(X)=\frac{9}{2}>4$ (거짓)

ㄴ. $V(X)=2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times a+6^2\times b-(5-2a)^2$
$$=1+16a+36\left(\frac{3}{4}-a\right)-(5-2a)^2$$
$$=3-4a^2\le 3$$

따라서 $n=3$이면 $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{3}\le 1$(참)

ㄷ. $n=2$이면 확률변수 $\overline{X}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고,

$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$P(\overline{X}=3)=\frac{1}{4}\times a\times 2=\frac{1}{2}a$

$P(\overline{X}=4)=\frac{1}{4}\times b+2+a\times a$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-a\right)+a^2$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}a+a^2$$
이므로

$P(\overline{X}\le 4)=P(\overline{X}=2)+P(\overline{X}=3)+P(\overline{X}=4)$
$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}a+a^2$$
$$=\frac{7}{16}+a^2$$

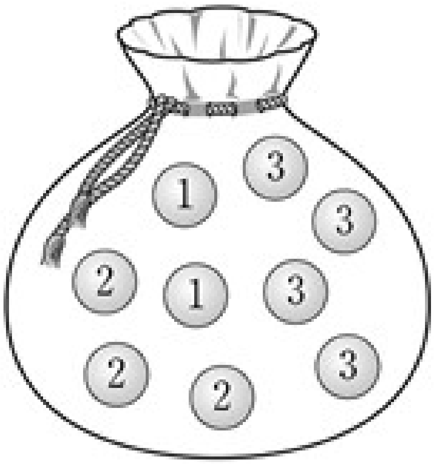
따라서 $a\le\frac{1}{4}$이면

$P(\overline{X}\le 4)\le\frac{7}{16}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$(참)

028

[설바이벌 3회]

주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 3개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



028

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=2\right)$는 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 합이 6인 것을 의미한다.

i) 2가 적힌 공을 3개 뽑을 경우

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

ii) 1, 2, 3이 적힌 공을 각각 1개씩 뽑을 경우
반드시 순서를 고려해 주어야 한다.

$$\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\times3\neq\frac{16}{81}$$

$$\frac{1}{27}+\frac{16}{81}=\frac{19}{81}$$

답은 100

Theme 07
표본평균의 활용

029

[2011학년도 수능 나27]

어느 도시에서 공용 자전거의 1회 이용 시간은 평균이 60분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 공용 자전거를 이용한 25회를 임의추출하여 조사할 때, 25회 이용시간의 총합이 1450분이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

030

[설바이벌 8회]

같은 종류의 주사위 3개를 동시에 굴려 나온 눈의 수를 각각 a, b, c $(a \geq b \geq c)$ 라 할 때, $(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}$의 값을 기록하는 시행을 하자. 8번의 시행을 하는 동안 기록된 모든 값들의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오.

029-30

자전거의 1회 이용 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(60, 10^2)$을 따르고

25회 이용 시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(60, 2^2)$을 따른다.

25회 이용 시간의 총 합은 $\overline{X}\times 25$인데

$\mathrm{P}(25\overline{X}\geq 1450)=\mathrm{P}(\overline{X}\geq 58)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{58-60}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\geq -1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$ 이다.

답은 2번

a, b, c 중 짝수와 홀수가 각각 몇 개 인지 구성만 결정해주면, $a\geq b\geq c$에 의해 a, b, c 및 $(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}$의 값이 자동 결정된다.

전체 경우의 수: $6^3=216$에 대하여

i) 나온 수 3개가 모두 짝수인 경우 : 3^3이고,

$(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}=3$이다.

ii) 나온 수 3개 중 2개가 짝수, 1개가 홀수인 경우 : $3^3\times {}_3\mathrm{C}_1=81$이고,

$(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}=3$이다.

iii) 나온 수 3개 중 1개가 짝수, 2개가 홀수인 경우 : $3^3\times {}_3\mathrm{C}_2=81$이고,

$(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}=1$이다.

iv) 나온 수 3개가 모두 홀수인 경우 : 3^3이고,

$(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}=-3$이다.

Y	-3	1	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	1

1번 시행 시 나오는 값을 확률변수 Y라고
하면, 오른쪽 그림과 같은 이산확률분포표를

작성하여 $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{3}{2}$, $\mathrm{V}(Y)=\dfrac{15}{4}$를 얻는다.

