시험장에서 풀이를 자연스럽게 끌어내기 위해 명심하면 좋을 것들. - 수의대 휴학생 김지헌

1. 좌표와 기울기, 넓이 등을 상황에 따라 기하 또는 대수적으로 볼 수 있어야합니다.

2. 신 유형, 새로운 표현이 출제되더라도 반드시 '개념'에서 출제됐으므로,

어라 신 유형이네? → 어떤 개념을 물어보려고 냈을까? → 익숙한 표현으로 바꿀 수 있을까?의

사고과정을 거치다보면 문제의 풀이 방향을 찾을 수 있습니다.

3. 개형추론 문제에서 주어진 조건을 모두 그래프 위에 표시해두고 나면, 개형추론이 쉬워집니다.

4. 개수세기에서 대략의 추정치를 바탕으로 풀이의 방향성을 잡는 게 좋습니다.

5. 문제를 풀 때 무작정 식을 조작하기 보다는 식을 관찰해서 최대한 계산을 줄입시다.

6. 공식을 쓰지 않으면 어떻게 푸는지를 기억하되, 공식을 쓰는 게 문제풀이가 쉽고 빠릅니다.

7. 호흡이 긴 문제를 풀 때, 내가 어떤 것을 구하고 있었는지 잊지 않아야 합니다.

8. 평소에 다루던 변수(x, y)가 아니어도 그래프를 그릴 수 있음을 인지합시다.

9. $f(x)$와 관련된 식은 $f(x)$ 그 자체가 아닌 이상 합성함수로 해석하는 게 편합니다.

평행이동, 대칭이동을 포함해서 대부분 합성함수로 해석할 수 있으니, 합성함수에 익숙해집시다.

10. 문제에서 대체로 특이한 상황이 주어지므로, 찍어서 푸는 게 시간적으로 효율적이긴 하지만,

혹여나 그렇지 않은 경우를 대비해서 공부할 때는 모든 케이스를 따져보는 연습을 합시다.

11. 정의역을 인지하면서 x축 평행이동을 사용하면 상황에 따라 계산 과정을 줄일 수 있습니다.

12. 개념에서 어떤 점이 중요한 포인트였는지 명심하면 풀이 과정의 길이를 줄일 수 있습니다.

090617 나형

학생의 코멘트 :

강의를 몇 번씩 들어도 과연 실전에서 풀 수 있을지 모르겠어요.

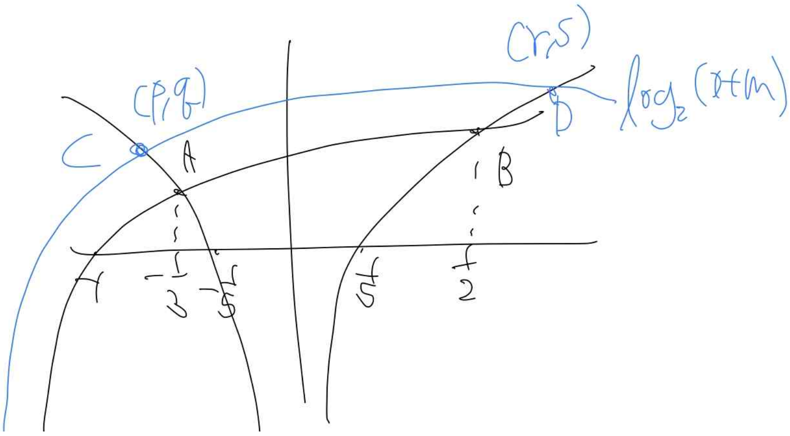
17. 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C$(p,\ q)$, D$(r,\ s)$라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $p<-\frac{1}{3}$, $r>\frac{1}{2}$

ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.

ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.



그래프에 의해 ㄱ선지는 자명하게 받아들일 수 있다.

