n제가 맞나? +

수학 영역(수1)

○ 수1 문항으로 구성된 자작문제 모음집입니다.

○ 문제에 표시되어 있는 배점은 중요도(퀄리티)입니다. 중요도(퀄리티)가 높을수록 괜찮은 문제라고 생각하시면 됩니다.

○ [n점]=중요도(퀄리티)가 n인 문제

○ 난이도랑 중요도(퀄리티)는 전혀 관계가 없습니다.

○ 중요도(퀄리티)가 2 이상인 문제들을 푸는 것을 권장합니다.

○ 킬러 문제가 있긴 있으나, 거의 대부분의 문제들은 비/준킬러의 문제들입니다.

○ 출제자가 수1 문제를 잘 못 만들기 때문에 기출 변형 문제들이 꽤 있습니다.

(이메일:kangwon6822@naver.com)

문항 오류가 있으면 최대한 빨리 수정하도록 하겠습니다.
풀어주신 여러분들 진심으로 감사드립니다.
급하게 준비한 관계로 해설은 준비되어 있지 않습니다.

수학 영역(수1)

화이팅 !

1. 1이 아닌 두 양수 a, b가

$$2^{a-2}\times b=b^{a}=16$$

을 만족시킨다. $a>1$일 때, $a=p+q\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [2점]

2. 공차가 9인 등차수열 $\{a_n\}$과 10 이하의 서로 다른 두 자연수 p, q가

$$a_p=p,\qquad a_q=2q$$

를 만족시킬 때, a_{20}의 값을 구하시오 [2점]

3. 자연수 a에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \le x \le 2\pi\}$의 두 부분집합

$$A = \{x \mid \sin ax = -1\}, \qquad B = \{x \mid |3\cos 2x| = 1\}$$

의 원소의 개수가 서로 같을 때, a의 값을 구하시오. [2점]

4. 넓이가 $\frac{9}{10}$인 삼각형 ABC에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = 6, \quad \overline{\mathrm{CA}} = 4$$

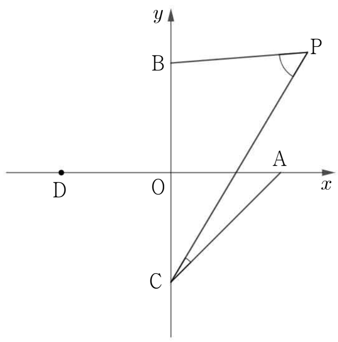
일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [2점]

① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

5. 첫째항이 13이고 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구하시오. [2점]

> (가) $2 \le k \le 100$
> (나) a_k의 k제곱근 중에서 음의 실수가 존재한다.

6. 좌표평면에서 두 원 $x^2+(y-4)^2=25$, $(x+4)^2+y^2=100$이 만나는 점 중 x축에 더 가까운 점을 P라 하자.
다음은 세 점 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ 4)$, C$(0,\ -4)$에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{CPB}-\angle \mathrm{ACP})$의 값을 구하는 과정이다.



D$(-4,\ 0)$이라 하고, $\angle \mathrm{CPB}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACP}=\beta$라 하자.

$\overline{\mathrm{BP}}=5$, $\overline{\mathrm{DP}}=$ $\boxed{(가)}$

이다. 사각형 BDCA가 정사각형이므로

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{DBA}=\dfrac{\pi}{2}$이고,

$\angle \mathrm{DBP}=$ $\boxed{(나)}$ $-\alpha+\beta$

이다. 따라서

$\cos(\angle \mathrm{CPB}-\angle \mathrm{ACP})=\cos(\alpha-\beta)=$ $\boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $\dfrac{p\times q\times r}{\pi}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{41}{8}\sqrt{2}$　② $\dfrac{41}{4}\sqrt{2}$　③ $\dfrac{43}{8}\sqrt{2}$　④ $\dfrac{43}{4}\sqrt{2}$　⑤ $\dfrac{45}{4}\sqrt{2}$

7. 두 상수 p, q에 대하여 방정식

$$x^2+px+\frac{17}{2}=0$$

의 모든 실근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$이고, $0\le x\le 4$에서 방정식

$$\sin\frac{\pi}{2}x=q$$

의 모든 실근이 α, β이다. $p\times\beta=a+b\sqrt{2}$일 때, $a\times b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [2점]

8. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 $a_{21}=42$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}$의 값을 구하는 과정이다.

