제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2x, \quad f(1)=1$$

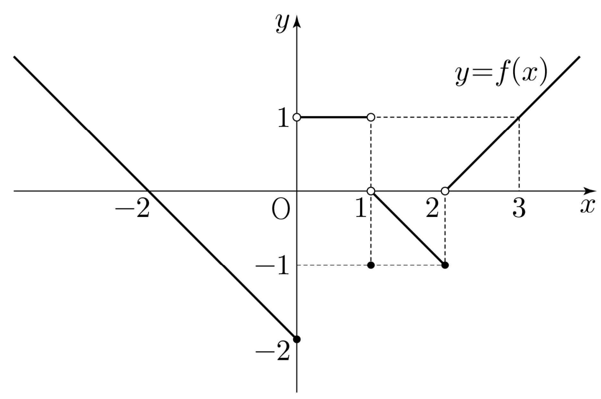
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

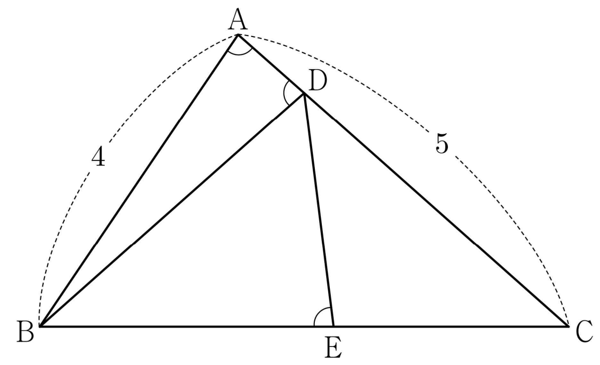
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x | 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \,|\, \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x - f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1) = 4$, $f'(1) = 1$, $f'(0) > 1$일 때, $f(0) = \frac{q}{p}$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

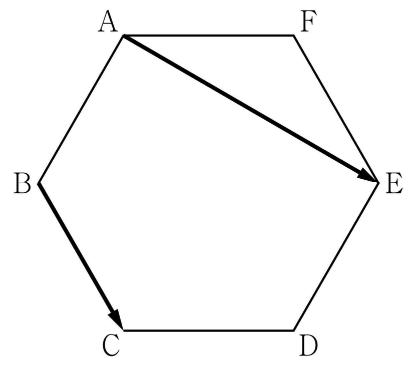
25. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\,2)$, $\mathrm{B}(-3,\,5)$에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?
(단, O는 원점이다.) [3점]

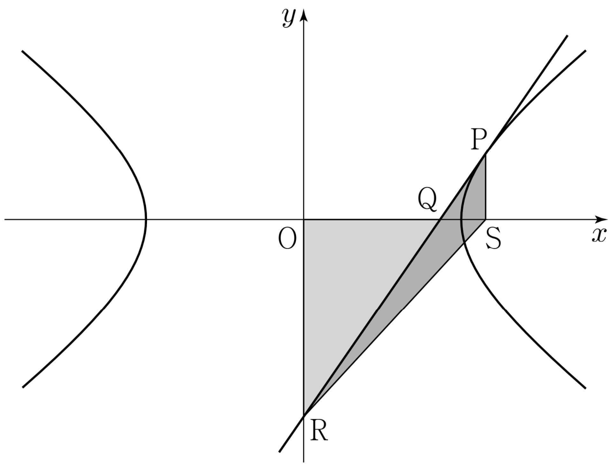
① 10π　② 12π　③ 14π　④ 16π　⑤ 18π

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\,k)\,(k>0)$ 에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\,0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9:4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]

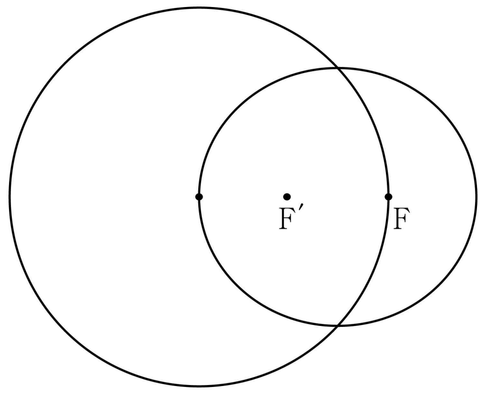


① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

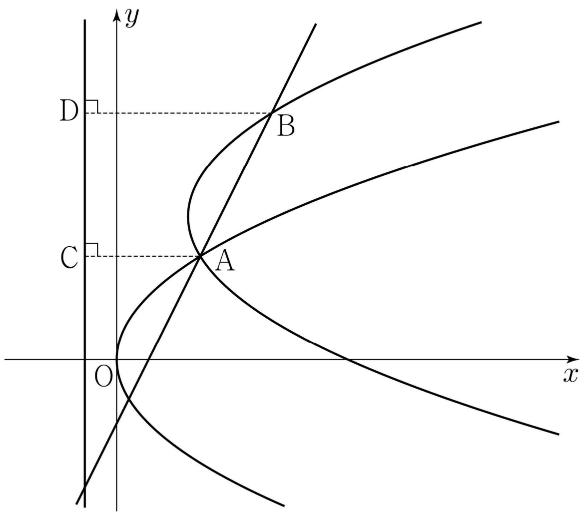
① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



단답형

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여
포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다.
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1=2, \quad a_2a_4=36$$

일 때, $\dfrac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

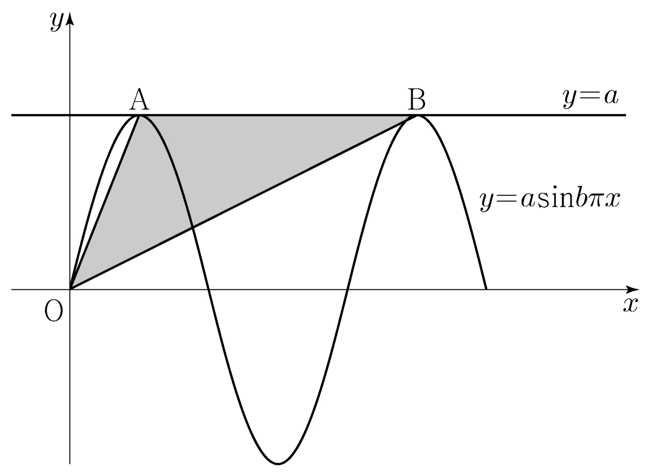
$$v(t) = -4t^3 + 12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y = a\sin b\pi x \left(0 \le x \le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

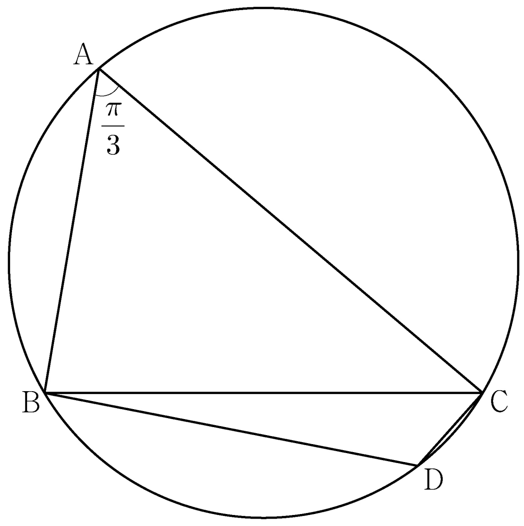
$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle \mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44　② 48　③ 52　④ 56　⑤ 60

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p = 1$일 때, $g'(1) = 0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

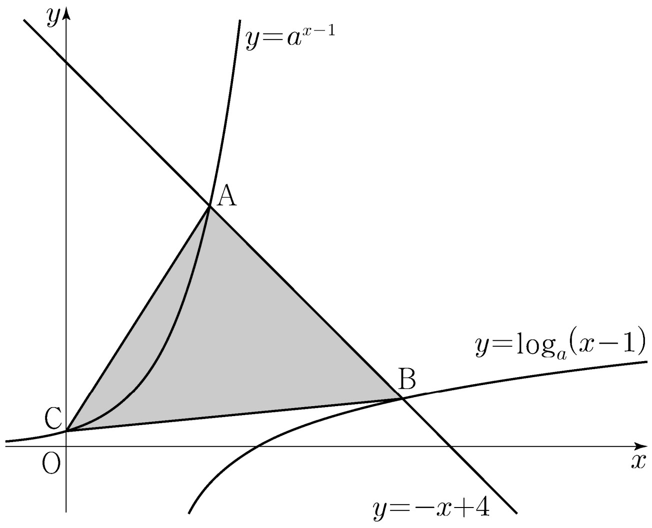
$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(3,\ 0,\ -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(0,\ 4,\ 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

25. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(3,\,0),\quad \vec{b}=(1,\,2),\quad \vec{c}=(4,\,2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

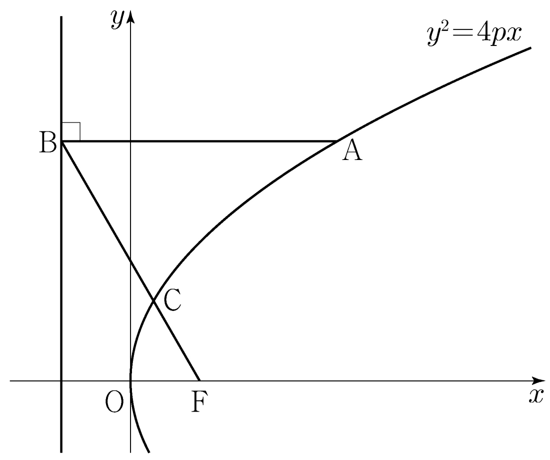
$$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{q}-\vec{c}|=1$$

을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

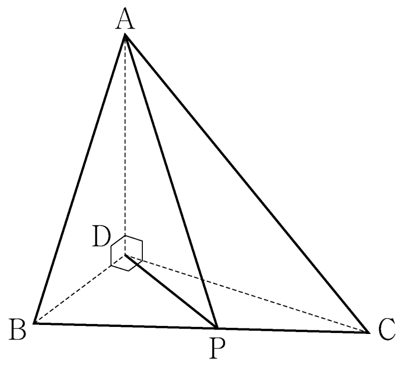
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}+3\overline{\mathrm{CF}}=6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

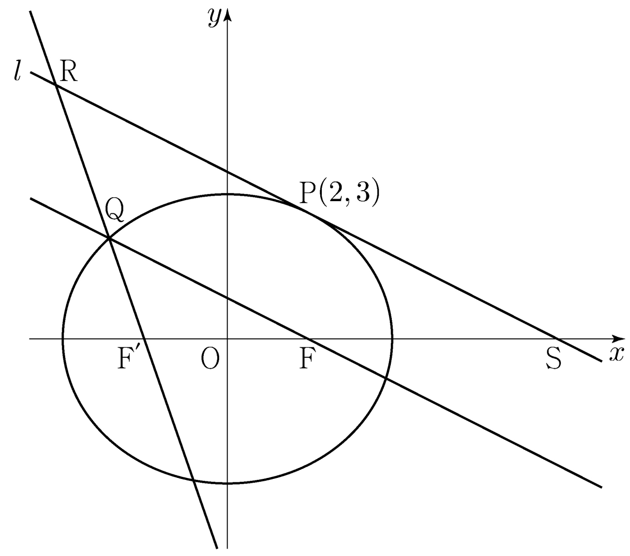


27. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{DB}}=2$, $\overline{\mathrm{DC}}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{DP}}$ 의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

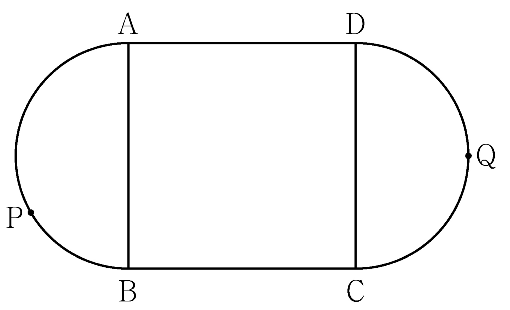
28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.
두 직선 F$'$Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이는? [4점]

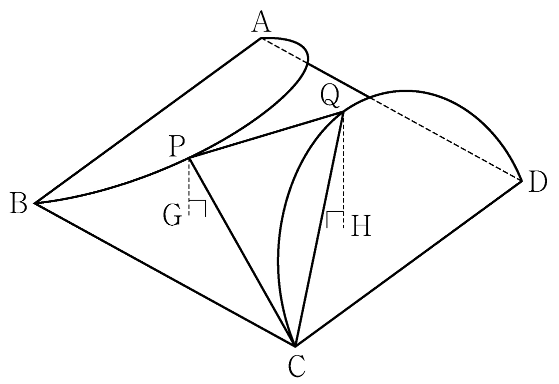


① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





30. 좌표평면에서 세 점 $\mathrm{A}(-3,1)$, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{C}(1,0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.
선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}_0}\ge1$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{X}}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)\,dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 5 : 12이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

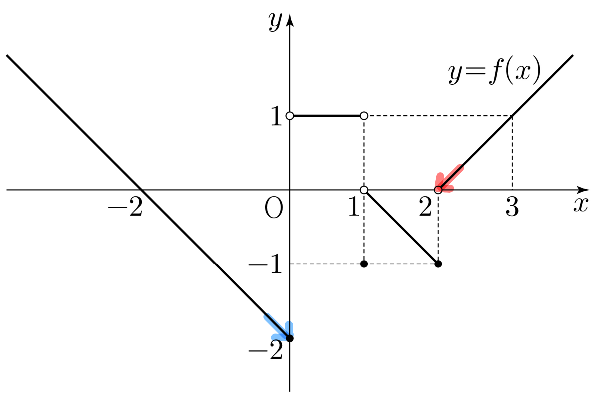
5 : 12이므로

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$ $k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ $\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

-2 0

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

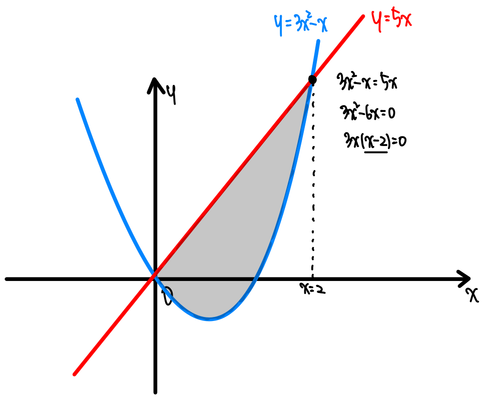
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0, \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

써보자.