$q=\log_2\left(\frac{5m}{6}\right)$, $s=\log_2\left(\frac{5m}{4}\right)$에서 $s-q=\log_2\frac{3}{2}$이고 두 점 A, B의 y좌표의 차이를 t라 할 때

$t=\log_2\frac{3}{2}$에서 x좌표의 차이가 다르므로 두 직선의 기울기는 다르다. 따라서 ㄴ선지는 옳지 않다.

두 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times t=\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times(s-q)$에서 두 넓이는 같으므로 ㄷ선지는 옳다.

한줄 요약 : 좌표와 기울기, 넓이 등을 상황에 따라 기하 또는 대수적으로 볼 수 있어야합니다.

220614 나형

학생의 코멘트 :

우변을 절댓값 x로 묶는다는 발상을 어떻게 할 수 있는지 잘 모르겠어요.

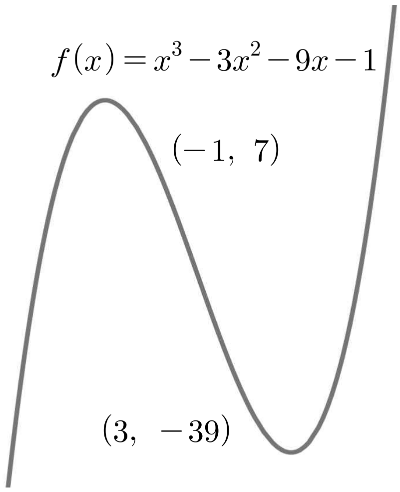
14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|=|x||f(x-p)+q|$이므로 $x\neq0$에서 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}|f(x-p)+q|$입니다.

$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의



집합에서 연속이므로 $|f(0-p)+q|=0$, $f(-p)+q=0$입니다.

$f'(x)=3x^2-6x-9$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과

같은데, 함수 $f(x-p)+q$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를

x축으로 p만큼, y축으로 평행이동한 그래프와 같습니다.

또한, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이므로

함수 $g(x)$는 오직 하나의 첨점을 가집니다.

i) $f(x-p)+q=0$을 만족하는 서로 다른 x의 개수가 3일 때,

$f(-p)+q=0$에서 $f(x-p)+q=0$을 만족하는 x중 0이 아닌 서로 다른 x의 개수가 2이고,

각각의 x가 함수 $g(x)$에서 첨점을 가지게 되므로 조건 (나)에 위배됩니다.

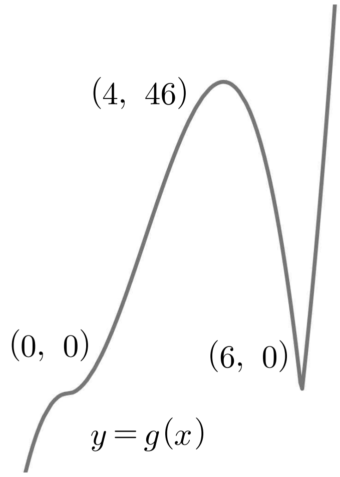
$ii)$ $f(x-p)+q=0$을 만족하는 서로 다른 x의 개수가 2일 때,

$f(x-p)+q=f(-p)+q$을 만족하는 서로 다른 x의 개수가 2

일 때 $p=1,\ q=7$ 또는 $p=-3,\ q=39$입니다.

p가 양수이므로 $p=1,\ q=7$의 경우에만 주어진 조건을 만족하며

$p+q=8$이다. 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같습니다.



$iii)$ $f(x-p)+q=0$을 만족하는 서로 다른 x의 개수가 1일 때,

$f(-p)+q=0$에서 $f(x-p)+q=0$을 만족하는 x중 0이 아닌 x는 존재하지 않으므로, 함수 $g(x)$가

첨점을 가지지 않으므로 조건 (나)에 위배됩니다. 따라서 $p+q=8$입니다.

+)

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

핵심 요약 : 이러한 신 유형, 새로운 표현이 출제되더라도 반드시 '개념'에서 출제됐으므로,

어라 신 유형이네? → 어떤 개념을 물어보려고 냈을까? → 익숙한 표현으로 바꿀 수 있을까?의

사고과정을 거치다보면 문제의 풀이 방향을 찾을 수 있습니다.

