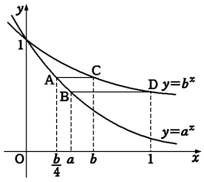
제 2 교시

# Ambitious Penguin

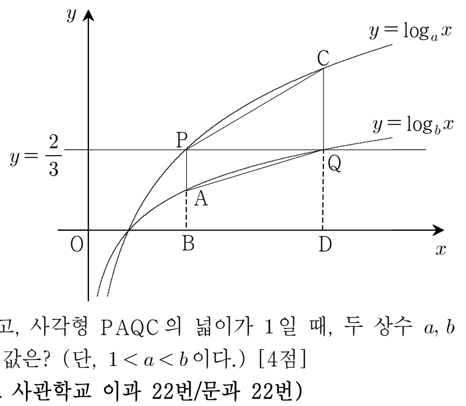
수학1 - 1. 지수와 로그

1. 그림과 같이 $0<a<b<1$인 두 실수 $a$, $b$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 두 점 A, B의 $x$좌표는 각각 $\frac{b}{4}$, $a$이고, 곡선 $y=b^x$ 위의 두 점 C, D의 $x$좌표는 각각 $b$, 1이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 $x$축과 평행할 때, $a^2+b^2$의 값은? [3점]
**(2013학년도 사관학교 이과 7번/문과 7번)**




① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

2. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}$가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 $x$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 $x$축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.




$\overline{PA}=\overline{AB}$이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값은? (단, $1<a<b$이다.) [4점]
**(2011학년도 사관학교 이과 22번/문과 22번)**

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

3. 연립방정식

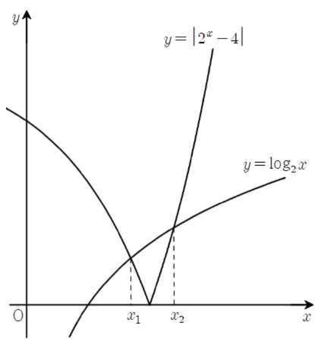
$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_y 2}=3 \\ \log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]
**(2006학년도 사관학교 문과 26번)**

4. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]
**(2021학년도 사관학교 나형 21번)**

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$
ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$
ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$




① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

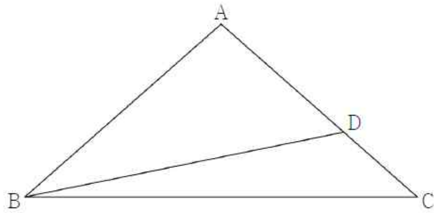
수학1 - 2. 삼각함수

5. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.

$$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$$

일 때, $\dfrac{\sin C}{\sin A}$의 값은? [4점]

(2021학년도 사관학교 나형 19번)




① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

## 수학1 - 3. 수열

6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
> (나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

**(2021학년도 사관학교 가형 18번)**

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

7. 자연수 $n$에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만날 때, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 $k$의 값을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

**(2017학년도 사관학교 나형 29번)**

8. 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{n(2n+1)}\right\} = \frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때 (좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{3}$이므로
> 주어진 등식은 성립한다.
> (2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면
> $$\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{m(2m+1)}\right\} = \frac{m(m+3)}{12}$$
> 이제, $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.
> $$\sum_{k=1}^{m+1} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}$$
> $$= \sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\} + \frac{(\text{가})}{2m+3}$$
> $$= \sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{(\text{나})}\right\} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m} k^2 + \frac{(\text{가})}{2m+3}$$
> $$= \frac{m(m+3)}{12} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1} (\text{다})$$
> $$= \frac{(m+1)(m+4)}{12}$$
> 그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
> 따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여
> 주어진 등식은 성립한다.