좌극한 = 우극한 = 함숫값

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (-2x+6)^2=4x^2-24x+36 & (x<a) \\ (2x-a)^2=4x^2-4ax+a^2 & (x\geq a) \end{cases}$$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^-}4x^2-24x+36=4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^+}4x^2-4ax+a^2=4a^2-4a^2+a^2$

= 함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수항 → 짝수항 : 역수

짝수항 → 홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2} \longrightarrow a_{11}=2 \longrightarrow a_{10}=\frac{1}{4} \longrightarrow a_9=4$

4단계마다 반복

$\longrightarrow a_8=\frac{1}{2} \longrightarrow a_7=2$

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

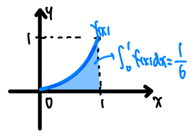
$1\times4<n<2\times5$

$4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$ $\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$ 가정



을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

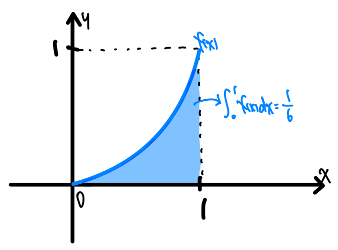
f(x)를 y축 대칭시키고 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1이동

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$ 이다.

g(x)의 주기가 2이다.

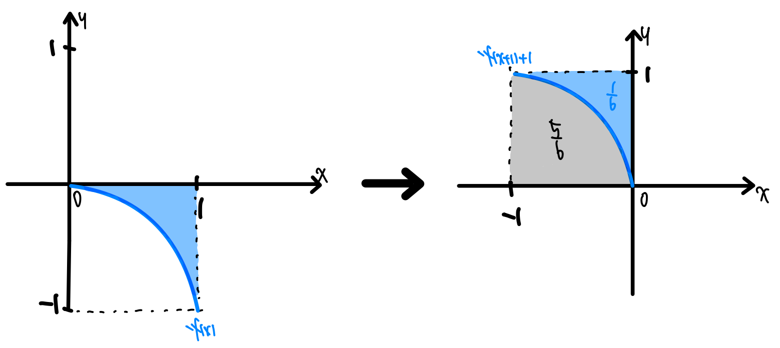
① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 f(x) 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.

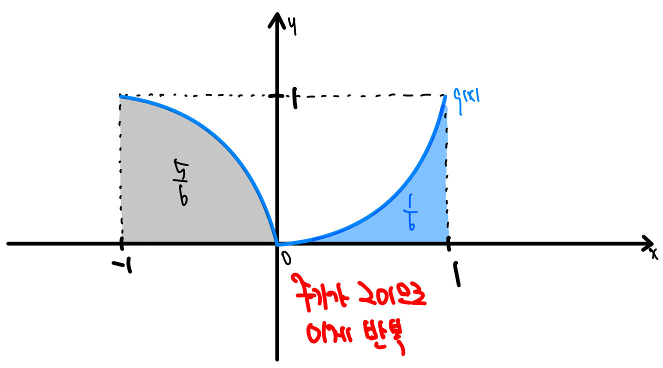


f(x) 로 이루어진 함수 g(x) 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

g(x) = -f(x+1)+1 평행이동시키면 된다.



그렇다면 g(x) 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{1}^{2} g(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

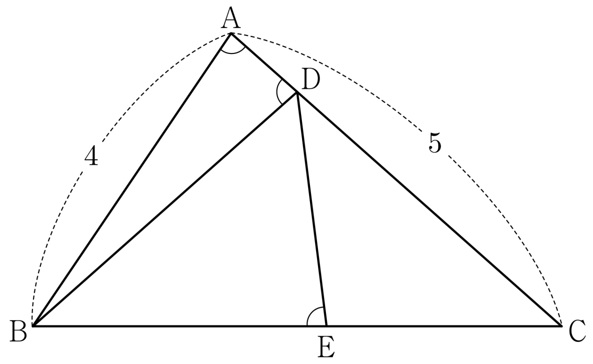
$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\cos(\angle BDA)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

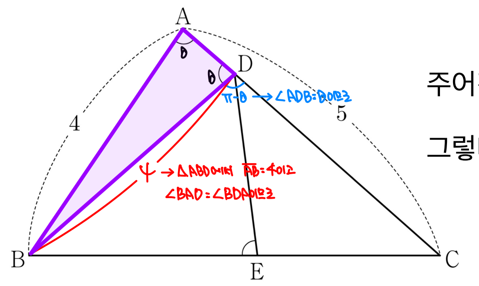
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

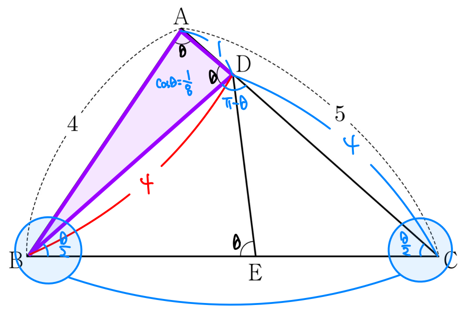
$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라고 하자. → $\cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



$\overline{BD}=\overline{DC}$ 이고 $\angle BDC=\pi-\theta$이므로

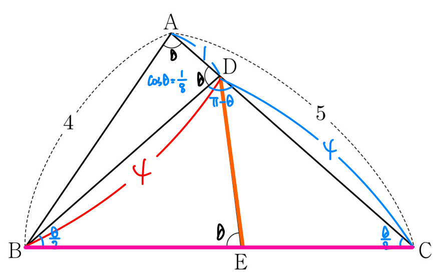
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

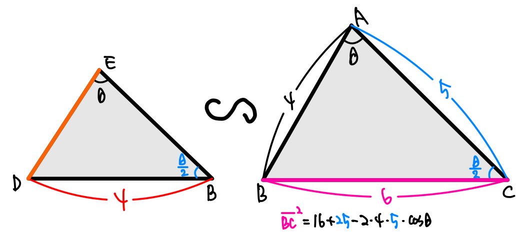
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA닮음 : $\angle DEB=\angle BAC$, $\angle EBD=\angle ACB$



$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=41-5=36$

$\overline{BC}=6$

닮음비가 $4:6=2:3$이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

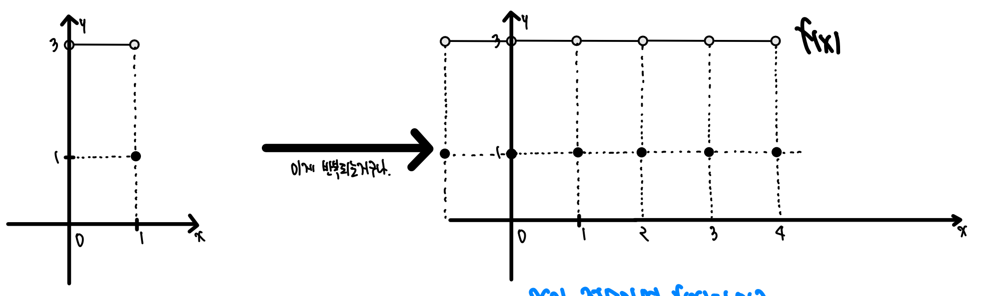
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

주기가 1인 함수다.

$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



(x가 정수라면 $f(x)=1$이고
x가 정수가 아니라면 $f(x)=3$이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot3+3\cdot3+\cdots+20\cdot3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$g(x)=\cdots$의 형태로 만든다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나온다

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$이므로 정리해보면 아래와 같다.

$$g(x)=\frac{|x|\cdot|f(x-p)+q|}{x}$$

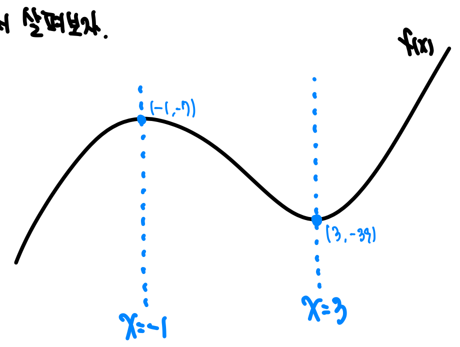
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐져 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

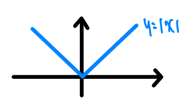
◦ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$
$=3(x+1)(x-3)$



$g(x)$의 식에서 $|x|$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

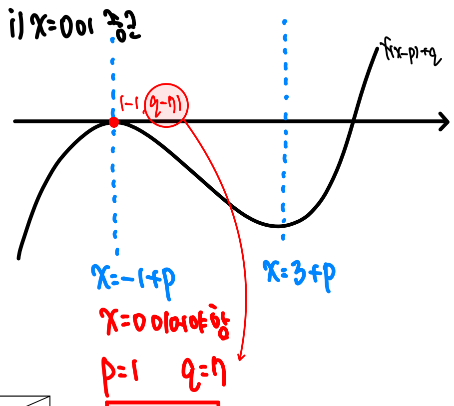
실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

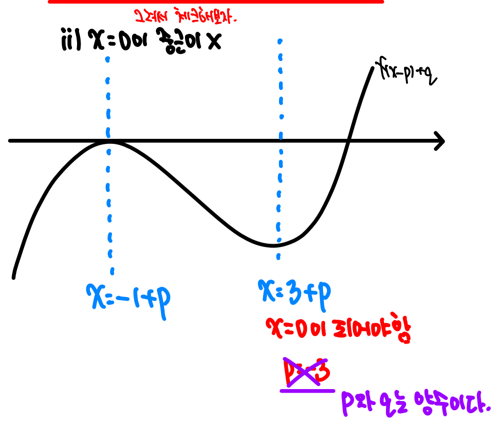
실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
하나는 중근을 가진다.
실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

그렇다면 $f(x-p)+q=0$은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.

그래서 체크해보자.





15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\underbrace{\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0}_{\sin\frac{\pi x}{2}=t \text{ or } \cos\frac{\pi x}{2}=t}$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

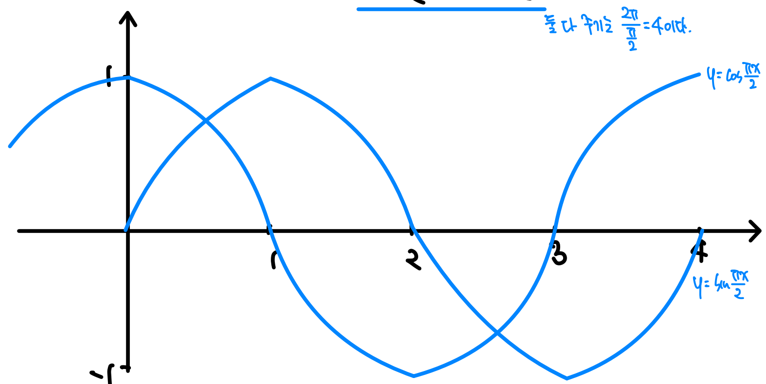
ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

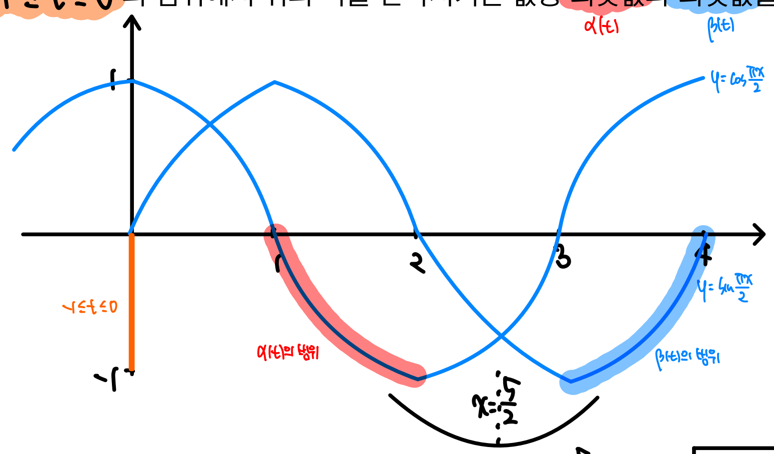
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$ 의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

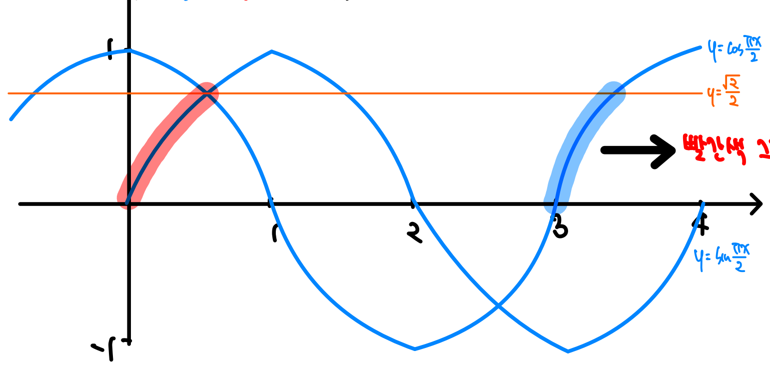
$\alpha(t)$ $\beta(t)$



$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x=\frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t)+\beta(t)=5\ (O)}$

ㄴ. $\beta(t)-\alpha(t)=\underset{3}{\beta(0)}-\underset{0}{\alpha(0)}=3$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

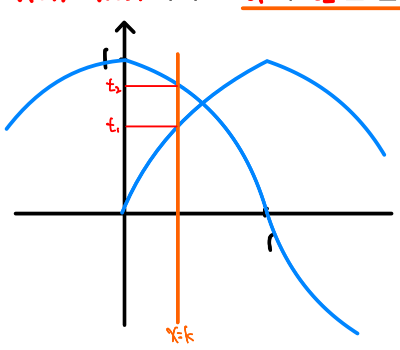
→ 두 값간의 거리가 3이다. $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ 빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다(O)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x=k$라고 하자.