14번에서는 $f(x-p)+q$의 형태에서 평행이동 개념을 숨기려 했구나!

21번에서는 x^n-64의 형태에서 실수 a의 n제곱근의 개념을 숨기려 했구나!

이렇게 발견하면서 풀이의 방향성을 잡는 게 좋습니다.

나형 201130

학생의 코멘트 :

그래프 개형 추론을 시험장에서 어떻게 해야 할지 모르겠어요.

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(0)=0$이므로 세 함수 $y=f(x)$, $y=x$, $y=-x$가 원점을 지납니다.

방정식 $f(x)-x=0$의 $x=0$이 아닌 다른 실근을 $x=\alpha$라 할 때,

$\alpha<0$일 때 $x>0$에서 $f'(x)>1$이므로 $f'(1)=1$에 모순입니다. $\therefore \alpha>0$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 m이라 할 때 조건 (가)와 $f'(1)=1$에서

삼차함수의 비율관계 (*)에 의하여 $f(x)-x=mx^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$입니다.

조건 (나)에서 $f(x)+x=mx(x-k)^2$라 할 때,

$f(x)=x+mx^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-x+mx(x-k)^2$에서 $mx^3-\dfrac{3}{2}mx^2+x=mx^3-2kmx^2+k^2mx-x$입니다.

$-\dfrac{3}{2}m=-2km$, $1=k^2m-1$에서 $k=\dfrac{3}{4}$, $m=\dfrac{32}{9}$입니다.

$\therefore f(x)=x+\dfrac{32}{9}x^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(3)=51$

한 줄 요약 : 사실 이 문제에서 $f(0)=0$, $f'(1)=1$의 조건을 표시하지 않으면 방향성을 잡는 것에

한참 헤맬 수 있습니다. **주어진 조건을 모두 그래프 위에 표시해두고 나면, 개형추론이 쉬워집니다.**

170930 나형

학생의 코멘트 :

선생님만의 체계적으로 케이스 분류하는 방법이 궁금합니다.

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.
(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

$x=61$일 때 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$의 값이 4이므로 $x>61$일 때를 조사해봅시다. (시험장에서 이러한 문제를 풀 때, 'n의 값이 이즈음 되겠다.' 라는 대략의 추정치를 바탕으로 풀이의 방향성을 잡는 게 좋습니다. 공부할 때는 $x=33$일 때 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$의 값이 3이므로 $33<x<61$일 때부터 보는 것이 좋겠지요.)

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $(k-1)+(k-13)+(k-33)+(k-61)=4k-108$,

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 개수는 $(k-13)+(k-33)+(k-61)=3k-107$,

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $(k-14)+(k-34)+(k-62)=3k-110$,

한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 개수는 $2(k-34)+1+2(k-62)+1=4k-190$이므로

$f(65)=395<400<f(66)=409$에서 $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 65입니다.

한 줄 요약 : 개수세기에서 대략의 추정치를 바탕으로 풀이의 방향성을 잡는 게 좋습니다.

171121 나형

21. 좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+10 & (x<10) \\ (x-10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 $n \leq 8$일 때와 $12 \leq n \leq 20$일 때 $A_n-B_n=0$임을 관찰할 수 있습니다. 따라서 $n=9$일 때 $A_9-B_9=12-8=4$, $n=10$일 때 $A_{10}-B_{10}=17-4=13$, $n=11$일 때 $A_{11}-B_{11}=15-7=8$이므로 $\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)=4+13+8=25$입니다.

격자점의 문제에서 픽의 정리를 사용할 수 있습니다. **모든 꼭짓점이 격자점 위에 존재하는 다각형의 넓이**를 S, **다각형의 내부에 있는 격자점의 수**를 A, **다각형의 변 위에 있는 격자점의 수**를 B라고 할 때, $S=A+\frac{B}{2}-1$이 성립하며, 이를 "**픽의 정리**"라고 합니다.

다만, 저는 격자점 또는 개수세기의 문제를 풀 때 대체로 직접 세는 편을 선호합니다.

