제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 7일차

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

부등식의 확장해석 (상)

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

제 2 교시　수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.

1. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M\times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2020년 9월 모의평가 가30 제한시간 9분)

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=-e^{2-x}+1,\quad g(x)=e^{x+a}+1$$

에 대하여 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le mx+k \le g(x)$$

가 성립하기 위한 m의 값의 범위가 $0 \le m \le h(a)$일 때, $\dfrac{a}{h(a)}$는 극댓값 p와 극솟값 q를 갖는다. $\dfrac{q^2}{p^3}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

일반적 사고과정

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.(1)

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$
> 이 성립한다.(2)

$|M\times m^3| = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(2020년 9월 모의평가 가30 제한시간 9분)

(1): 어떤 변수에 대하여 최대 최소를 물어보았다.

⇒ 도함수의 활용 (최대/최소의 활용, 최대/최소의 정리)

⇒ 변수 a, b에 대하여 ab를 어떤 함수로 나타낼 수 있을까?

⇒ 나타낼 수 있다면 최대/최소의 정리를 활용하여 풀자.

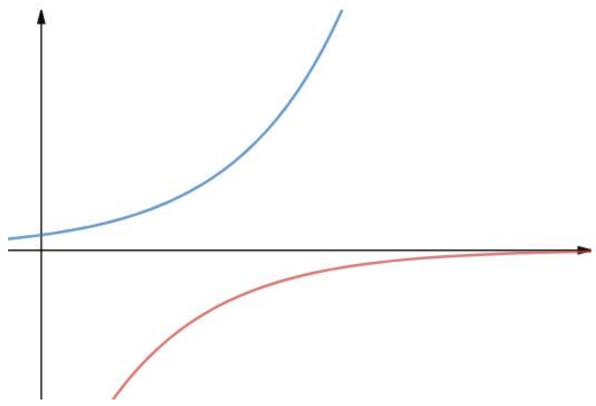
⇒ 변수 a, b에 대해 알아보자.

(2). 부등식의 해석은 그래프의 관찰.

그래프를 그려서 관찰하자. 대칭성의 관점을 정리했다면,

$y = -e^{-x+1}$, $y = e^{x-2}$의 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭인 관계인 것을 의심해 볼 수 있다.

($-e^{-\left(\frac{3}{2}-t\right)+1} + e^{\left(\frac{3}{2}+t\right)-2} = 0$ 을 통해 증명)



a,b 모두 상수가 아닌 변수이다. 그러므로 ab라는 값은 2개의 변수를 모두 고려해야 하는 '골치 아픈 녀석'이다. 이것은 어떻게 해석하는가?

확통에서 복잡한 상황을 만났을 때, 사건의 케이스를 분류하여 해석하는 것과 비슷한 원리로 생각할 수 있다.

⇒ a, b 중 하나를 고정해 놓고 나머지 하나를 변화시키며 관찰

⇒ a, b중 무엇을 고정하든 나머지 변수가 갖는 값의 범위가 직선 $y = ax+b$가 두 곡선에 접하게 되는 순간까지 임을 알 수 있다.

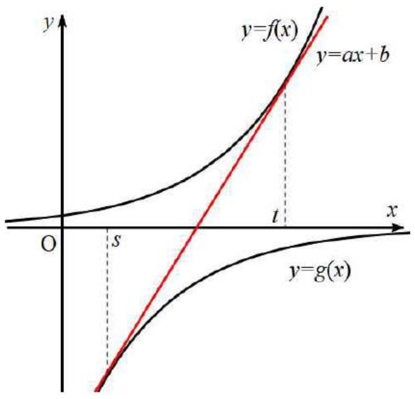
⇒ ab가 최대/최소인 순간은 직선 $y = ax+b$가 접선인 상황 중에 존재한다.

제시된 지수함수를 $f(x) = e^{x-2}$, $g(x) = -e^{-x+1}$라하고 접점의 x좌표를 t라 한 뒤 접선의 방정식을 세우면 $y = f'(t)x - tf'(t) + f(t)$이므로

$y = ax+b$와 대응. 최대 최소를 구하는 상황에 한하여 $a = f'(t), b = -tf'(t) + f(t)$임을 알 수 있다.

(단, t의 범위에 주의해야 할 것이다.)