$t_1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$ $t_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$

$t_2-t_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)=\frac{1}{2}$ 가정

$t_1 \cdot t_2=\frac{t_1^2+t_2^2-(t_1-t_2)^2}{2}=\frac{1-\frac{1}{4}}{2}=\boxed{\frac{3}{8}\ (X)}$

단답형

16. $\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

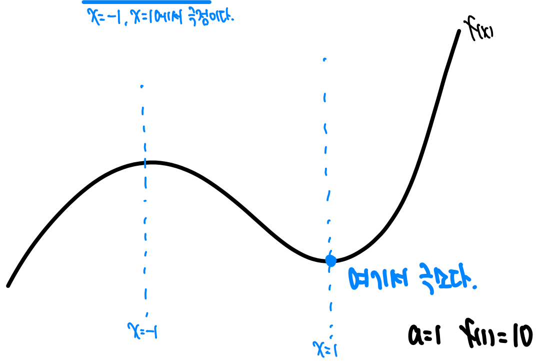
$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24=\log_4 16=\boxed{2}$

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a)=0$이고 도함수가 음→양

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$x=-1$, $x=1$에서 극점이다.



$a=1$ $f(1)=10$

$\boxed{a+f(a)=1+10=11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분

위치는 속도를 적분하면 된다.

$$\int v(t)\,dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해두자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$$

$$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \cancel{f(x) \cdot \{f(x)\}^4} - \cancel{\{f(x)\}^5}$$

$$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$x=a$ 말고는 부호변화 X

$\{f(t)\}^4 \geq 0$이므로

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3,\ x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$ 이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 볼 수 있다.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> 근 4개 중에 2개씩 중복
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면

실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.

실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$(x^n-64)f(x)=0 \longrightarrow$ 가능

n이 짝수라면 여기서 근 2개

이차식이므로 최대 2개

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급x

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> 실근 1개+중근 (α, β로 두자)
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> $x-f(x)=\alpha$ or β

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.

α와 β라고 하자.

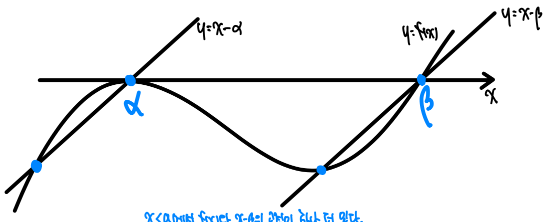
조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다.

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

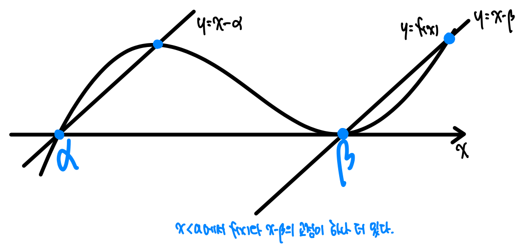
최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수



x<α에서 f(x)다 x-β의 교점이 하나 더 있다.

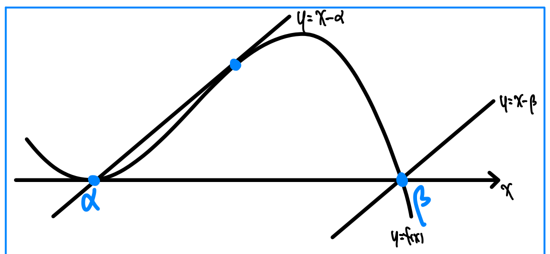
서로 다른 실근의 개수가 5개



x<α에서 f(x)다 x-β의 교점이 하나 더 있다.

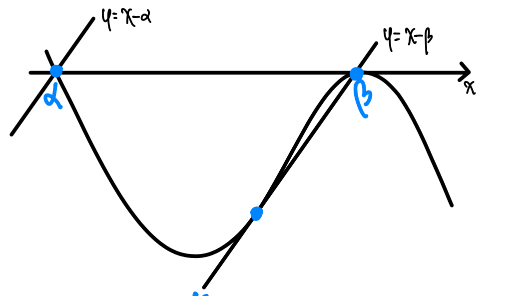
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



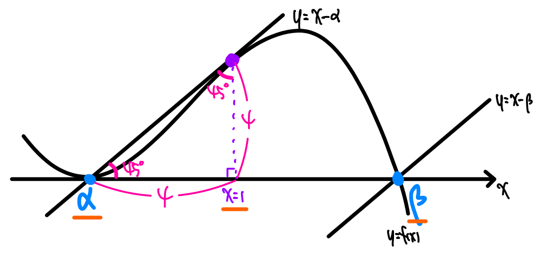
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 $(1,4)$이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 45°이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\quad\beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot16\cdot-4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot9^2\cdot-5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

서로 실수배이다.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$$\frac{k+3}{1}=\frac{3k-1}{1}$$

$$2k=4$$

$$\boxed{k=2}$$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

$$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y=1$$

$$\sqrt{2}y=-x+4$$

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$$

$\boxed{x\text{절편}=4}$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$\underbrace{|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|}_{=\overrightarrow{AP}\text{로 바꿀수 있다.}} = |\overrightarrow{AB}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?
점P의 자취를 찾아라.
(단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|$

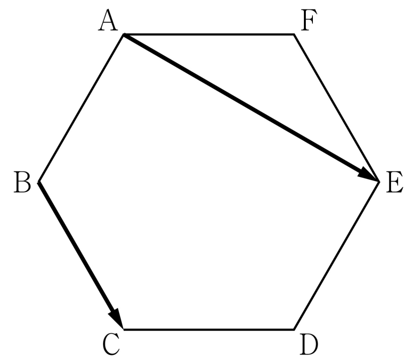
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 5$

→ 길이가 고정되었으므로 점 A를 중심으로 하고 반지름이 5인 원이다.

$\boxed{\text{원의 둘레} = 2 \times 5 \times \pi = 10\pi}$

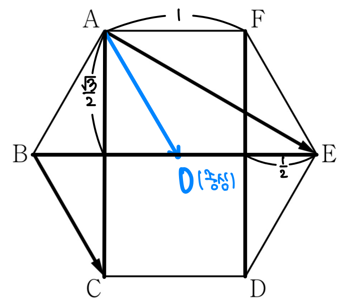
26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}$

평행이동하여
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$이다.



A를 원점이라고 생각하고 각각의 벡터를 정의해보면

$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AO} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

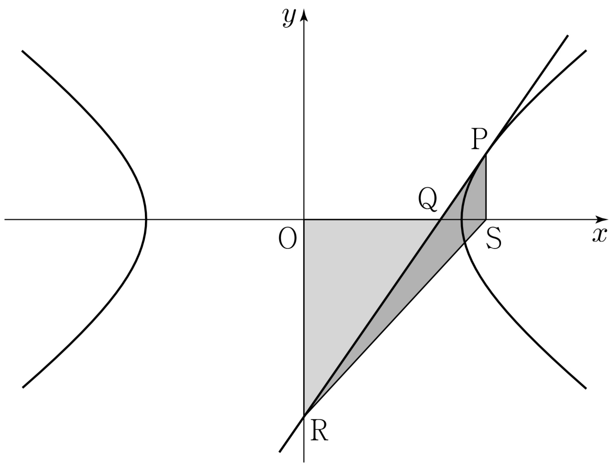
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO} = (2, -\sqrt{3})$

$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|$

$= \boxed{\sqrt{7}}$

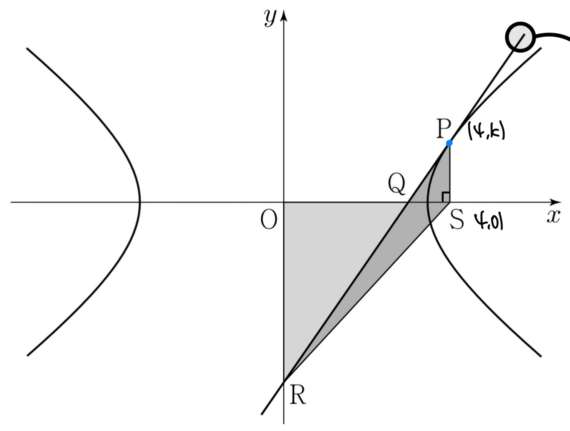
27. 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\,(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]

이게 중요한 듯



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

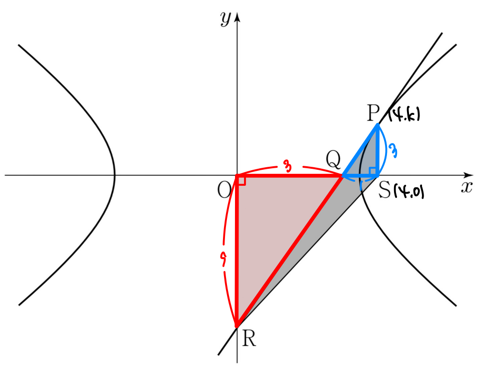
쌍곡선의 접선이 주어져있으므로 접선의 방정식부터 써보자.



(4,k)에서 접하므로 $\dfrac{4x}{a^2}-\dfrac{ky}{b^2}=1$

다시 그래프를 살펴보면 △OQR과 △SQP가 닮음이다.

두 삼각형의 닮음비를 t : 1 이라고 가정해보자.



쌍곡선의 방정식이 (3 , 0)을 지나므로

$\dfrac{1^2}{a^2}=1$

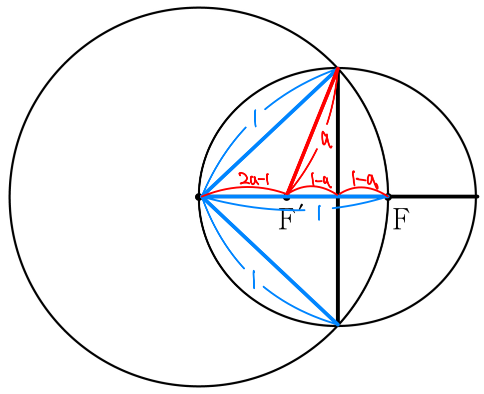
$a=2\sqrt{3}$

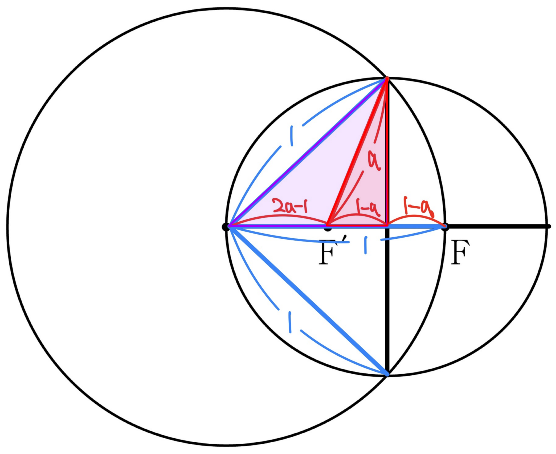
$\boxed{\text{주축}=2a=4\sqrt{3}}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$





보라색 삼각형과 빨간색 사각형에서

$1-a^2=a^2-(a-1)^2$

$1-a^2=2a-1$

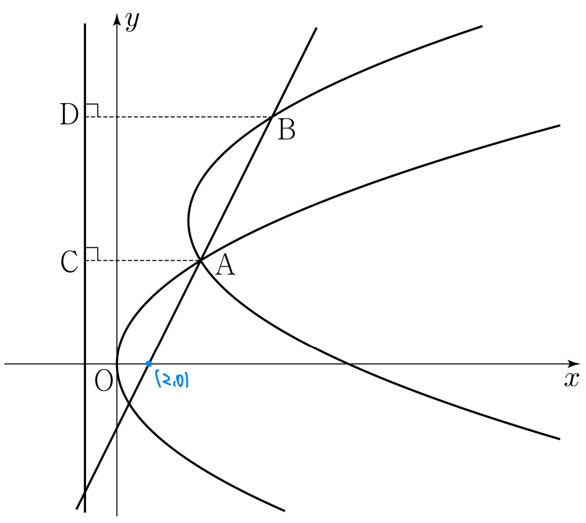
$a^2+2a-2=0$

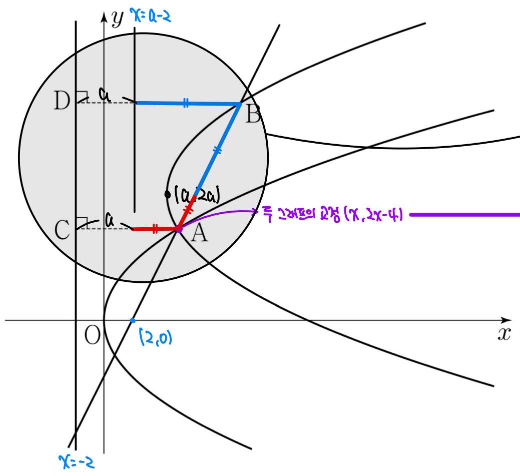
$\boxed{a=\sqrt{3}-1}$

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

$p=2$ (2,0)을 지난다.