뒤의 문제에서도 이야기할 코멘트이지만, 문제를 풀 때는 무작정 풀어보기 보다는 상황을 관찰해서 최대한 계산을 줄이면 좋습니다. 이 문제의 경우에서도 $n \leq 8$일 때와 $12 \leq n \leq 20$일 때 $A_n-B_n=0$임을 관찰하면 남은 3개의 경우에서만 직접 그래프를 그려보면 풀 수 있으니까요.

190921 나형

학생의 코멘트 :

수2 내에서 넓이 변화를 관찰하는 걸로 풀라는데 어떻게 접근해야 될지 모르겠어요.

21. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \ge 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

문제를 풀기 전에 관찰할 것은, 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이라는 것과

$f(t)-|f(t)|=\begin{cases}0 & (f(t)\ge 0)\\ 2f(t) & (f(t)<0)\end{cases}$에서 $f(t)-|f(t)|\le 0$이므로 함수 $g(x)$는 증가하지 않는

함수라는 것입니다. 즉, 함수 $g(x)$의 그래프는 상수함수인 구간과 감소하는 구간으로 이루어집니다.

조건 (가)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0$이고,

조건 (나)에서 $g(x)$는 감소함수이므로 $2<x<5$에서 $f(x)<0$이며,

조건 (다)에서 $g(x)$는 상수함수이므로 $x>5$에서 $f(x)>0$입니다.

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(x)=0$은 반드시 $x=-2,\ 2,\ -5,\ 5$를 해로 가져야 됩니다.

따라서 $f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$이고 $f(\sqrt{2})=(-2)(-23)=46$입니다.

한 줄 요약 : 문제를 풀 때 무작정 식을 조작하기 보다는 식을 관찰해서 최대한 계산을 줄이자!

180620 나형

학생의 코멘트 :

비율관계 배우고 나서는 똑같은 식만 생각나서 개념에 입각한 방식으로 복습하고 싶습니다.

20. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ \ (k>0 \text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

$f'(x)=x^2-2kx=0=x(x-2k)=0$에서 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2k$에서 극소입니다.

서로 다른 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 $f'(x)=x^2-2kx=3k^2$이므로 $x^2-2kx-3k^2=0$에서

$(x-3k)(x+k)=0$입니다. $f(0)=1$, $f(2k)=\dfrac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\dfrac{4}{3}k^3$,

$f(-k)=\dfrac{-k^3}{3}-k^3+1=1-\dfrac{4}{3}k^3$, $f(3k)=9k^3-9k^3+1=1$이고 $y-\left(1-\dfrac{4}{3}k^3\right)=3k^2(x+k)$에서

$y=1$일 때 $\dfrac{4}{3}k^3=3k^2(x+k)$에서 $x=-\dfrac{5}{9}k$이므로 문제에서 주어진 평행사변형의 밑변의 길이는

$3k-\left(-\dfrac{5}{9}k\right)$이고 높이는 $1-\left(1-\dfrac{3}{4}k^3\right)$ S$=\left(3k+\dfrac{5}{9}k\right)\dfrac{4}{3}k^3=24$입니다. $k^4=\dfrac{3^4}{2^4}$에서 $k=\dfrac{3}{2}$입니다.

비율관계를 이용하면 계산과정을 최소화할 수 있으므로, 저는 쓰는 것을 추천 드립니다.

한 줄 요약 : 비율관계를 쓰지 않으면 어떻게 푸는지를 기억하되, 비율관계를 쓰는 게 쉽고 빠르다.

2018년도 사관학교 가형 30번

30. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재할 때, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27} a_n$의 값을 구하시오.