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$f'(x)=e^{x-2}$이므로
$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$
$y=e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$ … ㉠
또, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(s,\ g(s))$에서의 접선의 방정식은
$g'(x)=e^{-x+1}$이므로
$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$
$y=e^{-s+1}x+(-s-1)e^{-s+1}$ … ㉡
㉠과 ㉡에서 접선의 기울기가 같으면
$e^{t-2}=e^{-s+1}$, $t-2=-s+1$
$s=-t+3$ … ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$y=e^{t-2}x+(t-4)e^{t-2}$ … ㉣
이때, ㉠과 ㉣에서 $x=t$일 때 $a=e^{t-2}$
$(t-4)e^{t-2}\leq b\leq(1-t)e^{t-2}$
그러므로
$(t-4)e^{2t-4}\leq b\leq(1-t)e^{2t-4}$ … ㉤
한편, 두 접선이 일치하면
$(1-t)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1}$
㉢을 대입하면
$(1-t)e^{t-2}=(t-4)e^{t-2}$, $1-t=t-4$, $2t=5$
$t=\dfrac{5}{2}$ 그러므로 $t\leq\dfrac{5}{2}$ … ㉥

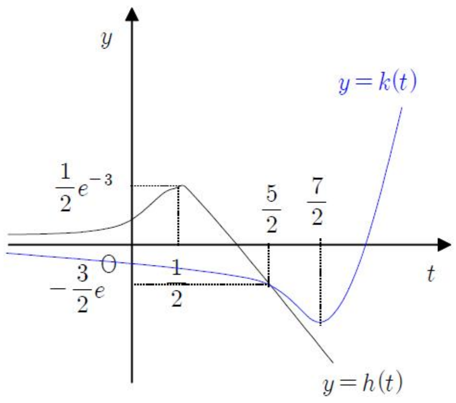


한편 $f(x), g(x)$가 점 $\left(\frac{3}{2},0\right)$에 대칭관계라는 것을 이용.

점 $\left(\frac{3}{2},0\right)$에서 그은 접선의 접점이 $\frac{5}{2}$라는 것을 통해

$t\leq\frac{5}{2}$를 알아낼 수 도 있다.

㉤에서 $h(t)=(1-t)e^{2t-4}$이라 하면
$h'(t)=-e^{2t-4}+(2-2t)e^{2t-4}=(1-2t)e^{2t-4}$
이므로 $h'(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$
또, $k(t)=(t-4)e^{2t-4}$이라 하면
$k'(t)=e^{2t-4}+(2t-8)e^{2t-4}=(2t-7)e^{2t-4}$
이므로 $k'(t)=0$에서 $t=\dfrac{7}{2}$
이때, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-3}$, $k\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}e$이므로 $t\leq\dfrac{5}{2}$에서 두 함수 $y=h(t)$, $y=k(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $t=\dfrac{5}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{3}{2}e$, $t=\dfrac{1}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}e^{-3}$을 가진다.
따라서
$$|M\times m^3|=\left|\frac{1}{2}e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}e\right)^3\right|=\frac{27}{16}$$
이므로 $p+q=16+27=43$

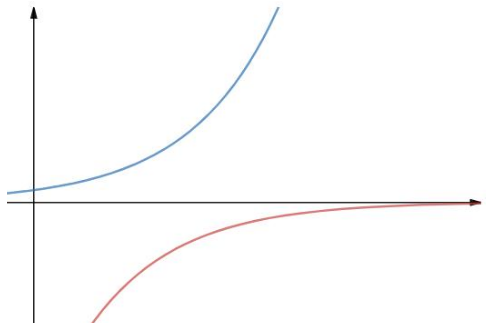
제시하는 사고과정

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.(1)

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$
> 이 성립한다.(2)

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]
(2020년 9월 모의평가 가30 제한시간 9분)

(1): 어떤 변수에 대하여 최대 최소를 물어보았다.
 ⇒ 변수 a, b에 대해 알아보자.



기울기 a값의 범위는 $0 \le a \le$공통접선의 기울기
이다. 공통접선의 기울기를 편의상 A라 하자.
부등식 $-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$를 만족시키기 위해서는
$-e^{-x+1} \le ax+b$와 $ax+b \le e^{x-2}$를 만족시키면 된다.

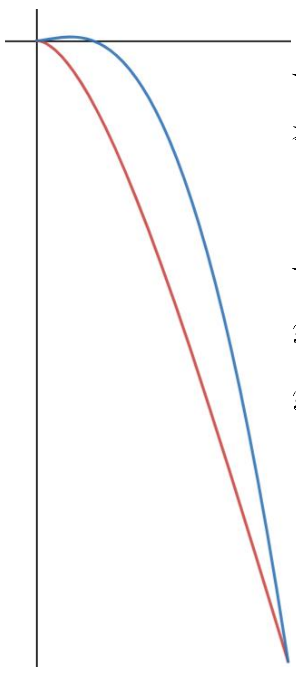
$-e^{-x+1} \le ax+b \Rightarrow 0 \le ax+b+e^{-x+1}$
$ax+b+e^{-x+1} = f(x)$라 하고, $f(x)$의 최솟값이 0이상임을 보이자.
$f'(x) = a - e^{-x+1}$, $x = 1-\ln a$에서 극소이자 최솟값을 갖는다.
(a의 범위가 $0 < a \le A$로 수정)

$$-e^{-x+1} \le ax+b \Rightarrow 0 \le f(1-\ln a)$$
$$\Rightarrow 0 \le a(1-\ln a)+b+a$$
$$\Rightarrow a\ln a - 2a \le b$$