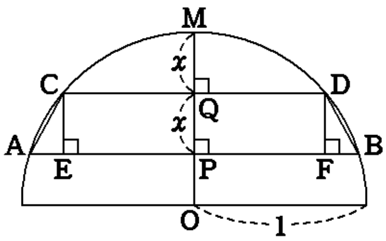
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

**(2009학년도 사관학교 이과 15번/문과 15번)**

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $m$ | $(m+1)(2m+3)$ | $(k-1)^2$ |
| ② | $m$ | $m(2m+1)$ | $(k-1)^2$ |
| ③ | $m+1$ | $m(2m+1)$ | $(k-1)^2$ |
| ④ | $m+1$ | $(m+1)(2m+3)$ | $k^2$ |
| ⑤ | $m+1$ | $m(2m+1)$ | $k^2$ |

수학2 - 1. 함수의 극한과 연속

9. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 반원의 호를 이등분하는 점을 M이라 하고, 선분 OM 위의 점 P를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 선분 PM의 중점 Q를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 점 C, D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\overline{\mathrm{PM}}=2x$일 때, 사다리꼴 ABDC와 직사각형 EFDC의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라 하자. $\lim_{x\to 0+}\frac{T(x)}{S(x)}$의 값은? [4점]
(2013학년도 사관학교 문과 22번)




① $\sqrt{2}-1$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$
④ $2(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $2(2-\sqrt{3})$

수학2 - 2. 미분

10. 이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

**(2012학년도 사관학교 문과 11번)**

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 2} g(x)=f'(2)$

ㄴ. 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$

ㄷ. $x>2$일 때, $g(x)<f'(x)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

**(2018학년도 사관학교 나형 20번)**

(가) $f(2)=f'(2)=0$
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\ge -3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160 ④ 176 ⑤ 192

12. $0<a<\frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서 그은 접선 $l$이 $x$축의 점 A에서 만난다. 접선 $l$을 $x$축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 $m$이라 하고, 직선 $m$이 $y$축과 만나는 점을 B라 하자. 또, 점 A를 지나고 접선 $l$에 수직인 직선을 $n$이라 할 때, 직선 $n$이 $y$축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $S(a)$의 극댓값은? [4점]

**(2012학년도 사관학교 문과 22번)**

① $\frac{\sqrt{3}}{144}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{72}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

13. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
(나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k,\ t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t\to k+} g(t)=-2\ ,\quad \lim_{t\to 30+} g(t)=1$$

일 때, 실수 $k$의 값을 구하시오. (단, $k<30$) [4점]

**(2019학년도 사관학교 나형 30번)**

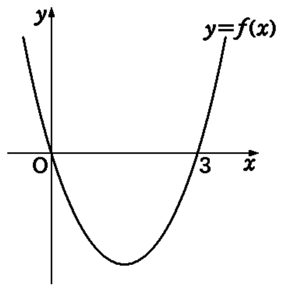
수학2 - 3. 적분

14. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만날 때, 함수

$$S(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

의 극댓값과 극솟값을 각각 $M$, $m$이라 하자. $M-m=6$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{S(x)}{x-1}$의 값은? [3점]

(2013학년도 사관학교 문과 13번)




① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-2$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(1)=25$
Ⅱ. $f(x)=\frac{1}{2}\int_x^{x+1}f(t)dt-\frac{1}{2}\int_x^{x-1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt$
Ⅲ. 임의의 실수 $x, y$에 대하여
$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$

이때, 미분계수 $f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(2005학년도 사관학교 이과 26번)

16. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\ge0$일 때, $f(x)=x^2-2x$이다.
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이다.

실수 $t$에 대하여 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(2017학년도 사관학교 나형 30번)

[빠른 정답]

1번: ③
2번: ③
3번: 20
4번: ②
5번: ③
6번: ①
7번: 195
8번: ⑤
9번: ④
10번: ③
11번: ①
12번: ①
13번: 21
14번: ①
15번: 50
16번: 35

[해설]

(1번)

점 A와 C의 $y$좌표가 일치하므로 $a^{\frac{b}{4}}=b^b$, 즉 $a^{\frac{1}{4}}=b$ ( ∵ $b\neq 0$)이다. 점 B와 D의 $y$좌표가 일치하므로 $a^a=b$, 위의 식과 함께 정리하면 $a^a=a^{\frac{1}{4}}$이다. 문제에서 $a\neq 1$이라고 했으므로 $a=\frac{1}{4}$이다.

$$a^{\frac{1}{4}}=b$$
$$b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{16}$

정답 ③

(2번)

$$\log_a x:\log_b x=2:1 \quad\rightarrow\quad b=a^2$$
$$\square\mathrm{PAQC}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}=1$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=2 \quad\rightarrow\quad a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2\ ,\ \ a^{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}$$