> $b_n=\dfrac{a_n}{n}$이라 하면 모든 자연수 k에 대하여
>
> $$\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k=(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)$$
>
> 이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\{(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)\}=n^2\text{이다.}$$
>
> 이때
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\{(\boxed{\text{(가)}})\times(b_{k+1}-b_k)\}=(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\text{이므로}$$
>
> $$(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2 \ \cdots \ ㉠$$
>
> 이다. $a_{21}=42$이므로 ㉠에 $n=20$을 대입하면
>
> $$\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(20)\times g(9)+p$의 값은? [2점]

① -350 ② -348 ③ -346 ④ -344 ⑤ -342

9. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 2이고, 공차는 b_3이다.
(나) 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 a_3이고, 공비는 2이다.

$a_6 - b_5$의 값은? [2점]

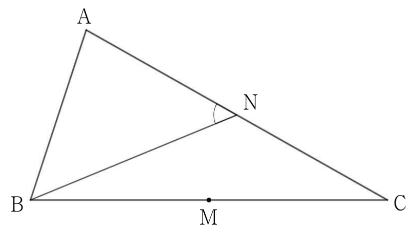
① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

10. 두 자연수 a, b가

$$(a-3\log_b 6)(a-6\log_b 2)=0$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $b \neq 1$) [2점]

11. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M, 선분 CA의 중점을 N이라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{MC}}=4$, $\overline{\mathrm{BN}}=5$일 때, $\cos(\angle \mathrm{ANB})=\frac{q}{p}\sqrt{15}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]



12. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $\tau(n)$이라 하고, 48의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3 $\cdots$, a_{10}이라 하자.
$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sin\left(\frac{\tau(a_k)}{2}\pi\right)\times\log a_k\right\}$의 값은? [2점]

① log2　② log3　③ 2log2　④ 2log3　⑤ 3log2

13. 곡선 $y=k^x(k>1)$가 직선 $y=6$과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 C$(13,\ 0)$에 대하여

$$\angle \mathrm{ABO}+\angle \mathrm{ACO}=\pi$$

가 성립하도록 하는 모든 k의 값의 곱을 p라 하자. $30\log_6 p$의 값을 구하시오. [2점]

14. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{3n-1}=a_{3n}$
(나) $a_n a_{n+1} \le 4a_n - 4$

$\sum_{k=1}^{400} a_k$의 최댓값을 구하시오. [1점]

15. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_2| = 3, \quad |a_2 + a_3| = 2, \quad |a_2 + a_3 + a_4| > 3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} |a_k|$의 값을 구하시오. [2점]

16. 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 서로 다른 모든 점의 개수를 구하시오. [1점]

> (가) x좌표와 y좌표중 적어도 하나는 자연수이다.
> (나) $-5 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = \left|2\cos\frac{\pi}{4}x - 1\right|$의 그래프 위에 있다.

17. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수를 구하시오. [2점]

(가) $1 < |k| \leq 50$

(나) k의 m제곱근 중 실수인 것의 개수와 m의 $|k|$제곱근 중 실수인 것의 개수가 같도록 하는 자연수 $m(m \geq 2)$이 존재한다.

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

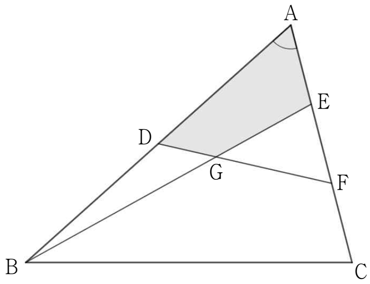
(가) $4 < a_n \leq 10$ 또는 $a_n < 0$이다.

(나) $a_{4n-3} > 0$

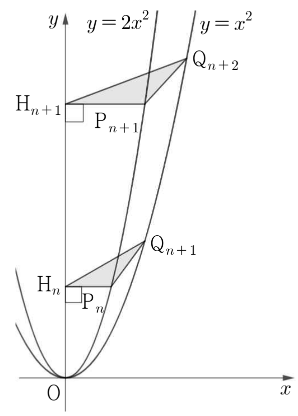
(다) $|a_{n+1}| = |a_n - 4|$

$a_1 = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{18} a_{3k}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [1점]

19. 그림과 같이 $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB의 중점을 D, 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점과 $2:1$로 내분하는 점을 각각 E, F라 하자. 선분 DF와 선분 BE가 만나는 점을 G라 할 때, 사각형 ADGE의 넓이는 $\frac{4\sqrt{15}}{3}$이다. $\cos(\angle \mathrm{DAE})=\frac{q}{p}\sqrt{19}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]



20. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{2}a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=2x^2$ 위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 P_n, 곡선 $y=x^2$ 위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 Q_n이라 하고, 점 P_n에서 y축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\frac{a_n}{2}$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}$을 구하는 과정이다.



삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\frac{a_n}{2}$이므로,
점 Q_{n+1}의 y좌표와 점 P_n의 y좌표의 차는 $\boxed{(가)}$ 이다.
$\mathrm{Q}_{n+1}(a_{n+1},\ (a_{n+1})^2)$, $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2(a_n)^2)$이므로

$$(a_{n+1})^2-2(a_n)^2=\boxed{(가)}$$

이고,

$$(a_{n+1})^2+\boxed{(가)}=2\times\left\{(a_n)^2+\boxed{(가)}\right\}$$

이므로 수열 $\left\{(a_n)^2+\boxed{(가)}\right\}$은 등비수열이다.
따라서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\boxed{(나)}$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=\boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(7)+g(8)$의 값은? [2점]

① 626 ② 628 ③ 630 ④ 632 ⑤ 634

21. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)=0$
> (나) $(a_4-1)(a_5-2)(a_6-3)=0$
> (다) $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)<0$

$a_{10}\times a_{11}\neq 5$일 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값을 구하시오. [2점]

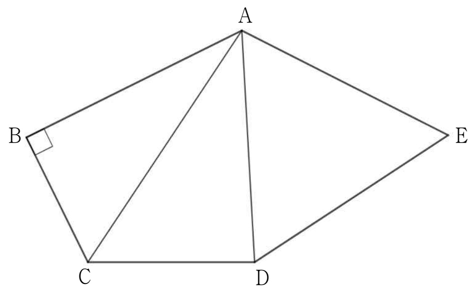
22. 2 이상 50 이하의 자연수 n에 대하여 $\sin\frac{n}{4}\pi$가 어떤 음의 실수의 n제곱근이 되도록 하는 모든 n의 개수를 구하시오.

[2점]

23. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{2}$인 오각형 ABCDE에 대하여, 삼각형 ADE는 넓이가 $\frac{25}{4}\sqrt{3}$인 정삼각형이고,

$$\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{3}, \quad \overline{\mathrm{BC}} = 3, \quad \overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{13}$$

일 때, 두 점 B, E 사이의 거리를 l이라 하자. $l^2 = p + q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [2점]



24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = n + 1 - a_{50}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{50} \left\{ (51-k)a_k - \frac{1}{2} \right\} = \sum_{k=1}^{49} S_k$$

일 때, a_{51}의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

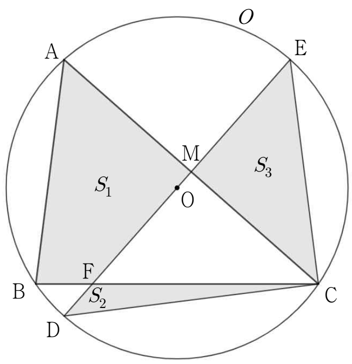
25. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a + \log_3 b = \log_6 c$

(나) $\dfrac{c}{3ab} = 3^{\log_2 a}$

$\log_3 b = k$일 때, 16^k의 값을 구하시오. [2점]

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원 O의 중심을 O, 선분 CA의 중점을 M이라 하자. 직선 OM이 원 O와 만나는 점 중 점 B에 더 가까운 점을 D, 점 B에 더 먼 점을 E라 하고, 직선 OM이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자.
사각형 ABFM의 넓이를 S_1, 삼각형 FDC의 넓이를 S_2, 삼각형 EMC의 넓이를 S_3이라 할 때, $S_1 - S_2 - S_3 = \dfrac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]



27. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (-1)^n - 1$$

이다. 등차수열 $\{b_n\}$과 상수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, $m \times b_{10}$의 값을 구하시오. [2점]

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n+1} b_k = n(m - a_n)(na_{n+1} - 3)$ 이다.

28. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_n \rvert = \lvert b_n \rvert$이다. (나) $a_9 = b_{10}$

$\displaystyle\sum_{k=5}^{13} a_k = 9$일 때, $b_{10} + (b_{15})^2$의 값을 구하시오. [2점]

29. 좌표평면에서 곡선 $y=\log_a x\,(a>1)$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$을 지나는 직선이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. x축 위의 서로 다른 두 점 C, D에 대하여 두 삼각형 PCA, BPD가 서로 넓이가 같은 정삼각형일 때, $(\log_a 16)^2$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 음수이다.) [2점]

30. $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin(k\pi x+k\pi)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 개수를 a, 직선 $y=\frac{1}{3}$과 만나는 점의 개수를 b, 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수를 c라 하자.

$$a=b \text{ 또는 } b=c \text{ 또는 } c=a$$

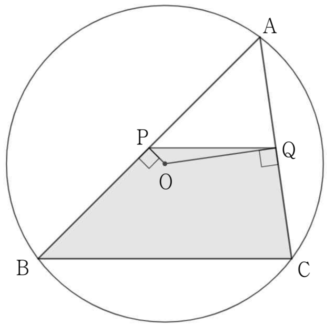
가 되도록 하는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [2점]

31. 공비가 1이 아니고 $a_4+a_{10}=-\sqrt{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} a_n & (a_n>0) \\ 1-a_1 & (a_n\le 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $b_7=1-a_1$일 때, $3\times\sum_{k=1}^{17} b_{3k-2}$의 값을 구하시오. [2점]

32. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC가 있다. 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P, 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{PQ}=4$이고, 사각형 PBCQ의 넓이가 21일 때, 사각형 PBCQ의 둘레의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [2점]



33. 함수 $f(x)=\sin(k\pi x+k\pi)$와 자연수 n에 대하여 $x \geq 0$에서 방정식

$$f(x)=\frac{2}{n+1}$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$a_m < 1+\frac{1}{6k}$$

인 자연수 m의 개수가 3 이상 5 이하가 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [1점]

34. 다음 조건을 만족시키고 공비가 음의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 100 이하의 자연수 m의 개수를 구하시오. (단, $a_1 \neq 0$) [2점]

(가) $\sum_{k=1}^{m} 3a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k$

(나) $\frac{a_{31}}{a_1}$ 은 정수이다.

35. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = |a\sin x|\,(a > 0)$의 그래프가 직선 $y = k(0 < k < a)$와 만나는 점을 x좌표가 작은 점부터 차례대로 A_1, A_2, A_3, A_4라 하고, 점 A_3에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} : \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4} = 2 : 3$이고, 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{H}$의 넓이가 2일 때, $\pi(a+k)$의 값을 구하시오. [2점]

36. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_3| + |a_{15}| = |2a_7|$
(나) $|a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}| = |a_{10} \times a_{13}| + 3$

$a_2 > 0$일 때, $\sum_{k=3}^{15} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

37. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가

$$2^a = 3^b, \quad \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^c = 3^a, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$$

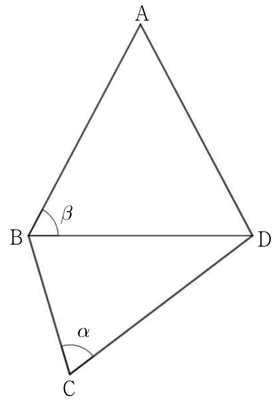
을 만족시킬 때, $3^a \times b$의 값은? [2점]

① $2+2\log_3 2$ ② $2+3\log_3 2$ ③ $3+2\log_3 2$
④ $3+3\log_3 2$ ⑤ $4+2\log_3 2$

38. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$인 사각형 ABCD에 대하여 $\angle BCD=\alpha$, $\angle ABD=\beta$라 할 때,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\sin\alpha, \quad \sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{8}$$

이 성립한다. 세 점 B, C, D를 지나는 원의 중심과 점 A 사이의 거리를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오. (단, $\beta<\alpha$) [3점]



39. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{4-a_n} & (a_n \geq 1) \\ n+1 & (a_n < 1) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_{2k}}$의 값은? [1점]

① -160 ② -158 ③ -156 ④ -154 ⑤ -152

40. $-1 < a < 0$인 상수 a에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 방정식

$$2\sin^2 x - (2a+1)\sin x + a = 0$$

의 서로 다른 네 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 k_1, k_2, k_3, k_4라 하자.

$$k_1 \cos k_4 = a \times k_2 \cos k_3$$

일 때, $\cos k_4 = \dfrac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]

41. 2 이상 50 이하의 자연수 n과 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 세 수

$$\log_n a^2, \quad \log_a b^4, \quad 2^n \times \log_b n$$

이 모두 같은 자연수일 때, $\log_b a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값을 구하시오. [2점]

42. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $a_{n+1} = a_n + n^2$이다.
(나) n이 짝수일 때, $a_{n+1} = a_n - n^2$이다.