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 도함수 $f'(x)=3x^2+2ax-a \geq 0$ 이어야 합니다. 판별식이 $\frac{D}{4}=a^2+3a=a(a+3) \leq 0$이므로 $-3 \leq a \leq 0$ 입니다. 이때 $f(k)=n$이라고 하면 $g(n)=k$이고 $n\times g'(n)=\frac{n}{f'(k)}=\frac{f(k)}{f'(k)}=1$에서 $n\times g'(n)=1$을 만족시키면 $f(k)=f'(k)=n$입니다. 그러므로 자연수 n에 대하여 $-3 \leq a \leq 0$, $f(k)=f'(k)=n$을 만족시키는 실수 a의 개수 (a_n)을 조사해보면, $f(k)=f'(k)$에서 $k^3+ak^2-ak-a=3k^2+2ak-a$, 즉 $k^3+(a-3)k^2-3ak=0$, $k(k-3)(k+a)=0$에서 $k=0$ 또는 3 또는 $-a$입니다. 각각에 대하여 $f'(k)=n$이므로 $k=0$일 때 $-a=n$, $k=3$일 때 $27+5a=n$, $k=-a$일 때 $a^2-a=n$입니다.
(아마 오답을 한 대부분 학생이 여기에서 풀이의 방향성을 잃지 않았나 생각합니다. 풀이의 호흡이 길어질 때, 내가 지금 구했던 값이 무엇을 위해서 구했던 값이었는지 천천히 복기하면서 풀어야합니다.) a축을 가로 방향으로, n축을 세로방향으로 그래프를 그리며 부등식 $-3 \leq a \leq 0$을 만족하는 실수 a의 개수를 확인해보면 $a_1=a_2=a_3=2$, $a_4=a_5=\cdots=a_{27}=1$에서 $\sum_{n=1}^{27} a_n=30$입니다.

두 줄 요약 : 문제를 풀면서 계산 과정을 거칠 때, 내가 어떤 것을 구하고 있었는지 잊지 않아야 합니다. 또한, 평소에 다루던 변수(x, y)가 아니어도 그래프를 그릴 수 있음을 인지합시다.

190621 가형

시험장에서는 나 조건을 합성함수에 관한 함수로 해석 못했을 것 같고 아마 바로 루트미분 해봤을 것 같은데 그때 t를 어떻게 봐야할 지 모르겠어요!

21. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

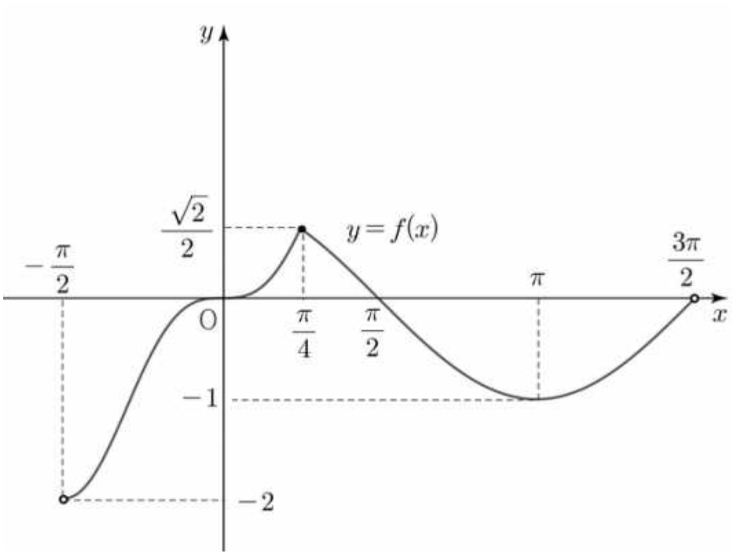
$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]



함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그린 뒤에,

학생이 말한 대로 합성함수에 관한 함수로 해석을 하지 않고 본 식 그대로 미분을 한다면

$$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t} & (f(x)\ge t) \\ \sqrt{-f(x)+t} & (f(t)<t)\end{cases}$$에서 $$y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} & (f(x)\ge t) \\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}} & (f(x)<t)\end{cases}$$ 입니다.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}-} f'(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}+} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $x = \frac{\pi}{4}$에서 도함수 $f'(x)$가 연속하지 않습니다.

또한 $y = f(x)$과 $y = t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않습니다.