따라서 $ab=a^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

정답 ③

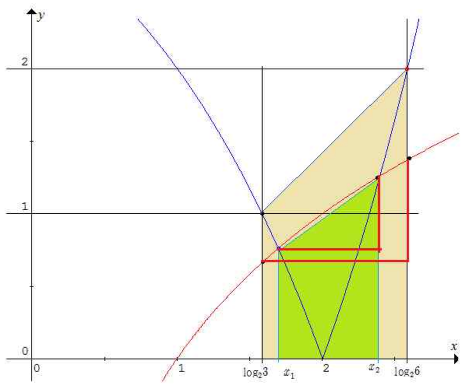
(3번)

$$\frac{2}{\log_x 4}+\frac{1}{\log_y 2}=3 \quad\rightarrow\quad \log_2 x+\log_2 y=3$$
$$\log_2 3x+\log_{\sqrt{2}}y=\log_2 48$$
$$\rightarrow\quad \log_2 x+2\log_2 y=\log_2\frac{48}{3}=4$$

위에서 도출된 두 식을 연립하면 $x=4,\ y=2$이다. 따라서 $\alpha=4,\beta=2$ 이므로 $\alpha^2+\beta^2=20$

정답 20

(4번)




ㄱ. (참)

그림에서 $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$ 임은 분명하다.

ㄴ. (참)

그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}(x_2-x_1)(2_2^{x}-2_1^{x})<\frac{3}{2}$$

ㄷ. (거짓)

그림에서 빨간 직각삼각형의 높이를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$$(2^{x_2}-4)-(4-2^{x_1})<\log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$$
$$2_1^{x}+2_2^{x}<8+\log_2(\log_3 6)$$

정답 ②

(5번)

사인법칙을 통해 주어진 값들을 정리하면 다음과 같다.

$$\sin C=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{DBC})}{\overline{\mathrm{DC}}}$$
$$\sin A=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{ABD})}{\overline{\mathrm{AD}}}$$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=5:3$이므로 사인값의 성질에 의해
$\sin(\angle\mathrm{ABD}):\sin(\angle\mathrm{DBC})=5:2$이다. 따라서 정리하면
$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$

정답 ③

(6번)

(가) 조건과 (나) 조건의 식을 더하면 다음과 같다.

$a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16}a_n&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{15}+a_{16})\\&=3+2(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_8)\\&=7+2(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_8)\\&=7+4(a_2+a_3+a_4)\\&=7+12a_2\\&=31\end{aligned}$$

정답 ①

(7번)

원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}$의 제1사분면의 두 교점을
$P\left(a,\ \frac{k}{a}\right)$, $Q\left(\frac{k}{a},a\right)\left(a>\frac{k}{a}\right)$라 하자. 그리고 선분 PQ의 중점을
$M\left(\frac{a+\frac{k}{a}}{2},\ \frac{a+\frac{k}{a}}{2}\right)$라 하자. 이때, 두 점 $P$, $Q$는 원 위의 점이므로 $a^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2=n^2$이다.
직사각형의 긴 변이 짧은 변의 2배이면, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OM}}$ 이 성립한다.
즉, $\sqrt{2}\left(a-\frac{k}{a}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{a+\frac{k}{a}}{2}\right)$이다. 정리하면 다음과 같다.

$a^2=3k$

$$a^2+\left(\frac{k}{a}\right)^2=n^2\quad\rightarrow\quad 3k+\frac{k}{3}=n^2$$
$$k=\frac{3n^2}{10}$$
$$f(n)=\frac{3}{10}n^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{12}f(n)&=\frac{3}{10}\times\frac{12\times13\times25}{6}\\&=195\end{aligned}$$

정답 195

(8번)

(가)에서는 주어진 식에 $m+1$을 대입한 것이므로
$(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2m+3}$ 이다.

(나)에서는 $\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2$ 항이 나왔으므로
주어진 식의 마지막 항을 구하면 $\frac{1}{m(2m+1)}$ 이다.

(다)에서는
$$\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+\frac{m+1}{2m+3}$$
$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)2m+3}$$
$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}k^2$$

따라서 (가) : $m+1$, (나) : $m(2m+1)$, (다) : $k^2$이다.