마찬가지로

$$ax+b \le e^{x-2} \Rightarrow 0 \le e^{x-2}-ax-b \text{ , } e^{x-2}-ax-b = g(x)\text{라 하면}$$
$$\Rightarrow 0 \le g(2+\ln a)$$
$$\Rightarrow 0 \le a - a(2+\ln a) - b$$
$$\Rightarrow b \le -a - a\ln a$$

$a\ln a - 2a \le b \le -a - a\ln a$ 를 얻습니다.
실제로 기울기 a에 따라 가질 수 있는 b의 범위도 저렇겠죠.
각 변에 a를 곱하면 $a^2\ln a - 2a^2 \le ab \le -a^2 - a^2\ln a$
a축에 대하여 곡선 $y = a^2\ln a - 2a^2$, $y = -a^2 - a^2\ln a$를 그려보자.



두 곡선 사이에 영역이 ab가 가질 수 있는 값임을 알 수 있다.

그러므로 ab의 최댓값은
$y = -a^2 - a^2\ln a$의 극댓값이고, 최솟값은
$y = a^2\ln a - 2a^2$에 $a = A$를 대입한 값이다.

제시하는 사고과정

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=-e^{2-x}+1,\quad g(x)=e^{x+a}+1$$

에 대하여 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le mx+k\le g(x)$$

가 성립하기 위한 m의 값의 범위가 $0\le m\le h(a)$일 때, $\frac{a}{h(a)}$는 극댓값 p와 극솟값 q를 갖는다. $\frac{q^2}{p^3}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le mx+k\le g(x)$$

를 만족시켜야 하는데 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$모두 $y=1$을 점근선으로 하고, $m=0$일 때도 부등식이 성립하므로 $k=1$이다.

한편 부등식을 만족시키기 위한 m의 최댓값을 생각해보자.

직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=f(x)$또는 $y=g(x)$에 접하는 순간 m은 최댓값을 갖게 될 것이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 둘 다 밑이 e인 지수함수로서 평행/대칭이동을 통해 포개어 질 수 있다.

즉, 점대칭 관계를 의심해 볼 수 있다.

$f(x)$는 점$(2,0)$을 지나고

$g(x)$는 점 $(-a,2)$를 지난다. 그러므로

$a=2$ 이면, 두 곡선은 $(0,1)$에 점대칭 관계이다.

$a=2$이면 직선 $y=mx+1$는 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 동시에 접할 수 있게 된다.

$a>2$이면, 직선 $y=mx+1$는 $y=f(x)$에 먼저 접하고

$a<2$이면, 직선 $y=mx+1$는 $y=g(x)$에 먼저 접한다.

점 $(0,1)$에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 그은 접선의 방정식을 세워보자

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$, $\quad y=e^{2-t}(x-t)-e^{2-t}+1$

$x=0$, $y=1$을 대입하면

$(-t-1)e^{2-t}=0$, $t=-1$이므로 $a>2$이면 $h(a)=e^3$을 얻는다.

$y=g'(t)(x-t)+g(t)$,

$y=e^{t+a}(x-t)+e^{t+a}+1$

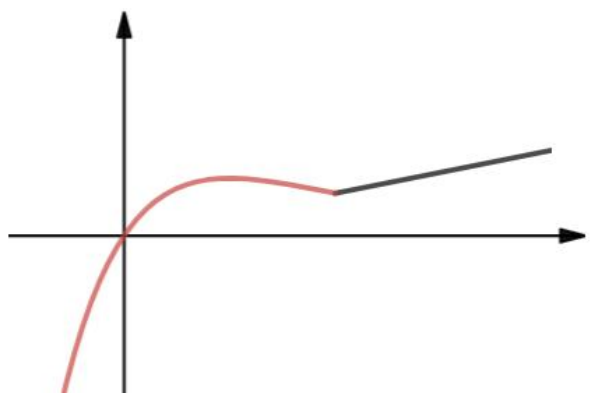
$x=0$, $y=1$을 대입하면

$(1-t)e^{t+a}=0$, $t=1$이므로 $a<2$이면 $h(a)=e^{a+1}$을 얻는다.

$a=2$일 때, $h(a)=e^3$으로 연속이다. 정리하면,

$$\frac{a}{h(a)}=\begin{cases}\frac{a}{e^3} & (a\ge 2)\\ e^{-a-1}\times a & (a<2)\end{cases}$$ 이다.

a에 대하여 미분하여 그래프를 그리면 아래와 같고



$a=1$에서 극댓값 e^{-2}을 갖고 $a=2$에서 극솟값 $\frac{2}{e^3}$를 갖는다.

8일차 예습과제

3. $x>0$에서 정의된 함수

$f(x)=\left|\sin(\pi\sqrt{x})\right|$

에 대하여 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (n은 자연수)라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+h^n)-f(\alpha_n-h^n)}{h^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{12}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.