$t = -1$일 때 즉, $y = \sqrt{1+\cos x}$의 $x = \pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-\cos h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2\frac{h}{2}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}$$ 에서

$\lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $x = \pi$에서 미분가능하지 않습니다. (만약 $x = \pi$에서 미분가능하다고 틀린 직관을 사용했더라도 보기 중에서 오답을 고를 수 있었었습니다. 또한, $y = \sqrt{x}$의 $x = 0+$에서의 그래프 개형을 생각해보면 직관적으로 미분불가능하지 않을까? 라는 의문을 가질 수 있습니다.) 이에 따라 t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \le -2) \\ 2 & (-2 < t < -1) \\ 3 & (t = -1) \\ 4 & (-1 < t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 3 & \left(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 1 & \left(t \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$ 이므로 $a = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$, $b = g(0) = 2$, $c = g(-1) = 3$입니다.

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로 $h(1) = h(2) = h(3) = h(4)$이 성립하고

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$라 할 수 있습니다.

$\therefore\ h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - f(5) + 3 = (120+k) - (24+k) + 3 = 99$

두 줄 요약 : $f(x)$와 관련된 식은 $f(x)$ 그 자체가 아닌 이상 합성함수로 해석하는 게 편하긴 하다!

평행이동, 대칭이동을 포함해서 대부분 합성함수로 해석할 수 있으니, 합성함수에 익숙해지자.

+) 미분계수의 정의를 써서 미분가능성을 확인해보는 좋은 문제입니다. 미적분 응시자 복습 필수!

190930 가형

합성함수 그리는 걸로 풀었는데 찍는 느낌이 들어서 현장에서 운이 없거나 더 복잡한 조건이 나오면 경우를 못 찾아서 틀릴 것 같더라고요. 대신 직관적으로는 가장 쉽게 풀리는데,
다른 강사님은 함수 값 대응 (평행선 그어서) 풀던데 어떻게 푸는 게 현장에서 더 적합할까요?

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

합성함수 $f(g(x))$에서는 $g(x)$의 값이 사차함수 $f(x)$의 정의역의 값으로 대입되는 형태입니다.

$g'(x)=2x^3(4-x)e^{-x}$에서 함수 $g(x)$가 $x=4$에서 극댓값을 가지므로 방정식 $g(x)=t$의 실근의

개수는 $t>g(4)$에서 1, $t=g(4)$에서 2, $0<t<g(4)$에서 3, $t=0$에서 1임을 알 수 있습니다.

방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 항상 4보다 작으므로 (가) 조건에서 $4=3+1$의 형태가 되어야

합니다. 따라서 사차함수 $f(x)$는 $\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$의 형태임을 추론할 수 있습니다. $(0 \le \alpha < \beta)$

또한 $\alpha>0$일 때 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극대이므로 (나) 조건에서 $\alpha=0$입니다.

끝으로 (다) 조건에서 $6=3+2+1$ 또는 $6=3+3$의 형태가 되어야 하는데, $g(4)>\beta$가 되어야하므로

$6=3+3$의 형태가 되어야합니다. 즉, $f(x)$의 극댓값이 8이 될 때 (다) 조건을 만족할 수 있습니다.

$f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8$에서 $\beta=4$이므로 $f'(x)=2x(x-2)(x-4)$에서 $f'(5)=30$이 됩니다.

두 줄 요약 : 문제에서 대체로 특이한 상황이 주어지므로, 찍어서 푸는 게 시간적으로 효율적이긴

하지만, 혹여나 그렇지 않은 경우를 대비해서 공부할 때는 모든 케이스를 따져보는 연습을 하자!

190914 가형

학생의 코멘트 :

실전에서는 그냥 미분해서 풀었었습니다. 그런데 해설 강의를 보니까 x에 $x-\frac{\pi}{4}$를 대입하던데 어떻게 이런 생각을 떠올릴 수 있는지 모르겠습니다.

14. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

우선, 함수 $f(x)$의 치역을 구하는 것이 본 문제의 목표입니다.