$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=2a$

$\begin{cases}(2x-4)^2=8x\\(2x-4-2a)^2=8(x-a)\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-4x+4=2x \longrightarrow x^2-6x+4=0\\\{2(x-a)-4\}^2=8(x-a)\end{cases}$

두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2\sqrt{5}$

$\beta-\alpha=a=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=2a=4\sqrt{5}=k$

$\boxed{k^2=80}$

30. 좌표평면 위의 네 점 A$(2,0)$, B$(0,2)$, C$(-2,0)$, D$(0,-2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

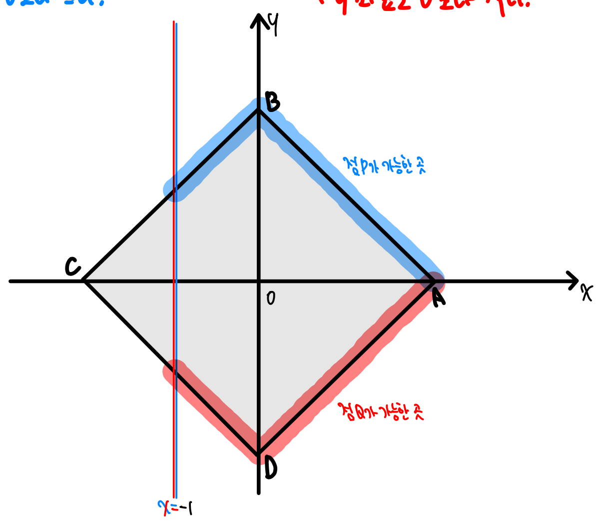
(가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 또는 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ → $\overrightarrow{PQ}$의 기울기는 1 또는 -1
(나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\ge-2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\ge0$이다.
P의 x좌표가 -1보다 커야한다. B의 y좌표가 0보다 크다.
(다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge-2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\le0$이다.
Q의 x좌표가 -1보다 크다. Q의 y좌표가 0보다 작다.

점 R$(4,4)$에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

조건 (가), (나), (다)에서 점 P와 점 Q의 좌표에 대한 힌트를 주니 정보를 추합하여 점의 위치의 후보들을 추려보자.

P: x좌표는 -1보다 크다. / y좌표는 0보다 크다.

Q: x좌표는 -1보다 크다. / y좌표는 0보다 작다.



점 P의 가능한 x좌표의 경우의 수로 나눠보자.
점P의 y좌표도 알 수 있다 → 점Q의 좌표도 알 수 있다.
a라고 하자

i) $-1\le a<0$
점P는 $y=x+2$ 위에 있으므로 $P(a, a+2)$이다.
점Q는 점P와 같이 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(a+2, a)$이다.

ii) $0\le a<1$
점P는 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $P(a, -a+2)$이다.
점Q는 점P와 같이 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(2, 0)$이다.

iii) $1\le a\le2$
점P는 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $P(a, -a+2)$이다.
점Q는 점P와 같이 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(a-2, -a)$ 또는 $Q(2, 0)$이다.

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\begin{cases}\text{i) } 2(a-2)(a-4)\\\text{ii) } 2a+16 \rightarrow a=0\text{일때 } m=16\\\text{iii) } \begin{cases}2a^2-4a+32\\2a+16 \rightarrow a=2\text{일때 } M=32\end{cases}\end{cases}$

$\boxed{32+16=48}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

$=3^{-\frac{1}{4}}$

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2. 함수 $f(x)=2x^3+4x+5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=6x^2+4$ $\boxed{f'(1)=10}$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

첫항을 a, 공비를 r 이라고 하자.

$a_1=2$, $a_2a_4=36$

$a=2$ $ar \times ar^3=36$

$a^2r^4=36$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$a^2r^4=36$

$a_1=2$

$4 \cdot r^4=36$

$r^4=9$

$\frac{a_7}{a_3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{r^6}}{\cancel{a} \cdot \cancel{r^2}} = \boxed{r^4=9}$ (r^4)

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x \le -1) \\ x^2-5x-a & (x > -1) \end{cases}$$

다항함수는 모두 연속

그렇다면 경계가 의심스러움

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

좌극한=우극한=함숫값

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

실수 전체의 집합에서 불연속이 의심되는 점은 단 하나이다.-> x=-1

나머지는 모두 다항함수이므로

그렇다면 x=-1에서의 좌극한, 우극한, 함숫값을 따져보자.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x+a = -2+a$

$f(1) = -2+a$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2-5x-a = 1+5-a = 6-a$

$-2+a=6-a$

$2a=8$

$\boxed{a=4}$

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

함수를 줬으니 구하자.

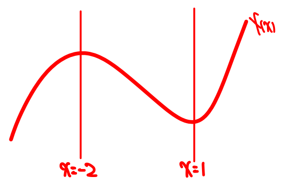
① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$

$=6(x+2)(x-1)$

$x=-2$에서 극대 $x=1$에서 극소



$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$

$\boxed{M+m=15}$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

각이 특이하다. 통분하자.

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta-\cancel{\sin\theta}+\sin^2\theta}{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{=\cos^2\theta}}$$

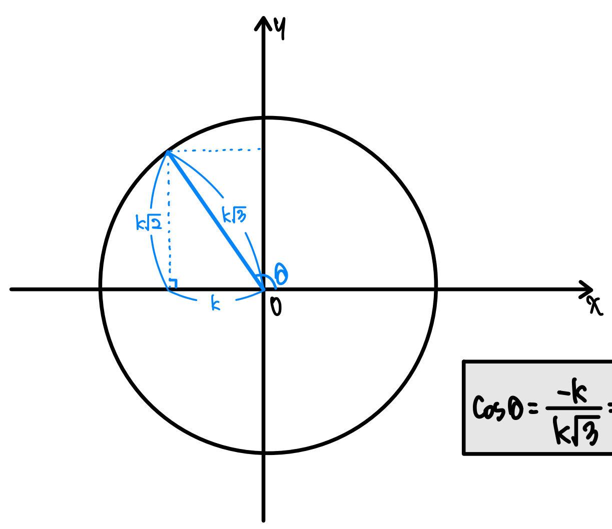
$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\cdot\tan^2\theta=4$$

$\tan^2\theta=2$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\tan\theta<0$

$\tan\theta=-\sqrt{2}$

이 각을 좌표평면에서 표현해보면 아래와 같다.



$\boxed{\cos\theta=\frac{-k}{k\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

첫항 주었다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

이걸 어떻게 해석할까?

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

수열 문제이고 주어진 수열을 잘 모르기에 일단 해보는 것이 맞는 선택이다.

그러나 이 문제의 경우의 수열의 일반항의 형태가 익숙한 형태이다.

그렇다면 일반항의 형태를 부분분수로 바꿔보자. 부분분수? $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

문제에서 물어본 것이 13번째 항이므로 n=12를 대입하여 계산해보자.

a_{n+1}이므로

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{-4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12}$$

$\boxed{a_{13}=-3}$

8. 삼차함수 $f(x)$가

최고차항의 계수는?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

$f'(0)=f'(1)=1$

f(x)는 x를 인수로 가진다. f(x)는 x-1을 인수로 가진다.

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

주어진 함수가 3차함수라는 조건은 주었으나 최고차항의 계수를 주지 않았으므로

최고차항의 계수를 미지수로 잡자

k라고 하자.

그리고 문제에서 준 조건들에 의해 f(x)는 x와 x-1을 인수로 가진다.

f(x)는 3차식이므로 마지막 하나의 인수를 x-p라고 하자.

$$f(x)=kx(x-1)(x-p)$$

문제 조건에 의해 f'(0)=f'(1)=1이므로 모두 계산해보자.

$f'(x)=k(x-1)(x-p)+kx(x-p)+kx(x-1)$

$f'(0)=k\cdot(-1)(-p)=kp$

$f'(1)=k\cdot 1\cdot(1-p)=k-kp$

$p=\frac{1}{2}$, $k=2$, $f(x)=2x(x-1)(x-\frac{1}{2})$

$\boxed{f(2)=2\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{\cancel{2}}=6}$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

적분하면 위치, 미분하면 가속도

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

미분해서 구하자.

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

시간을 매개로 하는 속도 식을 주었으므로

이 식을 미분하면-> 시간에 대한 가속도 식을 알 수 있고
이 식을 적분하면-> 시간에 대한 위치 식을 알 수 있다.

t=k일때 가속도가 12라고 하였으므로 가속도 식을 구해서 k를 구해보자.

$v(t)=-4t^3+12t^2$

$a(t)=-12t^2+24t=12$

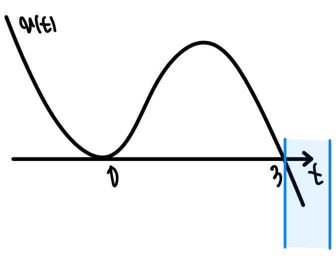
$t=1$

그렇다면 우리가 구해야하는 것은

t=3 ~ t=4에서 움직인 거리이므로 점 P의 움직임을 파악하고 거리를 구해주자.

속도를 통해 파악

$v(t)=-4t^2(t-3)$



t=3~4에서는 운동 방향 변화 X

위치

$x(t)=\int v(t)\,dt=-t^4+4t^3+C$

$\boxed{|x(4)-x(3)|=27}$

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이

특이하게 조건이 붙네

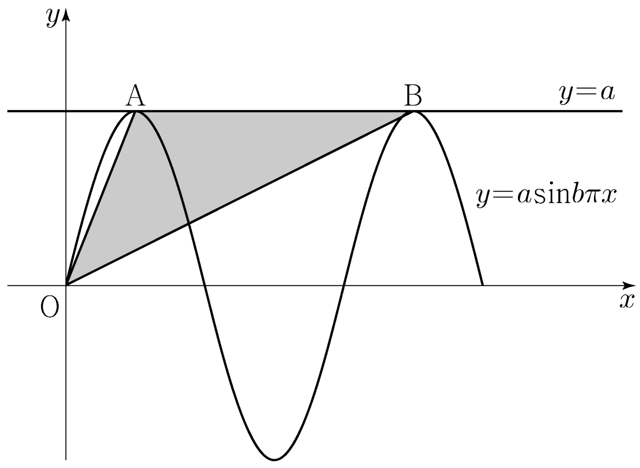
직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은?

$\overline{AB}$를 밑변으로

점 A와 B를 구하자.

(단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



문제 초반에서 미지수 a, b가 양수라는 준 것을 인지하고 시작하자.

문제에서 준 조건은 크게 두 가지로 보인다.

1. 삼각형 OAB의 넓이=5 2. 직선 OA의 기울기 * 직선 OB의 기울기=$\frac{5}{4}$

첫 번째 조건을 풀기 위한 삼각형의 높이가 a로 주어져있으므로 1번 조건 먼저 해보자.

삼각형 OAB에서 밑변을 선분AB, 높이를 a라고 하자.

선분 AB의 길이가 필요하므로 주어진 함수의 주기를 구해보자.

$\overline{AB}$가 함수의 한 주기이므로

$y=a\sin b\pi x$

→ 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{b}$이다. 그렇다면 $\overline{AB}=\frac{2}{b}$이다.

$\triangle OAB=\overline{AB}\times a\times\frac{1}{2}=\frac{\cancel{2}}{b}\times a\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{a}{b}=5$

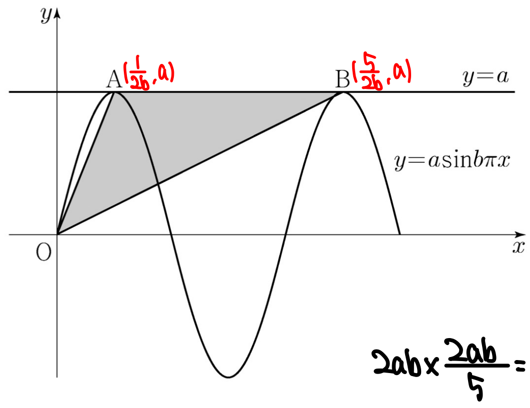
$a=5b$

두 번째 조건을 위해서는 점 A와 점 B의 좌표가 필요하다.

우리가 함수의 주기까지 구해놨으므로 각 점의 좌표를 쓸 수 있다.

점A의 x좌표는 주기의 $\frac{1}{4}$이고

점B의 x좌표는 주기의 $\frac{5}{4}$이다.



$\overline{OA}$의 기울기$=\frac{a}{\frac{1}{2b}}=2ab$

$\overline{OB}$의 기울기$=\frac{a}{\frac{5}{2b}}=\frac{2}{5}ab$

$2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{5}{4}$

$\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$ab=\frac{5}{4}$

a=5b이므로 → $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\boxed{a+b=3}$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

자세한 정보는 X

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$$

x=1 대입 → 그렇다면 0이 된다.
x에 대해 미분 → f(x)로 정리 가능

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$ 일 때, $a + f(3)$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

주어진 식에 있는 적분을 해결하는 방법은 두 가지이다.

1. x=1을 대입한다.
2.주어진 식을 x에 대해 미분한다.

둘 다 해보자.

1. x=1 대입

$f(1) = 2 + a + 3a + \underbrace{\int_1^1 f(x)dx}_{=0}$

$f(1) = 2 + 4a$

→ 다른 방식으로 $f(1)$을 표현할 수 있을까? → 주어진 식에 0을 대입해보자.

$= \int_0^1 f(x)dx$라도

$0 \times f(0) = 0 + 0 + 3a + \int_1^0 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt = 3a$

$f(1) = \int_0^1 f(t)dt$이므로 $2 + 4a = 3a$

$a = -2$ $f(1) = \int_0^1 f(t)dt = -6$

2. 식을 x에 대하여 미분

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$

$\cancel{f(x)} + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + \cancel{f(x)}$

$f'(x) = 6x - 4$

$f(x) = 3x^2 - 4x + C$

$f(1) = -6$이므로 $C = -5$

$f(x) = 3x^2 - 4x - 5$

$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$

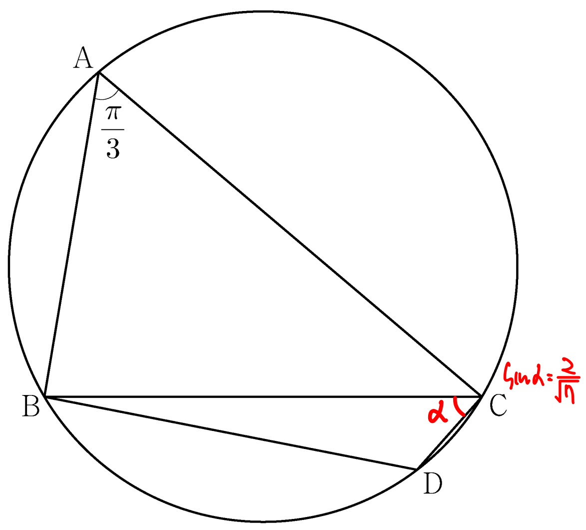
$\boxed{a + f(3) = -2 + 10 = 8}$

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은? [4점]

혹시 sin 법칙?