$\sum_{k=1}^{100} a_k = 50$일 때, a_1의 값은? [2점]

① -25 ② $-\dfrac{49}{2}$ ③ -24 ④ $-\dfrac{47}{2}$ ⑤ -23

43. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n을

$$S_n = (a_2 - a_1) \times (a_3 - a_2) \times (a_4 - a_3) \times \cdots \times (a_{n+1} - a_n)$$

이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = k^{2 - a_{n+1}}$$

이 성립한다. 다음은 $a_7 = 4$, $a_{11} = 6$일 때, $a_1 \times \sum_{m=1}^{n} S_m$을 구하는 과정이다. (단, k는 $k > 1$인 상수이다.)

> $S_n = k^{2 - a_{n+1}}$에서
> $2 - a_{n+1} = \log_k S_n$ ⋯ ①
> 이고, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
> $2 - a_n = \log_k S_{n-1}$ ⋯ ②
> 이다. ①−②를 하면
> $a_n - a_{n+1} = \log_k S_n - \log_k S_{n-1} = \log_k (a_{n+1} - a_n)$ ⋯ ③
> 이다. 즉, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n$은 방정식 $-x = \log_k x$의 해이다.
> $k > 1$이므로 방정식 $-x = \log_k x$의 해는 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = d$이다.
> $a_7 = 4$, $a_{11} = 6$이므로 $d =$ (가) 이고,
> ③에서 $k =$ (나) 이다.
> $S_n = k^{2 - a_{n+1}}$이므로 $a_1 \times \sum_{m=1}^{n} S_m =$ (다) 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\frac{q}{p} \times f(6)$의 값은? [3점]

① $-\frac{63}{2}$ ② $-\frac{63}{4}$ ③ $-\frac{63}{8}$ ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{31}{8}$

44. 첫째항이 음의 정수이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 정수이고 공차가 1인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$c_n = \begin{cases} a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다.

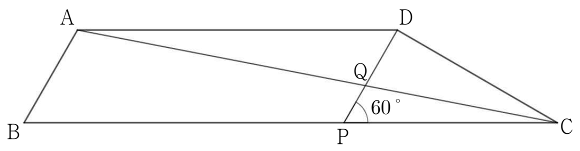
$$\sum_{k=1}^{6} c_k = 7, \quad \sum_{k=1}^{6} |c_k| = 17$$

일 때, $|a_{10}| + |b_{20}|$의 값을 구하시오. [2점]

45. 그림과 같이 두 선분 AD, BC가 서로 평행한 사각형 ABCD가

$$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{21}}{3},\quad \overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \cos(\angle\mathrm{ACD})=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

를 만족시킨다. 선분 BC위의 점 P를 두 선분 AB, DP가 서로 평행하고 $\angle\mathrm{DPC}=60^\circ$가 되도록 잡을 때, 선분 AC와 선분 PD가 만나는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이는? [2점]



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{30}$

46. 1보다 큰 실수 a와 자연수 n에 대하여 두 점 A, B를 $\mathrm{A}(n,\ \log_a n)$, $\mathrm{B}(n+1,\ \log_a(n+1))$라 하자. 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 P를 $\angle\mathrm{BAP}=90^\circ$가 되도록 잡는다. 삼각형 BAP의 넓이가 1이 되도록 하는 a의 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=6}^{143}\log_2 a_n$의 값은? [2점]