"정의역이 실수 전체의 집합이므로 함수의 그래프를 x축으로 평행이동을 하더라도 치역에 변화가 생기지 않음"을 받아들이신다면, 본 함수를 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x+k=\sin^2 x-\cos x+k$의 형태로 쉽게 바꿀 수 있습니다. 혹은, 본 함수가 주기함수임을 이용하여 정의역이 $0\le x\le 2\pi$와 같이 한 주기를 포함할 수 있도록 주어지더라도 함수의 그래프를 x축으로 평행이동을 하더라도 치역에 변화가 생기지 않습니다. 만약 정의역이 $0\le x\le \pi$와 같이 한 주기를 포함하지 않도록 주어진다면 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=g(x)$에 대하여 함수 $g(x)$의 정의역이 $\frac{1}{4}\pi\le x\le \frac{5}{4}\pi$임을 인지하면서 치역을 구하면 되겠습니다.

한줄 요약 : 정의역을 인지하면서 x축 평행이동을 사용하면 치역을 구하는 계산을 줄이기 쉽다.

200915 가형

학생의 코멘트 :

저는 그냥 계산으로 우직하게 풀었는데 이게 과연 출제의도가 맞는 건지 다른 더 좋은 방법이 있는지 궁금합니다.

15. 함수 $y=e^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$
(나) $\angle\mathrm{AOB}=90°$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

우선, 지수함수와 로그함수의 대칭성을 이용하기 위해 $y=\ln x$의 그래프를 그립니다.

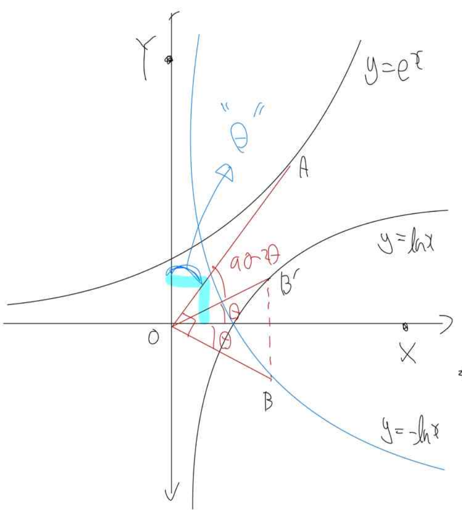
왼쪽의 그림에서 점 B를 x축에 대해 대칭이동한 점을 점 B$'$, x축 위의 한 점을 X라 할 때,

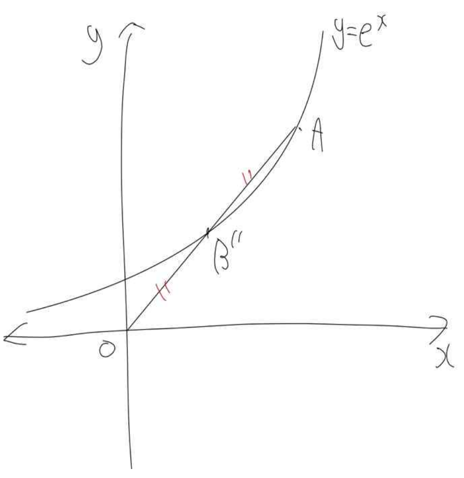
각 XOB와 각 XOB$'$의 크기가 동일합니다. 이때, y축 위의 한 점을 Y라 할 때 각 XOY와

각 AOB가 동일하게 90도이므로 각 XOB와 각 AOY의 크기가 동일합니다. 따라서 점 B$'$을

$y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 점 B$''$라 할 때, 직선 $\overline{\mathrm{OB''}}$위에 점 A가 존재하게 됩니다.

따라서 점 B$''$의 x좌표를 b라 할 때, $\dfrac{e^b}{b}=\dfrac{e^{2b}}{2b}$, $2=e^b$에서 $b=\ln 2$이므로 답은 $\dfrac{2}{\ln 2}$입니다.





한줄 요약 : 지수함수와 로그함수와 관련된 문제는 대부분 대칭성을 떠올려서 풀자!