정답 ⑤

(9번)

$S(x)=\frac{1}{2}x(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})$
$T(x)=x\cdot\overline{\mathrm{CD}}$

$$\begin{aligned}\frac{T(x)}{S(x)}&=\frac{2\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}}\\&=\frac{2\cdot\overline{\mathrm{QD}}}{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{QD}}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{OP}}=1-2x$이므로, 직각삼각형 OPB를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PB}}&=\sqrt{1-(1-2x)^2}\\&=\sqrt{4x-4x^2}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{OQ}}=1-x$이므로 직각삼각형 OQD를 토대로 정리하면 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{QD}} = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{T(x)}{S(x)} = \lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{4x-4x^2}+\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-4x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2$$

정답 ④

(10번)

ㄱ. (참)
$x\neq2$ 일 때, $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$ 에서

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이다. 이때, $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

ㄴ. (참)
함수 $f(x)-f(2)$는 이차함수이고 $x-2$를 인수로 갖는다. 따라서 $g(x)$는 일차함수이므로, $g(x)$는 미분가능한 함수이다. 그러므로 $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$ 의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 다음과
같다.

$$g(x)+(x-2)g'(x)=f'(x) \quad\to$$
$$(x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$$

ㄷ. (거짓)
문제의 조건만으로는 $g'(x)$ 의 부호를 판단을 할 수 없다.

정답 ③

(11번)

(가) 조건을 토대로 함수의 식을 세우면 다음과 같다.

$$f(x)=(x-2)^2(x-c) = x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c$$

(나) 조건을 토대로 해당 식을 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x)=3x^2-2(4+c)x+(4+4c) \geq -3$$
$$3x^2-2(4+c)x+(7+4c)\geq0$$

$$D/4=(4+c)^2-3(7+4c) = c^2-4c-5 = (c-5)(c+1)\leq0 \quad\to\quad -1\leq c\leq5$$

$$f(6)=16(6-c)$$

$f(6)=16(6-c)$ 의 최대와 최소는 각각 $c=-1,\ c=5$ 일 때이다. 따라서 $16(6+1)+16(6-5)=128$

정답 ①

(12번)

곡선 $y=x^2$에 대하여 도함수는 $y'=2x$이므로, 접선 $l$의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$y-a^2=2a(x-a) \quad\to\quad y=2ax-a^2$$
$$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$$

이때, 직선 $m$의 방정식은 $y=-2ax+a^2$ 이며, 직선 $n$의 방정식은 $y=-\frac{1}{2a}\left(x-\frac{a}{2}\right)=-\frac{x}{2a}+\frac{1}{4}$ 이다. 그러므로 점 $\mathrm{B}(0,\ a^2)$, 점 $\mathrm{C}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$이다.

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\times\frac{a}{2} = \frac{a(1-4a^2)}{16} \quad \left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\right)$$

$$S'(a)=\frac{1-12a^2}{16}=0$$

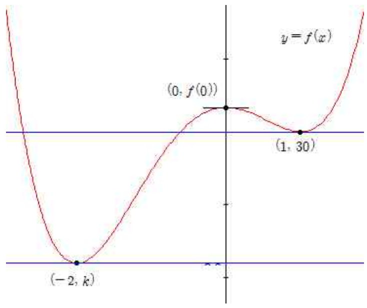
위의 식을 토대로 극대/극소를 정리하면 $S(a)$는 $a=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 에서 극솟값을, $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{1}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{144}$

정답 ①

(13번)

주어진 조건으로부터 곡선 $y=f(x)$는 밑의 그래프의 그림과 같이 $x=-2$, $x=1$ 일 때 각각 극솟값 $f(-2)=k$, $f(1)=30$을 가짐을 알 수 있다. 또한 $f'(0)=0$이라는 점 역시 알 수 있다.