유일하게 정보를 준 각이므로
쓰기 쉽게 $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$이라고 하자.

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



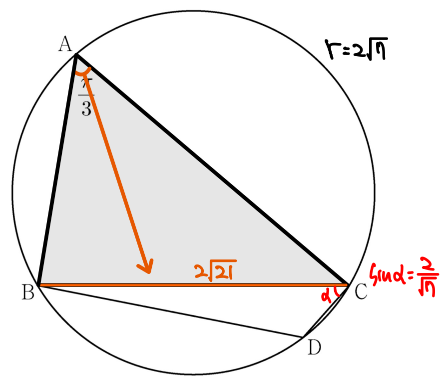
문제 첫 줄에서 원의 반지름을 주었고 그 원이 모든 삼각형을 외접하므로

sin 법칙을 쓸 것이라는 의심을 하고 시작하자.

우리가 구해야하는 것은 선분 BD와 선분 CD이다.

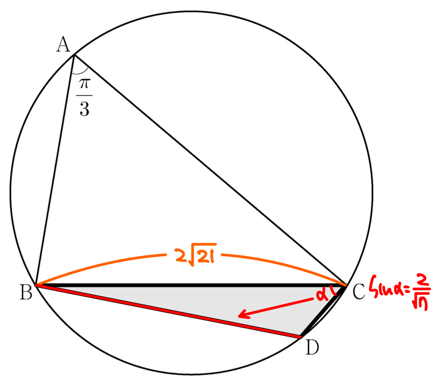
△ABC에서 sin 법칙을 써서 BC를 구해보자. 아직 자세하게는 모르겠지만 △BCD에서 처리되지 않을까?

우선 먼저 구할 수 있는 선분 BD부터 구해보자.



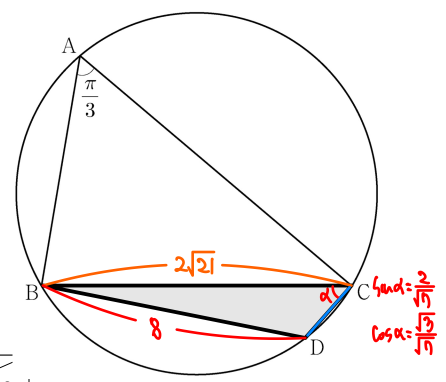
△ABC에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times 2\sqrt{7}$

$\overline{BC} = 4\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}$



△BCD에서 $\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BD}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 2 \times 2\sqrt{7}$

$\overline{BD} = 4\sqrt{7} \times \frac{2}{\sqrt{7}} = 8$



△BCD에서 $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\alpha = \overline{BD}^2$

$4\cdot 21 + \overline{CD}^2 - 2\cdot 2\sqrt{21}\cdot\overline{CD}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \overline{BD}^2$

$84 + \overline{CD}^2 - 12\cdot\overline{CD} = 64$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x = \overline{CD} = 2$

$\boxed{\overline{BD} + \overline{CD} = 10}$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

많은 정보를 줌

왜 굳이 자연수라고 했을까?

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

등차수열이니까 a_m과 a_{m+3}은 부호가 달라야함

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

a_n이 양수로 바뀌기 전까지

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

문제에서의 수열이 등차수열이라는 것도 주었고 첫 항마저 주었다.

$a_1 = -45$

그렇다면 문제는 공차에 있다는 것으로 보인다.(+공차는 자연수이므로 양수이다)

$d>0$

조건 (가)에서 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같다는 내용을 주었다.

기본적으로 수열 a_n이 공차가 양수인 등차수열이므로 n이 커짐에 따라 수열은 커진다.

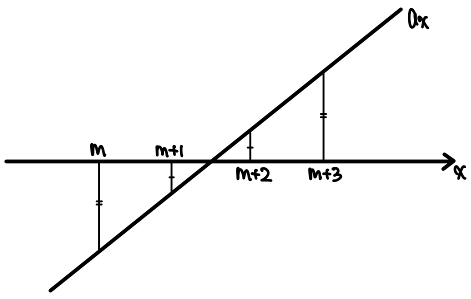
$a_m < a_{m+3}$

그런데 m번째 항과 m+3번째 항의 절댓값이 같으려면

a_m이 음수이고 a_{m+3}이 양수가 되면서 절댓값이 같아야 한다.

$a_m = -a_{m+3}$

등차수열은 일차함수로 나타낼 수 있으므로 이를 그래프로 그려보면 아래와 같다.



$$a_m + a_{m+3} = \{-45+(m-1)d\} + \{-45+(m+2)d\}$$

$$= -90 + (2m+1)d = 0$$ $a_m = -a_{m+3}$이므로

$$\underbrace{(2m+1)}_{\text{m이 자연수이므로 짝수}}\underbrace{d}_{\text{그렇다면 90의 약수 중 짝수}} = 90$$

d의 후보 = 2, 6, 10, 18, 30

조건 (나)를 해석해보자면 수열 a_n이 계속 증가하는 수열이고

그래프를 활용해보면 m+1번째 항까지 음수이므로 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k > -100$이 성립되어야 한다.

등차수열의 합이니 식으로 써볼 수 있다.

(평균 x항의 개수)

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1)$$

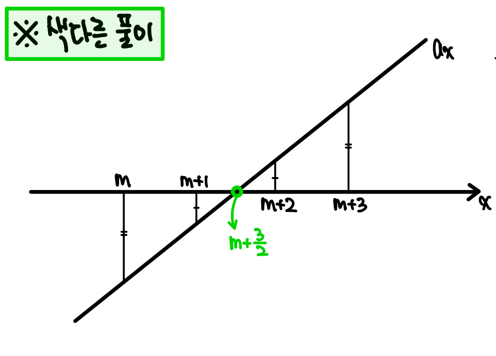
$$= \frac{-45 + \{-45 + m \cdot d\}}{2} \times (m+1) > -100$$

$$(-90 + m \cdot d) \times (m+1) > -200$$

이 식을 만족시키는 d는 18, 30이다.

$\boxed{18+30=48}$

※ 색다른 풀이



위의 상황은 전 풀이와 같고 그래프에서부터 보면

$m+\frac{3}{2}$번째 항에서는 0이 되어야 한다.

$a_{m+\frac{3}{2}} = 0$

그렇다면 m+1항과 m+2항을 아래와 같이 써보자.

$$a_{m+1} = -\frac{d}{2}, \quad a_{m+2} = \frac{d}{2}$$

그렇다면 이를 이용하여 수열의 합을 나타내보자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_1 + a_{m+1}}{2} \times (m+1) = \frac{-45 - \frac{d}{2}}{2} \times (m+1) > -100$$

$$\left(-45 - \frac{d}{2}\right) \times (m+1) > -200$$

$$\left(45 + \frac{d}{2}\right) \times (m+1) < 200$$

d는 짝수이어야 함

m=4이면 d가 0이더라도 성립하지 않으므로 m=1, 2, 3

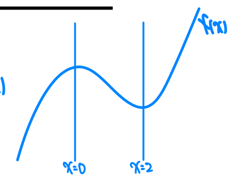
- m=1 → d=30
- m=2 → d=18
- ~~m=3 → d=$\frac{50}{7}$~~

$\boxed{18+30=48}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$f'(x) = 3x(x-2)$

신경쓰자.



$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다. O

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다. O

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다. O

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

바로 전 6월 시험에서 14번의 난도가 높았기에 이 문제 역시도 보기를 보기 전에

조금의 사전정보를 얻고 가도록 하자.

함수 $f(x)$는 x축과의 위치만을 제외한 모든 것을 주었다.

상수항을 제외한 식, 그래프 개형

결국 $g(x)$가 문제이다. 최대한 해석해보자.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \underbrace{f(0)}_{\text{적분상수 } C} & (x \le 0) \\ \underbrace{f(x+p)}_{f(x)\text{를 } x\text{축 방향으로 } -p\text{만큼 평행이동}} - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

$(x \le 0)$ → $f(x)$를 C만큼 내린다. = 상수항을 없앤다. → $x^3 - 3x^2$

$(x > 0)$ → 적분상수끼리 처리가 된다. = 상수항을 없앤다. = 원점을 지난다.

→ $f(x)$에서 $x \ge p$의 부분을 떼어서 (0, 0)에 붙인다.

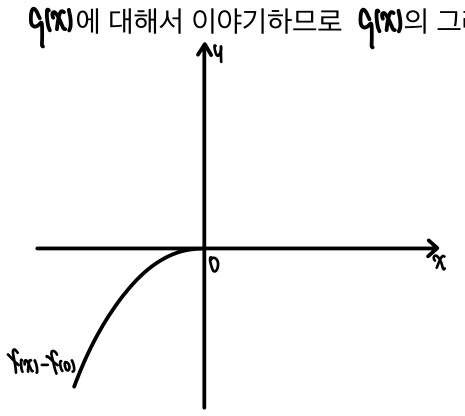
ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+1) - f(1) & (x > 0) \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x \le 0) \\ f'(x+1) & (x > 0) \end{cases}$$

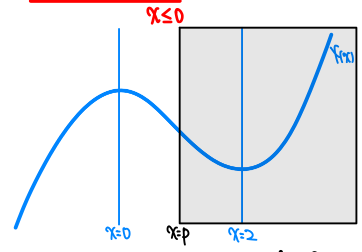
$g'(1) = f'(1+1) = f'(2) = 0$ (O)

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

$g(x)$에 대해서 이야기하므로 $g(x)$의 그래프를 정해진 부분만 그려보자.



$x \le 0$



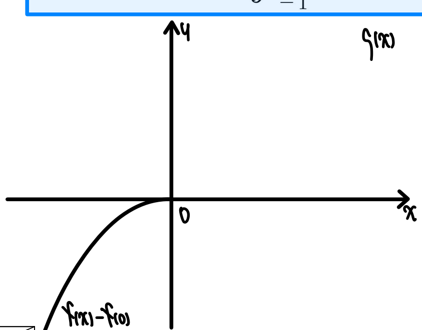
이렇게 분리해서 g(x)의 x>0 부분에 넣는다.

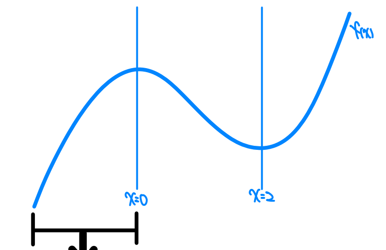
$g(x)$가 미분가능이기 위해서는 $\lim_{x \to p} f'(x) = 0$이어야 한다.

연속은 식에서 이미 전제되어 있으므로 미분계수만 맞추면 된다.

이를 만족시키는 양수 p는 2 뿐이다. (O)

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.





여기가 g(x)의 x<0 부분과 동일한 모양이다.

$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이려면 'g(x)(x>0)의 증가율'이 'g(x)(x<0)의 증가율'보다 커야한다.

$p \ge 2$에서의 $f(p)$의 증가율은 $p<0$에서의 $f(p)$의 증가율보다 크므로 맞는 선지이다. (O)

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\underbrace{a_5 + a_6 = 0}_{a_5=-a_6}$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

✓① $\frac{9}{2}$　　② 5　　③ $\frac{11}{2}$　　④ 6　　⑤ $\frac{13}{2}$

수열 문제가 킬러 위치에 존재한다는 것은 어느 정도는 직접 해봐야 한다는 이야기이다.

수열 또한 익숙한 친구는 아니므로 직접 해봐야하나 문제는 그 부분이 아니라

‘어디부터 시작하는가’ 로 보인다.

문제에서 유일하게 준 조건이 $a_5+a_6=0$이므로 6번째 항부터 역추적해보자.

$$a_6 = \begin{cases} -2a_5-2 \rightarrow \cancel{a_5=-2} \\ a_5 \rightarrow a_5=0 = \begin{cases} -2a_4-2 \rightarrow \boxed{a_4=-1} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{1}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=-1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{3}{2} \end{cases} \\ a_4 \rightarrow \boxed{a_4=0} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow \boxed{a_3=-1} \\ a_3 \rightarrow \boxed{a_3=0} \\ -2a_3+2 \rightarrow \boxed{a_3=1} \end{cases} \\ -2a_4+2 \rightarrow \boxed{a_4=1} = \begin{cases} -2a_3-2 \rightarrow a_3=-\frac{3}{2} \\ a_3 \rightarrow a_3=1 \\ -2a_3+2 \rightarrow a_3=\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \\ -2a_5+2 \rightarrow \cancel{a_5=2} \end{cases}$$

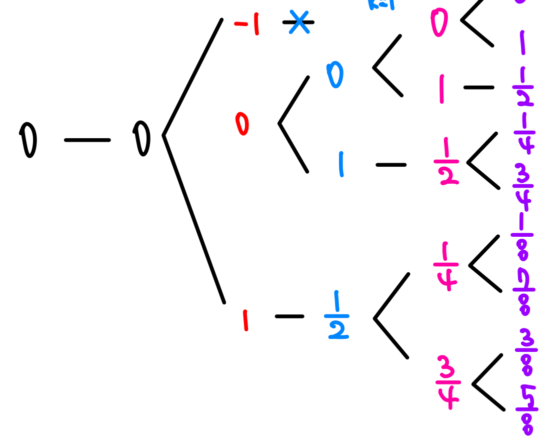
파란색 부분이 반복되는 것이 보이므로 이를 일반화해서 도식화해보자.