이때, 8번의 시행을 하는 도출되는 값의 평균을 $\overline{Y}$라 하면, $\overline{Y}$는 Y의 모집단에서
크기가 8인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균이고, 8회 시행 시 나오는 값을

모두 합친 값 $X=8\times\overline{Y}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{V}(8\overline{Y})\\&=8^2\times\mathrm{V}(\overline{Y})\\&=8^2\times\frac{\mathrm{V}(Y)}{8}=30\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(8\overline{Y})\\&=8\mathrm{E}(\overline{Y})\\&=8\mathrm{E}(Y)=12\end{aligned}$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에 의해 $\mathrm{E}(X^2)=174$이다.

답은 174

Theme 08
신뢰구간의 대칭성과 비율관계

031

[설바이벌 6회]

어느 고등학교 학생들의 수행평가 점수를 확률변수 X라 할 때 X는 평균이 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 256명을 임의 추출하여 수행평가 점수를 조사한 표본 평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $0 \leq m \leq a$ 이었다. 또 이 고등학교 학생 n명을 임의 추출하여 수행평가 점수를 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 95% 신뢰구간이 다음과 같다.

$$\frac{4}{7}\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right) \leq m \leq 2a$$

모평균 $m=68$이고 $\mathrm{P}\left(X \leq \overline{x_1}\right)=\mathrm{P}\left(X \geq \overline{x_2}\right)$일 때, $a+n$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96)=0.475$이다.)

031

$\Rightarrow \overline{x_1}=\dfrac{a}{2}$ 이고, $a-0=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{256}}$ 이다.

n명을 임의 추출하여 수행평가 점수를 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$ 일 때,
모평균 m에 대한 95% 신뢰구간이 다음과 같다.

$\dfrac{4}{7}\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)\le m \le 2a$

$\Rightarrow \overline{x_2}=\dfrac{\dfrac{4}{7}\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)+2a}{2}$ 이고,

$2a-\dfrac{4}{7}\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

이때, $\overline{x_1}=\dfrac{a}{2}$ 를 대입하면, $\overline{x_2}=\dfrac{6}{5}a$ 이고,

$\dfrac{8}{5}a=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

모평균 $m=68$ 이고 $\mathrm{P}\left(X\le\overline{x_1}\right)=\mathrm{P}\left(X\ge\overline{x_2}\right)$

$\Rightarrow \overline{x_1}=\dfrac{a}{2},\ \overline{x_2}=\dfrac{6}{5}a$ 가 $m=68$ 에 대하여 대칭이다.

$2\times68=\dfrac{a}{2}+\dfrac{6}{5}a$

$a=80$ 이고

두 관계식

$a=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{16},\ \dfrac{8}{5}a=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 를

각각 비교하여 $n=100$

정답은 180

032

[설바이벌 4회]

어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 144명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. 세 양수 $c-a$, $b-c$, $d-b$가 등비수열을 이룰 때, $12\left(\dfrac{d-a}{b-c}\right)$의 값을 구하시오.

032

42페이지 문제와 마찬가지로 같은 모집단에서 같은 신뢰도로 추정한

신뢰구간 $[a, b]$에 대하여 $b-a$의 값이 표본의 크기 n에 대하여

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$에 비례하는 것을 이용할 수 있다.

$\dfrac{1}{\sqrt{144}} : \dfrac{1}{\sqrt{16}} = 1:3$이므로 그에 맞게 $3 = \dfrac{(d-c)}{(b-a)}$가 되고

$c-a$, $b-c$, $d-b$의 값이 모두 양수가 되도록 그림으로 나타내 보자.

등비수열의 공비 r에 대하여

$c-a=l$, $b-c=rl$, $d-b=r^2l$이라 하면,

$b-a=(c-a)+(b-c)=l+rl$

$d-c=(d-b)+(b-c)=r^2l+rl$ 이다.

$3=\dfrac{(d-c)}{(b-a)}=\dfrac{rl+r^2l}{l+rl}$에서, $r=3$을 얻고

구하는 값 $12\left(\dfrac{d-a}{b-c}\right)$에 대하여

$b-c=3l$, $d-a=(d-b)+(b-c)+(c-a)=13l$이므로

$12\times\dfrac{13}{3}=52$

답은 52

이 정도의 문제가 출제될 가능성은 적지만 표본의 크기 n에 대하여

$b-a$의 값이 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$에 비례하는 것을 이용하는 문항은 출제 가능성이 충분하다.

이 문제를 스스로 풀면서 위의 정리를 각인하자는 의미에서 수록하였다.

MEMO (메모)

우주설 수학

Naver ID, 우주설 (포만한)
ORBI ID, 우주설 (오르비)