이를 토대로 식을 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x)=4x(x+2)(x-1)$$
$$=4x^3+4x^2-8x$$

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+C$$

$$f(1)=1+\frac{4}{3}-4+C$$
$$=C-\frac{5}{3}$$
$$=30$$

$$C=\frac{95}{3}$$

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{95}{3}$$
$$k=f(-2)$$
$$=21$$

정답 21

(14번)

$$S(x)=\int_1^x f(t)dt$$
$$S'(x)=f(x)$$

이때, $S(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이를 정리하여 계산하면 다음과 같다.

$$M=S(0)=\int_1^0 f(t)dt$$
$$m=S(3)=\int_1^3 f(t)dt$$

$$M-m=\int_1^0 f(t)dt-\int_1^3 f(t)dt$$
$$=-\int_0^3 f(t)dt$$
$$=6$$

$$\int_0^3 f(t)dt=-6$$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a$라고 하자. 식을 세우면 $f(x)=ax(x-3)$이고, 이를 토대로 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^3 f(x)dx=-\frac{a}{6}\cdot 3^3$$
$$=-\frac{9a}{2}$$
$$=-6$$

$$a=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\frac{4}{3}x(x-3)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1}=S'(1)\ (\because\ S(1)=0)$$
$$=f(1)$$
$$=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot(1-3)$$
$$=-\frac{8}{3}$$

정답 ①

(15번)

(다) 조건의 식에 $y=0$을 대입하면 다음과 같다.

$$f(x)+f(x)=2\{f(x)+f(0)\}=2f(x)+2f(0)$$
$$f(0)=0$$

그리고 $y=x$를 대입하면 다음과 같다.

$$f(2x)+f(0)=2\{f(x)+f(x)\}$$
$$\rightarrow\quad f(2x)=4f(x)$$

함수 $f(x)$가 다항함수이기 때문에 식을 세우면
$f(x)=ax^n+\cdots\ (a\neq 0,\ n$은 자연수$)$이다.
이를 $f(2x)=4f(x)$에 적용하면 다음과 같다.

$$a2^n\times x^n+\cdots=4a\times x^n+\cdots$$

좌변과 우변의 최고차항을 비교했을 때 $a2^n=4a$이다. $a\neq 0$이기 때문에 $2^n=4$이고, 그러므로 $n=2$이기 때문에 $f(x)$는 이차함수이다. $f(0)=0$, 그리고 (가) 조건의 $f(1)=25$임을 이용해 식을 세우면 $f(x)=ax^2+(25-a)x$이다.
(나) 조건의 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+1}f(t)dt-\frac{1}{2}\int_x^{x-1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt \\ &=\frac{1}{2}\int_x^{x+1}f(t)dt+\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt \\ &=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

$f(x)=ax^2+(25-a)x$을 그대로 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ax^2+(25-a)x &=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}\{at^2+(25-a)t\}dt-\int_0^1\{at^2+(25-a)t\}dt \\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{25-a}{2}x^2\right]_{x-1}^{x+1}-\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{25-a}{2}x^2\right]_0^1 \\ &=ax^2+(25-a)x+\frac{a}{2}-\frac{25}{2} \end{aligned}$$

$$f(x)=ax^2+(25-a)x=ax^2+(25-a)x+\frac{a}{2}-\frac{25}{2}$$

양변을 비교하여 $a=25$라는 것을 알 수 있고, 그러므로
$f(x)=25x^2$이며 $f'(1)=50$

정답 50

(16번)

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & (x\leq 0) \\ x^2-2x & (x>0) \end{cases}$$

$$f(x+1)=\begin{cases} -x^2-4x-3 & (x\leq -1) \\ x^2-1 & (x>-1) \end{cases}$$

두 함수를 토대로 함수 $g(x)$를 정리하면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \left(x\leq -\frac{3}{2}\right) \\ f(x+1) & \left(-\frac{3}{2}<x<0\right) \\ f(1) & (0\leq x<1) \\ f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 넓이를 $S$라고 하면 다음과 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned} S &=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\{f(x)-f(x+1)\}dx+\int_0^1\{f(x)-f(1)\}dx \\ &=\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\{(-x^2-2x)-(-x^2-4x-3)\}dx \\ &\quad+\int_{-1}^{0}\{(-x^2-2x)-(x^2-1)\}dx \\ &\quad+\int_0^1\{(x^2-2x)-(-1)\}dx \\ &=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3} \\ &=\frac{23}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p+q=35$

정답 35