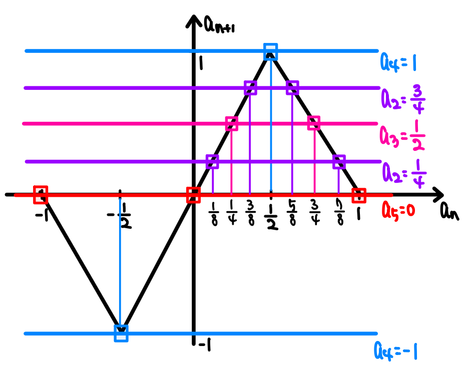
이를 하는데 있어서 수열을 일차식으로 볼 수 있으므로 그래프도 활용해보자.

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n-2 \\ 2a_n \\ -2a_n+2 \end{cases}$$

a_6　　a_5　　a_4　　a_3　　a_2　　a_1

a_{n+1}이 -1이려면 a_n은 무조건 $-\frac{1}{2}$이어야 한다. $\rightarrow \sum_{k=1}^{5} a_k < 0$





직접 구한 첫째 항들이 모두 조건을 만족시키므로 더해서 답을 내자.

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$$

단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 4 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $\underbrace{f(0) = 3}_{\text{적분상수?}}$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int f'(x)\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 7x + C = f(x)$

$f(0)=3$이므로

$C = f(0) = 3$

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$

$\boxed{f(1) = 2-4+7+3 = 5}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2\cdot\sum_{k=1}^{10} b_k = 45$ $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$=\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{10} b_k - \frac{1}{2}\times 10$

구해야하는 값의 식을 보기 쉽게 처리해보자.

$$\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{10} b_k - \frac{1}{2}\times 10 = \sum_{k=1}^{10} b_k - 5$$

그렇다면 $\sum_{k=1}^{10} b_k$를 구하면 되겠다! -> 위에서 준 두 식을 연립하자.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2\cdot\sum_{k=1}^{10} b_k = 45$$
$$-\ \ \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$$
$$3\cdot\sum_{k=1}^{10} b_k = 42$$
$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 14$$

$\boxed{\sum_{k=1}^{10} b_k - 5 = 9}$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$ $f'(a)=3a^2-12a+5$ 세제한 조건 다 구하기 or 근과 계수

문제에서 주어진 것과 같이

함수 $f(x)$에서 0~4에서의 평균변화율과 $f'(a)$를 계산하자.

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-12}{4}=-3$ $f'(a)=3a^2-12a+5$

$$-3=3a^2-12a+5$$

$0=3a^2-12a+8$ → 이걸 만족시키려면 $0<a<4$도 만족

이 식의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $\boxed{\frac{8}{3}}$이다. $\boxed{p+q=11}$

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

구간을 나눠야할듯

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

함수의 식은 줬지만 문제에서 가장 중요한 식이 절댓값에 엮여있다. 구간 나누기 or 제곱

절댓값을 처리하기 위해 안에 들어있는 것의 부호를 경우의 수로 나눠보자.

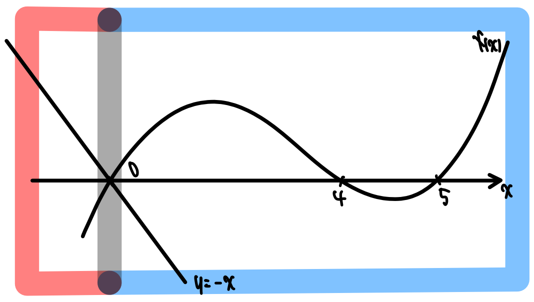
$f(x)+x$

$$\begin{cases} -x=6x+k & (f(x)<-x) \\ 2f(x)+x=6x+k & (f(x)>-x) \end{cases}$$

f(x)와 -x의 대소관계에 의해 식이 결정되므로 두 그래프를 그려서 비교해보자.

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+20)$

$=\frac{1}{2}x(x-4)(x-5)$



① $f(x)<-x$

$7x=-k$

$x=-\frac{k}{7}$ → k가 자연수가 되어야 $x<0$

여기서 실근 하나가 무조건 생기네!

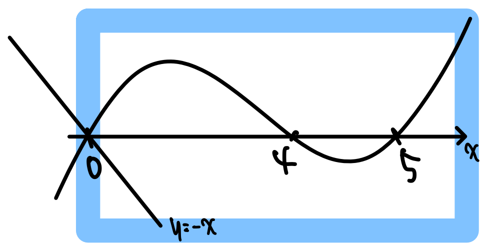
② $f(x)>-x$

$2f(x)=5x+k$

$x^3-9x^2+20x=5x+k$

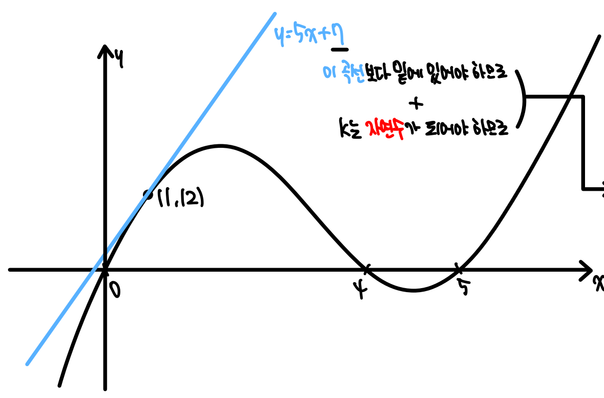
$x(x^2-9x+20)=5x+k$

$x(x-4)(x-5)=5x+k$



여기서 나머지 3개의 근이 생겨야함

5x+k가 접하는 것들을 경계로 보자.



→ $k=1,2,3,4,5,6$

$\boxed{1+2+3+4+5+6=21}$

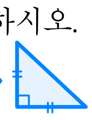
21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

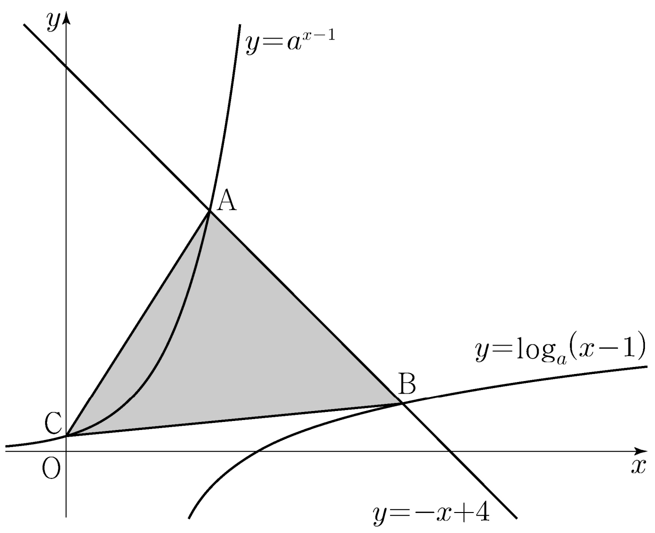
$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

익숙한 꼴의 낯설음

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]

이런 형태일 듯?





개념 공부를 조금이라도 한 학생이라면 문제의 두 식을 보고 이 생각을 할 것 같다.

'역함수'-> 역시 ㅋㅋ 내가 아는 한도 내에서만 나오지->근데 왜 쉽게 안되냐..?

문제에서의 두 식은 서로 역함수가 아니니까.

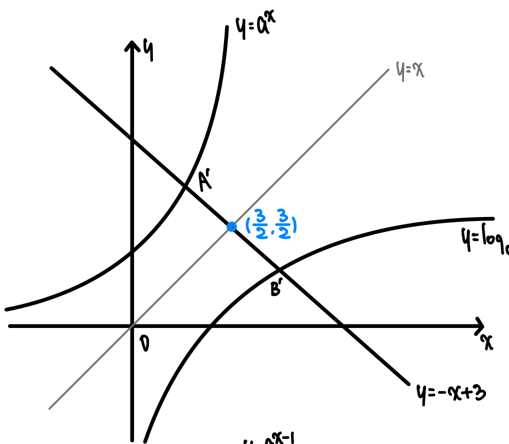
이 문제가 단순한 한 번의 계산으로만 처리되지 않는 이유는

그래프의 평행이동이 있기 때문이다.

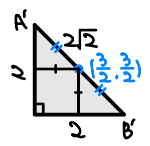
역함수인 상황이 우리에게 익숙한 이유는 사용하기 쉬운 식인 y=x 대칭이기 때문이다.

그렇다면 좌표평면의 모든 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동 시켜서 보자.

$a^{x-1}\rightarrow a^x$ $\quad\log_a(x-1)\rightarrow\log_a x$ $\quad -x+4\rightarrow -x+3$

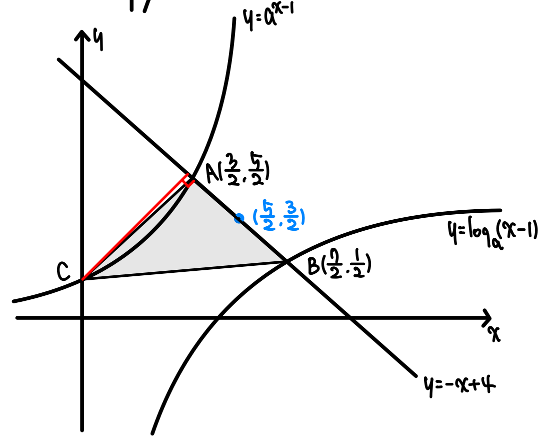


$\overline{A'B'}=2\sqrt{2}$이고 직선 A'B'의 기울기가 -1이므로



그렇다면 A'와 B'의 좌표는 $A'(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$, $B'(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$이다.

문제를 풀기 위해 다시 모든 그래프를 x축 방향으로 1만큼 이동시키자.



△ABC의 넓이를 위해서는

점 C와 직선 AB 사이의 거리가 필요하다.

선분 AB의 길이를 구했으니 이를 밑변으로 사용하자.

점 C의 좌표를 구하기 위해 $y=a^x$의 a를 구해보자.

→점 A를 지나므로 대입

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{25}{4}\rightarrow y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}\rightarrow C\left(0,\frac{4}{25}\right)$$

직선 AB와 점 C 사이의 거리 $=\dfrac{\left|-\frac{4}{25}+4\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25\sqrt{2}}$

$$\triangle ABC=\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{96}{25\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{96}{25}=S$$

$\boxed{50S=192}$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

차수에 계수까지 줬다면 많이 줬다.

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\rightarrow 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

미분계수인가?

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> 불연속이 가능한 점을 체크하자.
>
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.
>
> 대칭적인 형태가 나오면 계산?

문제 발문 초반에 함수 f(x)의 최고차항과 최고차항의 계수가 1이라는 것을 준 것은 큰 힌트다.

대부분의 킬러 문제들이 인수를 중요하게 여기는데

함수를 추적하는데 있어서 중요한 최고차항과 항의 개수를 준 것이다.

조건 (가)부터 살펴보자.

함수 g(x)가 연속이라는 조건이 있으므로 불연속 후보를 찾아보자.

$$g(x)=\underbrace{f(x-3)}_{\text{이미 실수 전체에서 연속이다.}}\times\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$2\times|f(x)|$의 미분계수라고 생각할 수 있다. $=2\times\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{2h}$

그렇다면 $|f(x)|$의 미분계수가 불연속이기 위해서는

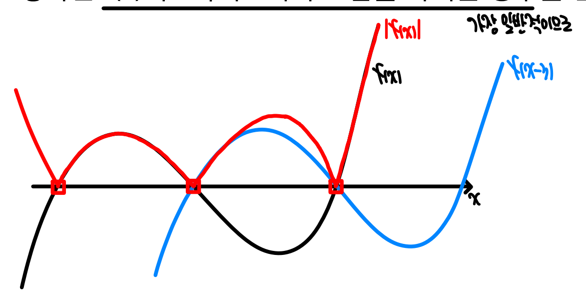
그래프를 그렸을 때 첨점이 생겨야 한다.

→이 점을 연속으로 만들어야 한다.

이 점에서 $f(x-3)=0$이라면? → $g(x)$에서 이 점은 연속이다.

그렇다면 f(x)와 x축이 3개의 교점을 가지는 경우를 먼저 살펴보자.

가장 일반적이므로



$|f(x)|$는 3개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

g(x)의 입장에서 불연속점

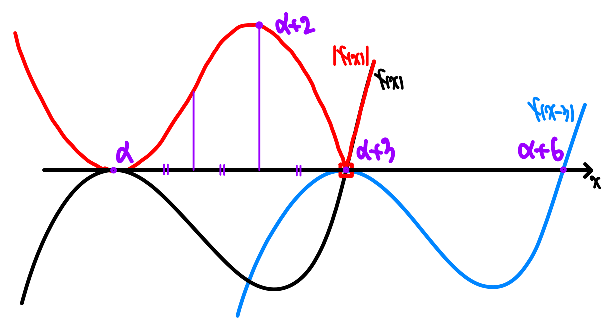
이 점들을 g(x)에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 모두 지나야한다.

→f(x)를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨

$f(x-3)$은 □ 부분을 모두 지날 수 없다. ⊗

그렇다면 f(x)가 x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서는 교점을 가지는 경우를 보자.



$|f(x)|$는 1개의 □ 부분에서 첨점을 가진다.

g(x)의 입장에서 불연속점

이 점들을 g(x)에서 연속이 되게 하기 위해서는

$f(x-3)$이 □ 부분을 지나야한다.

→f(x)를 x축 방향으로 3만큼 이동시킨 $f(x-3)$이므로

$|f(x)|$의 □ 부분에 $f(x-3)$의 접하는 부분이 있어야 한다.

그렇다면 f(x)에서 접점과 교점의 x좌표 차이가 3이다.

이를 기반으로 교점들을 정리해보자.