① $2+\log_2 3$ ② $2+2\log_2 3$ ③ $3+\log_2 3$
④ $3+2\log_2 3$ ⑤ $4+\log_2 3$

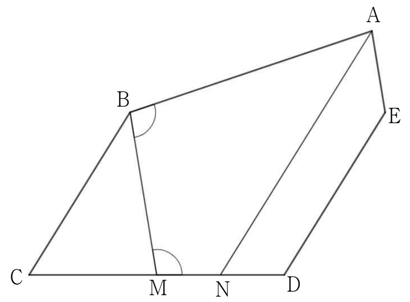
47. 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=|\sin kx|,\quad g(x)=-\cos 6x$$

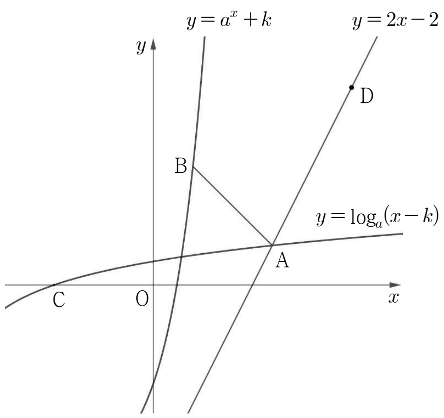
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [2점]

실수 a가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 y좌표이면 집합 $\{x\,|\,f(x)=a\}\cap\{x\,|\,g(x)=a\}$ 의 원소의 개수는 2 이상이다.

48. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=3$인 오각형 ABCDE가 있다. 선분 CD의 중점을 M, 선분 MD의 중점을 N이라 하자. 세 직선 BC, AN, ED가 서로 평행하고, $\angle\mathrm{ABM}=\angle\mathrm{BMD}$일 때, 선분 AE의 길이는 k이다. $3k^2$의 값을 구하시오. [3점]



49. 곡선 $y=\log_a(x-k)$가 직선 $y=2x-2$와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=a^x+k$와 만나는 점을 B라 하자. 곡선 $y=\log_a(x-k)$가 x축과 만나는 점 C와 점 D$(2,\ 2)$에 대하여 삼각형 DAC의 넓이가 삼각형 DBC의 넓이의 4배이고, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{5}$일 때, $\dfrac{a}{32}=\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $a>1$, $-3<k<1$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]



50. 상수 k와 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n-1}+a_{2n}=(\sqrt{2}+1)a_n$
> (나) $a_{2n-1}\times a_{2n}=k(a_n)^2$

$a_2=\dfrac{1}{9}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{128}(a_n)^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

51. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여

$\sin\pi x = t$ 이고 $\cos 3\pi x \ge 0$

인 실수 x의 값 중에서 닫힌구간 $[0,\ 4]$에 속하는 가장 작은 값을 $m(t)$, 가장 큰 값을 $M(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [1점]

<보 기>

ㄱ. $M\left(\frac{2}{3}\right) - m\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

ㄴ. $M(\alpha) - m(\alpha) \ne 2$인 실수 $\alpha(-1 \le \alpha \le 1)$의 개수는 3이다.

ㄷ. $M(\beta) = 17m(\beta)$인 실수 $\beta(-1 \le \beta \le 1)$에 대하여 모든 $\cos\beta\pi$의 값의 곱은 $\frac{\sqrt{21}}{8}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

52. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+5}$이고, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때,

$a_n = 4 - |n-3|$

이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $b_n = \cos\frac{S_n}{7}\pi$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2점]

<보 기>

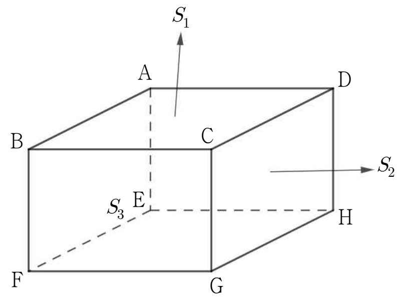
ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = b_{n+5}$이다.

ㄴ. $b_2 + b_9 = b_3 + b_{16}$

ㄷ. $\sum_{k=3}^{26} b_k < \frac{11}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

53. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BH}}=n$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 세 사각형 ABCD, CGHD, BFGC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, $S_1+S_2-S_3$의 최댓값을 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. [1점]



54. 그림과 같이 정삼각형 ABC의 내부의 점 P를 삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 APC의 넓이의 2배이고, 삼각형 PBC의 넓이가 삼각형 APC의 넓이의 3배가 되도록 잡는다. 점 P를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q, 직선 CP가 선분 AB와 만나는 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{QR}}=1$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [2점]