조건 (나)에서 $g(x)=0$이 되려면 $f(x-3)=0$ 또는 $\lim_{h\rightarrow 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=0$이어야 한다. → $\alpha,\ \alpha+2,\ \alpha+3,\ \alpha+6$

$\alpha+(\alpha+2)+(\alpha+3)+(\alpha+6)=4\alpha+11=7$

$\alpha=-1$

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\boxed{f(5)=36\cdot 3=108}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(3, 0, -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(0, 4, 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

z값의 부호만 바뀜

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A$(3, 0, -2)$ → B$(3, 0, 2)$
C$(0, 4, 2)$

$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2+(2-2)^2}$
$= \sqrt{9+16} = \boxed{5}$

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{16} = 1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은? [3점]

기울기가 양수인 것

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

식에 의거하여 기울기가 양수인 점근선의 기울기는 아래와 같이 쓸 수 있다.

기울기 $= \dfrac{4}{|a|}$

$\dfrac{4}{|a|} = \dfrac{1}{3}$

$|a| = 12$

a는 양수이므로

$\boxed{a=12}$

25. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(3,0),\quad \vec{b}=(1,2),\quad \vec{c}=(4,2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=3},\quad \underbrace{|\vec{q}-\vec{c}|=1}$$

원이네? 반지름이 1이다.

을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

문제에서 대부분의 요소가 벡터로 되어있는데 이를 쉽게 보기 위해서
벡터는 위치가 고정되어 있지 않으므로
모든 벡터를 원점을 시점으로 만들어보자.

$\vec{a}\rightarrow\overrightarrow{OA}$　$\vec{b}\rightarrow\overrightarrow{OB}$　$\vec{c}\rightarrow\overrightarrow{OC}$　$\vec{p}\rightarrow\overrightarrow{OP}$　$\vec{q}\rightarrow\overrightarrow{OQ}$

$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,0)\cdot(1,2)=3$이므로 점 P의 가능한 후보들을 생각해보자.

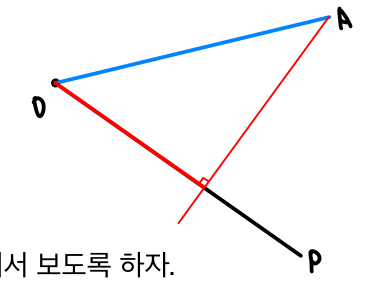
벡터의 내적에 대해서 생각해보면

두 벡터의 내적에서 한 벡터를 알고 있다면 그 길이에

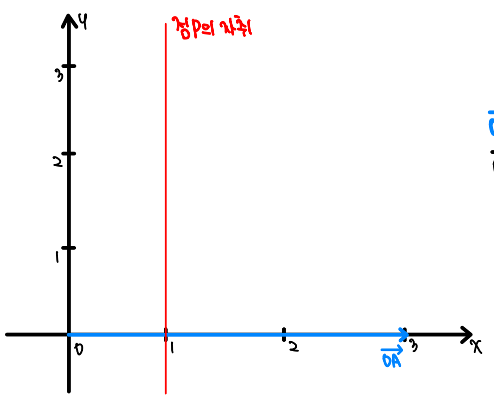
'다른 벡터를 아는 벡터에 정사영 내린 길이'를 곱한 것이다.

$\vec{p}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OP}|\times\cos\theta$

ex)



기본적인 a,b,c 벡터는 알고 있으므로 좌표평면에서 보도록 하자.

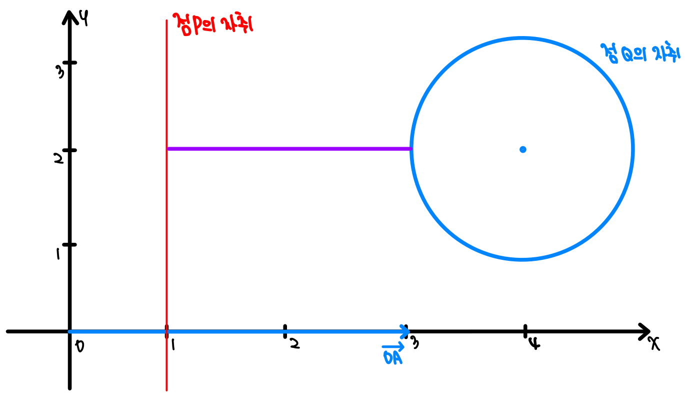


$\overrightarrow{OA}$가 x축과 평행하므로
$\overrightarrow{OP}$를 x축에 정사영 내리면 길이가 1이어야 한다.
그렇다면 점 P의 x좌표는 1이어야 한다.

다음 조건에서는 벡터의 뺄셈이 있으므로 이를 최대한 줄여보자.

$|\vec{q}-\vec{c}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CQ}|=1$

점 C를 중심으로 반지름이 1인 원이 Q의 자취이다.

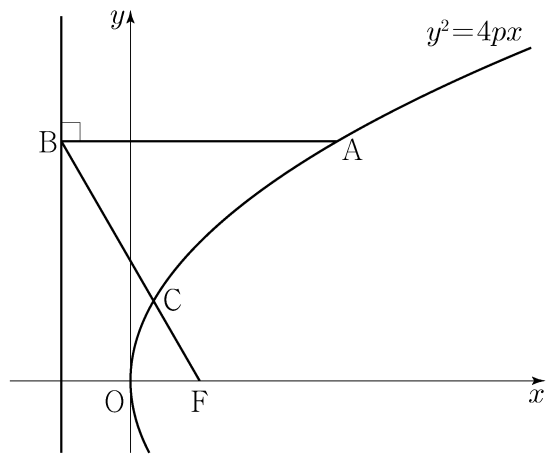


$|\vec{p}-\vec{q}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{PQ}|$이므로 이의 최솟값은 2이다.

26. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

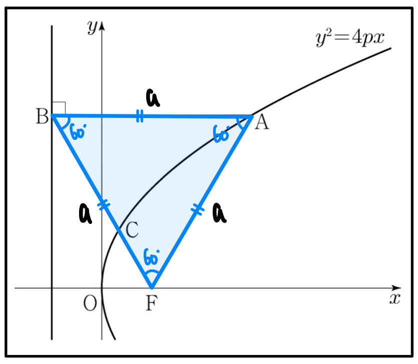
이차곡선은 무조건 '정의'
초점 P는 P(p,0)

① $\frac{7}{8}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{9}{10}$　④ $\frac{10}{11}$　⑤ $\frac{11}{12}$

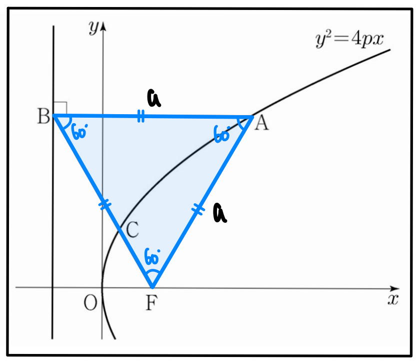


이차곡선 문제이므로 생각해야하는 것은 2개이다.

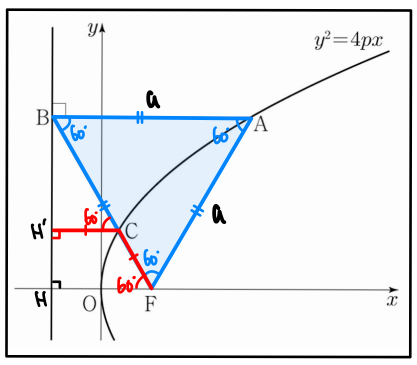
1. 주어진 이차곡선의 정의는 '무조건' 사용한다. → $\overline{AF}=\overline{AB}$
2. 문제에서 준 조건은 모두 그림에 그려놓는다. → 모두 그려놨으므로 PASS

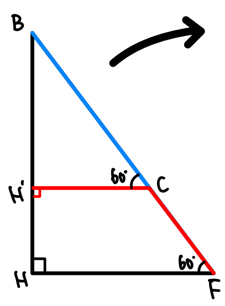


포물선의 정의 + 문제 조건에 의해 △ABF는 정삼각형이다.
다행히 세 변의 길이가 같고 각도 익숙한 60°이다.
추후에 길이 조건이 있으므로 한 변의 길이를 a라고 하자.



두 번째 조건에서 $\overline{BC}$와 $\overline{CF}$에 대한 언급이 있고
점 C 또한 포물선 위에 있으므로 $\overline{BF}$를 살펴보자.



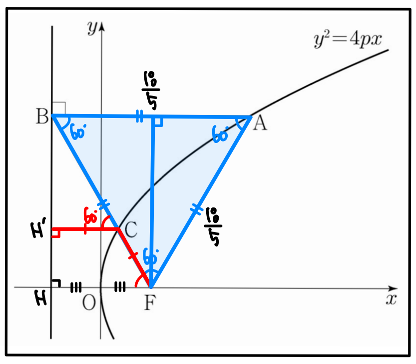


△BH'C에서 $\overline{BC}:\overline{H'C}=2:1$이다.
여기에 포물선의 정의에 의해 $\overline{H'C}=\overline{CF}$
→ $\overline{BC}:\overline{CF}=2:1$이므로

$\overline{BC}=\frac{2}{3}a$

$\overline{CF}=\frac{1}{3}a$

$\overline{BC}+3\cdot\overline{CF}=\frac{2}{3}a+3\cdot\frac{1}{3}a$
$=\frac{5}{3}a=6$
$a=\frac{3}{5}\times 6=\frac{18}{5}$



△ABF가 정삼각형이므로 $\overline{HF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이고
점H와 점F는 y축 대칭이므로 $\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{HF}=p$

$$\boxed{p=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\times\frac{\cancel{18}^{9}}{5}=\frac{9}{10}}$$

27. 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$이고

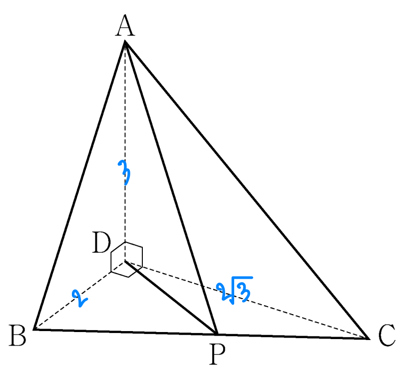
그림에 표현해두자.

$\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$인 사면체 ABCD가 있다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{DP}$의 최솟값은?

기장 특별한 경우

[3점]



① $3\sqrt{3}$　② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

④ $4\sqrt{3}$　⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

우선 문제에서 준 조건들을 그림에다가 모두 옮겨놓자 -> 도형 문제는 무조건 제발!

구해야하는 두 변에서 변하는 점(동점)은 P이다.

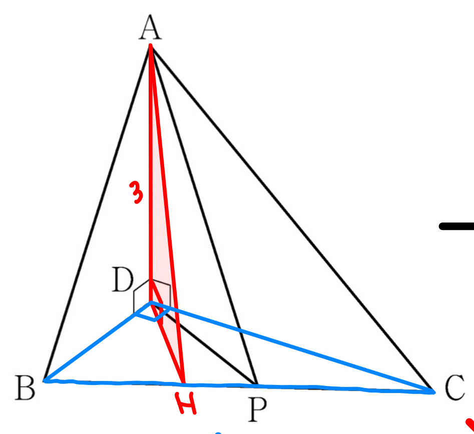
보통의 도형 문제에서 최단거리는 직선거리 혹은 수직거리이다.

주어진 상황에서는

삼각형 ABC의 점 A에서 선분 BC에 수선의 발을 내린 직선 AP

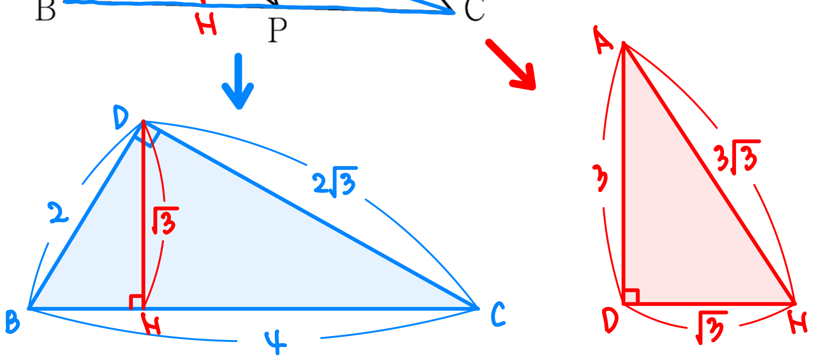
삼각형 DBC의 점 D에서 선분 BC에 수선의 발을 내린 직선 DP가 최단거리로 의심된다.

의심을 확신으로 바꾸기 위해 다시 그림을 그려보자.



선분 AD가 면 BCD와 수직이므로
면 BCD에 소속되어있는 선분 DH와도 수직이다.

여기에 선분 BC에 선분 DH와 선분 AH가 수직이므로
삼수선의 법칙에 의해 △ADH는 직각삼각형이다.



여기서 $\overline{AH}+\overline{DH}=3\sqrt{3}$ 이다.

28. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로

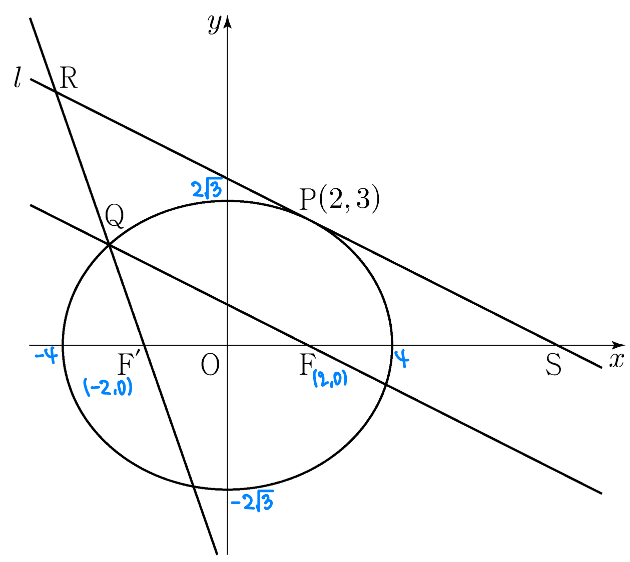
c=2

하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P$(2, 3)$에서 타원에 접하는

이차곡선은 '정의'　a=4, b=2√3

직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.

두 직선 F$'$Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF$'$의 둘레의 길이는? [4점]



① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

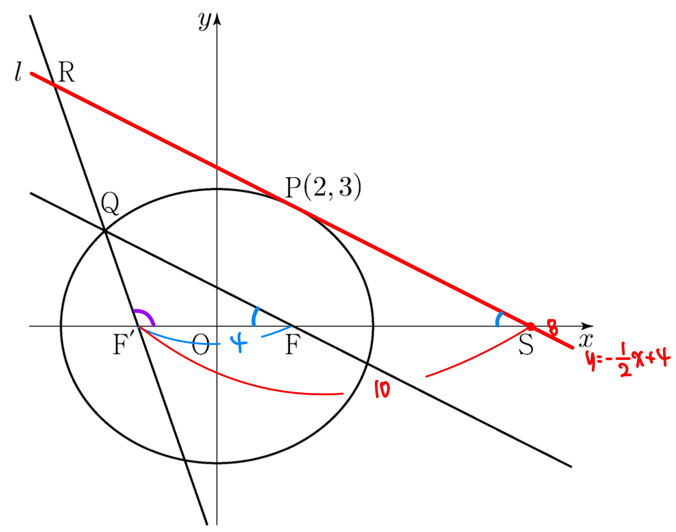
이 문제도 이차곡선 단원이므로 무조건 타원의 정의를 한 번은 쓸 것이다. 명확하게 하고 가자.

정의를 써보면 $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=8$이다. -> 나중에 사용할 것이니 기억해두자.

타원의 식을 모두 주었기에 초점거리가 4라는 것도 알게 되었다. $l : \frac{\cancel{2}x}{\cancel{16}_{8}}+\frac{\cancel{3}y}{\cancel{12}_{4}}=1$

문제에서 점 P에서의 접선 l을 언급하였으므로 직접 구해보자. $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$

x절편 : (8, 0)



△RF'S와 △QF'F에서 (직선 l과 직선 FQ이 평행이므로 ∠QFF' = ∠RSF', ∠RF'S이 공통) 이므로 AA닮음이다.

길이비를 알기 위해 대응변끼리의 비율을 보자.

$\overline{FF'} : \overline{F'S} = 4 : 10 = 2 : 5$이므로 닮음비가 2:5이다. $\rightarrow$ 그러므로 $\underbrace{\overline{F'Q}+\overline{QF}}_{=8} : \overline{F'R}+\overline{RS} = 2:5$

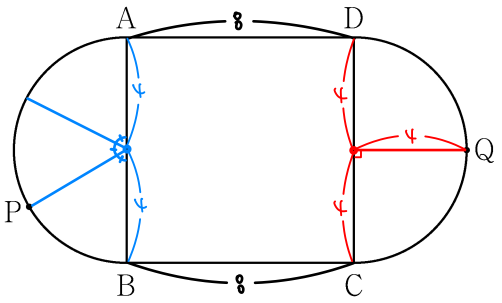
$\overline{F'R}+\overline{RS}=20$

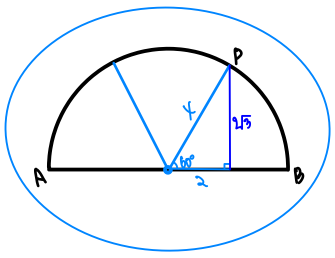
$\boxed{\triangle SRF'\text{의 둘레의 길이는 } \underbrace{\overline{F'R}+\overline{RS}}_{=20}+\underbrace{\overline{F'S}}_{=10}=30}$

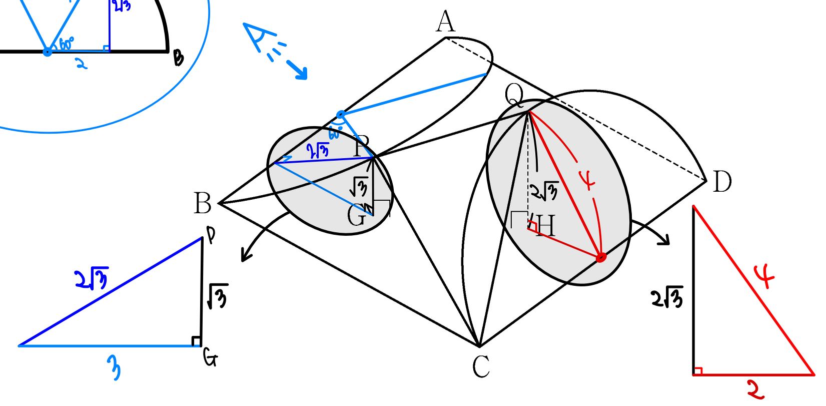
단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자. 이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]

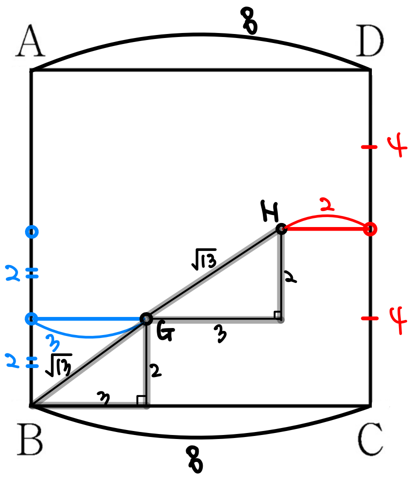
문제에서 써준 조건들을
그림에 표현해보자.



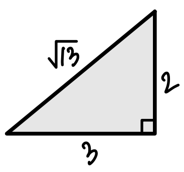




정사각형 ABCD가 바닥이므로 이 바닥에 대한 정보도 모두 기록해두자.

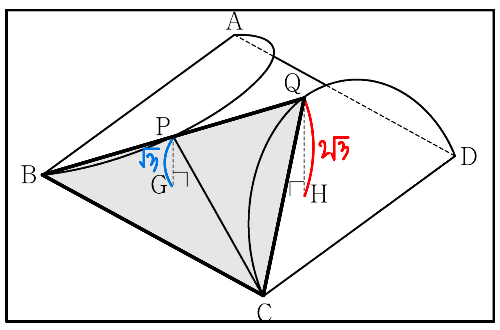


정사각형 ABCD를 정리하다보니
회색으로 칠한 두 개의 삼각형이 →
합동인 것을 알 수 있다.

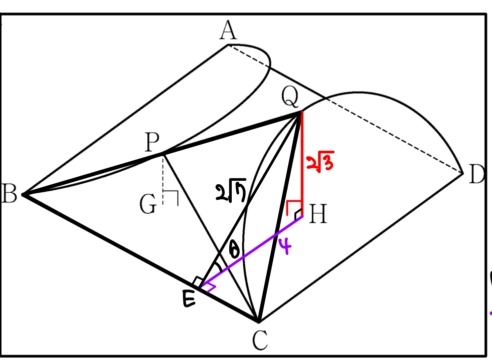


→ 그렇다면 B, G, H는 일직선 상에 있다. + 간격도 동일

우리가 구해야하는 것은 면 PCQ와 면 ABCD의 각인데
두 면 간의 교선이 없으므로 바로 각을 구하기는 힘들어보인다.
이럴 때는 한 평면을 연장하여 교선을 만들어보자.



그런데 점 B, P, Q가 □ ABCD에서의 거리가 각각 0, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$이므로
평면 PCQ를 연장하면 면 BQC로 연장할 수 있다.



연장한 평면과 면 ABCD의 교선이 $\overline{BC}$이다.
$\overline{HE}$가 $\overline{BC}$와 수직이고 $\overline{QH}$는 면ABCD에 있는 모든 직선과 수직이므로
그러므로 $\overline{QH}\perp\overline{HE}$
삼수선의 정리에 의해 직각 △QEH로 각 θ를 알 수 있다.

$$\cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\boxed{70\times\cos^2\theta=\cancel{70}^{10}\times\frac{4}{\cancel{7}}=40}$$

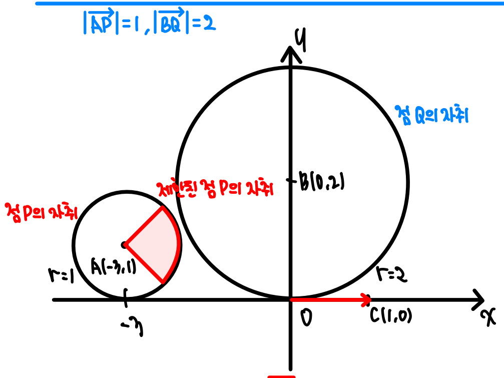
30. 좌표평면에서 세 점 A$(-3,1)$, B$(0,2)$, C$(1,0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=2,\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 P의 자취는 점A를 중심으로 하고 반지름이 1인 원
점 Q의 자취는 점B를 중심으로 하고 반지름이 2인 원
A, O, C는 알고 있으므로 점 P를 예상해보자.

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{Q_0}$이라 하자. 선분 $\mathrm{AP_0}$ 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\geq 1$일 때, $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

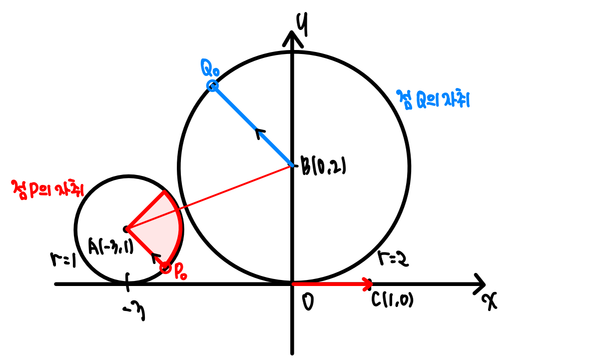
4개의 점 A, B, C, O은 좌표를 명확히 주었고 P, Q는 주지 않았으므로
우리가 집중해야하는 것은 조건을 만족시키는 P와 Q의 위치를 파악하는 것이다.
점 P와 Q의 자취를 원의 형태를 주었으므로 이를 좌표평면에 그려보자.
$|\overrightarrow{AP}|=1$, $|\overrightarrow{BQ}|=2$



이 상태에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키도록
점 P의 자취를 제한해보자.

$\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{OC}$의 길이는 모두 1이므로
두 벡터가 이루는 각의 cos값이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 커야한다.
경계는 각이 $\frac{\pi}{4}$ or $\frac{7}{4}\pi$이네

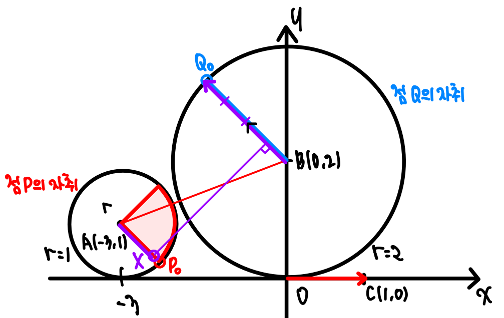
그렇다면 $\overrightarrow{AP}$는 $\overrightarrow{OC}$와 이루는 각이
$\frac{\pi}{4}$보다 작거나 $\frac{7}{4}\pi$보다 커야하므로 위의 그림과 같다.



그 다음에 주어진 조건에서 중요한 것은 점 P_0와 Q_0를 특정짓는 것이다.
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$가 최소가 되는 점들이므로 식에 집중해보자.
무작정 도형으로 보기에는 동점이 2개라 어려우므로 벡터를 쪼개보자.

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$$

점 Q는 중심이 B인 원과 관련이 있으므로 점 B를 경유시키자.
최소가 되려면 서로의 각이 최대한 벌어져야한다.
최소가 되려면 서로 방향이 반대이어야 한다.



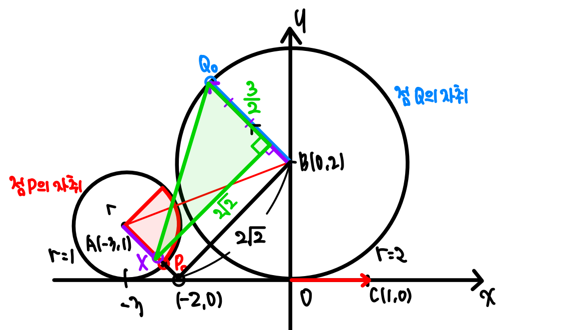
다음 조건 역시 우리가 모르는 점X에 대한 식이므로
식을 정리해보자.
선분 $\overline{AP_0}$ 위에 있다.

$\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\geq 1$

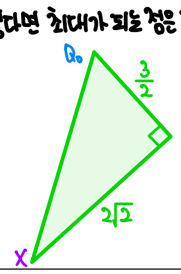
동점이 X 하나이므로 도형적으로 접근하자.

$\overrightarrow{BQ_0}$를 밑변으로 생각하고 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}$를 계산하려면
X를 $\overrightarrow{BX}$에 수선의 발을 내려야 한다.
$\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}$이 경계인 1이려면 $\overrightarrow{BX}$를 $\overrightarrow{BQ_0}$에
정사영한 벡터의 크기가 $\frac{1}{2}$이어야 한다. $|\overrightarrow{BQ_0}|=2$이므로
점 X는 이 점에서 점 A까지 가능하다.

문제에서 물어본 점들의 경계를 모두 확정지었으므로
$|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값을 구해보자.



$\overrightarrow{Q_0X}$가 최대이려면 점 X가 점 A에서 최대한 멀어져야 한다.
그렇다면 최대가 되는 점은 경계가 되는 점이다.



$$\boxed{|\overrightarrow{Q_0X}|^2=\frac{9}{4}+8=\frac{41}{4}}$$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.